

NÚMERO DE PORTADORES DE CARGA Y RESISTENCIA ELÉCTRICA DE UN PUNTO CUÁNTICO DE GRAFENO

NUMBER OF CARRIERS AND ELECTRICAL RESISTANCE OF A GRAPHENE QUANTUM DOT

J. S. Cruz Hoyos^{*1} y L. Álvarez Miño²

¹Universidad Nacional de Colombia sede Manizales– Estudiante de Doctorado en Ciencias – Física

²Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Departamento de Física

Recibido: 10/06/2026 ; Aceptado: 03/09/2026

El presente trabajo aborda el estudio teórico del número de portadores de carga $n_{e,h}$ y de la resistencia eléctrica de un sistema de punto cuántico de grafeno; con este fin se parte de la densidad de estados de sistemas 0D que se representa por medio de la función delta de Dirac y se consideran los niveles de energía para un modelo de punto cuántico de grafeno sometido a un potencial constante V_0 , los resultados muestran una influencia de parámetros propios del modelo como la longitud magnética l_B , el tamaño del punto cuántico R y de la energía de Fermi E_F a $T \rightarrow 0$. Mientras que para la resistencia eléctrica se propone que la conducción de las cuasipartículas se da en el borde del punto cuántico debido a la influencia de campos magnéticos fuertes y del acople spin-orbita, lo que permite hallar la corriente eléctrica por estado cuántico y a su vez la corriente eléctrica total al conocer el número de estados cuánticos permitidos en un ΔE ; los valores de resistencia eléctrica dan en el orden de $K\Omega$, lo que concuerda con estudios experimentales reportados en la literatura y además se resalta la dependencia con el tamaño del punto R y el campo magnético l_B .

Palabras Clave: Número de portadores de carga, puntos cuánticos, grafeno, resistencia eléctrica, longitud magnética, energía de Fermi.

This paper presents the theoretical study of the number of charge carriers $n_{e,h}$ and the electrical resistance of a graphene quantum dot system. To this end, it starts from the density of states of zero-dimensional systems, represented by the Dirac delta function, and considers the energy levels for a graphene quantum dot model subjected to a constant potential V_0 . The results show an influence of model parameters such as the magnetic length l_B , the quantum dot size R , and the Fermi energy E_F at $T \rightarrow 0$. Regarding electrical resistance, it is proposed that quasiparticle conduction occurs at the quantum dot edge due to the influence of strong magnetic fields and spin-orbit coupling. This allows us to find the electric current per quantum state and, in turn, the total electric current by knowing the number of allowed quantum states in a ΔE . The electrical resistance values are in the order of $K\Omega$, which agrees with experimental studies reported in the literature, and the dependence on the size of the dot R and the magnetic field l_B is also highlighted.

Keywords: Number of carriers, quantum dots, graphene, electrical resistance, magnetic length, Fermi energy.

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2026.37.3.56-60>



ISSN - 1850-1168 (online)

I. INTRODUCCIÓN

El grafeno es una forma alotrópica del carbono bidimensional que presenta una estructura de red hexagonal plana tipo colmena; su importancia radica en la gran diversidad de propiedades ópticas, térmicas, magnéticas, eléctricas y biomédicas [1-7] que exhibe, por lo que se ha convertido en un material de interés en la última década [2, 8]. El material se caracteriza por presentar una relación de dispersión lineal $E(k) = \hbar v_f k$ en la primera zona de Brillouin alrededor de los puntos de Dirac no equivalentes k y k' [8], lo que da origen a superficies cónicas en su estructura de bandas. El número de portadores de carga por unidad de volumen por definición se escribe como [9]

$$dn = D(E)f(E)dE \quad (1)$$

donde $D(E)$ es la densidad de estados, $f(E)$ la función de distribución, n el número de portadores de carga por unidad

de volumen y E la energía

II. RESULTADOS

Número de portadores de carga de un punto cuántico de grafeno

La densidad de estados para sistemas cero dimensionales se define como la delta de Dirac [10-16]

$$D(E)_{0D} = g_s \delta(E - E_n) \quad (2)$$

Donde E_n son los niveles de energía del sistema discreto, g_s es la degeneración por spin y δ es la función delta de Dirac. La función de distribución de Fermi-Dirac al incluir los niveles de energía discretos del modelo cuántico es

$$f(E_n) = \frac{1}{e^{(E_n - \mu)/k_B T} + 1} \quad (3)$$

Donde μ es el potencial electroquímico, k_B es la constante de Boltzmann y T la temperatura. El número de portadores de carga por unidad de volumen $n_{e,h}$ asociado al sistema

*jscrzh@unal.edu.co

cero dimensional se convierte en una sumatoria sobre los niveles de energía E_n

$$n_{e,h} = \frac{1}{\pi R^2} \sum_n D(E) f(E_n) \quad (4)$$

Donde R es el radio del punto cuántico. Los niveles de energía E_n a considerar en el presente trabajo son los asociados a un punto cuántico de grafeno a un potencial constante V_0 con $m = 0$ [17]

$$E_n = \sqrt{\frac{2v_f^2 \hbar^2 (n + \zeta + 1)}{l_B^2} + \tau^2 e^2 V_0^2} \quad (5)$$

Donde v_f es la velocidad de Fermi calculada para el grafeno en 10^6 m/s, $\hbar$ es la constante de Planck dividida en 2π , n el número cuántico principal, ζ es la relación de flujos entre Aharonov-Bohm y flujo, l_B es la longitud magnética, τ es una constante que toma valores de ± 1 según el punto Dirac k y k' de interés, y e es la carga del electrón. Al reemplazar la densidad de estados 2, la función de distribución de Fermi-Dirac 3 y los niveles de energía 5 en el número de portadores de carga 4, se llega a la siguiente ecuación

$$n_e = \frac{2}{\pi R^2} \sum_n \frac{\delta \left(E - \sqrt{\frac{2v_f^2 \hbar^2 (n + \zeta + 1)}{l_B^2} + \tau^2 e^2 V_0^2} \right)}{\left(\sqrt{\frac{2v_f^2 \hbar^2 (n + \zeta + 1)}{l_B^2} + \tau^2 e^2 V_0^2} - \mu \right) / (k_B T) + 1} \quad (6)$$

Una de las formas de abordar la sumatoria es considerar el caso extremo de $T \rightarrow 0$, donde la función de distribución de Fermi-Dirac se convierte en la función Heaviside, tal que

$$n_e = \frac{2}{\pi R^2} \sum_n \delta \left[E - \frac{v_f \hbar}{l_B} \sqrt{2(n + \zeta + 1) + \frac{l_B^2 \tau^2 e^2 V_0^2}{v_f^2 \hbar^2}} \right] \times \Theta \left[E_f - \frac{v_f \hbar}{l_B} \sqrt{2(n + \zeta + 1) + \frac{l_B^2 \tau^2 e^2 V_0^2}{v_f^2 \hbar^2}} \right] \quad (7)$$

Con el fin de simplificar la expresión, en la Fig. 1 se procede a graficar la función Heaviside y la delta de Dirac.

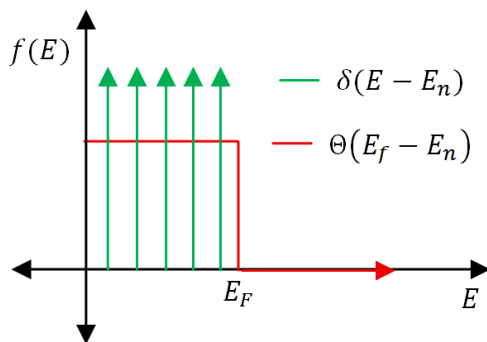


FIG. 1: Delta Dirac y Heaviside

La función Heaviside actúa sobre la delta de Dirac restringiendo su valor hasta una energía E_f , por lo tanto, el límite superior de la sumatoria cambia de $n \rightarrow \infty$ a $n \rightarrow n_F$.

$$n_e = \frac{2}{\pi R^2} \sum_{n=0}^{n_F} \delta \left(E - \frac{v_f \hbar}{l_B} \sqrt{2(n + \zeta + 1) + \frac{l_B^2 \tau^2 e^2 V_0^2}{v_f^2 \hbar^2}} \right) \quad (8)$$

Para hallar el n_F se iguala la energía de Fermi con los niveles de energía del modelo

$$E_F = \frac{v_f \hbar}{l_B} \sqrt{2(n_F + \zeta + 1) + \frac{l_B^2 \tau^2 e^2 V_0^2}{v_f^2 \hbar^2}} \quad (9)$$

De 9 se despeja n_F

$$n_F = \frac{l_B^2 E_F^2}{2v_f^2 \hbar^2} - \left(\zeta + 1 + \frac{l_B^2 \tau^2 e^2 V_0^2}{2v_f^2 \hbar^2} \right) \quad (10)$$

La ec. 8 enuncia que físicamente por cada nivel de energía se tienen dos electrones, como la sumatoria va hasta el nivel n_F se reduce el número de portadores de carga a la siguiente expresión

$$n_e = 2n_F = \frac{1}{\pi R^2} \left[\frac{l_B^2 E_F^2}{v_f^2 \hbar^2} - \left(2(\zeta + 1) + \frac{l_B^2 \tau^2 e^2 V_0^2}{v_f^2 \hbar^2} \right) \right] \quad (11)$$

Resistencia eléctrica de un punto cuántico de grafeno

La corriente eléctrica se puede expresar como la carga del electrón dividida entre el tiempo de tránsito a través del punto [18]

$$I = \frac{e}{t_{\text{trans}}} \quad (12)$$

Si se considera que los electrones de conducción del nanomaterial de punto cuántico de grafeno describen orbitas circulares debido a la influencia de un campo magnético fuerte y del acople spin orbita, es posible aproximar el comportamiento de los electrones de conducción del punto cuántico de grafeno sobre su borde, ver Fig. 2, por lo tanto, se propone en este trabajo modelar su comportamiento como un movimiento circular uniforme con una velocidad angular ω_c característica.

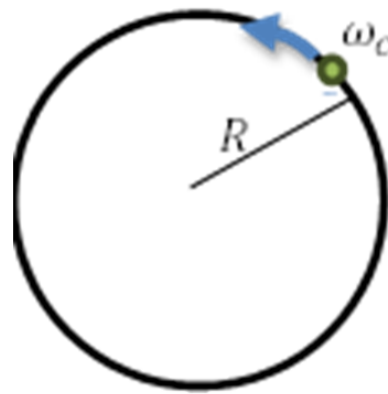


FIG. 2: Modelo del movimiento de los portadores de carga en orbitas circulares alrededor del borde del punto cuántico $r = R$

El tiempo que tarda la cuasi partícula en dar una vuelta completa es $t = 2\pi/\omega_c$ y por lo tanto la corriente eléctrica

es

$$I = \frac{\omega_c e}{2\pi} \quad (13)$$

Ahora la corriente total del sistema es la corriente por estado 13 multiplicada por el número de estados cuánticos permitidos en un ΔE . Considerando que la relación de dispersión del modelo es lineal en cercanía a los puntos de Dirac [10, 19-21], se puede hallar el ΔE

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial k} \Delta k = v_f \hbar \Delta k \quad (14)$$

Para determinar el número de estados Δk , primero es necesario determinar el número de longitudes de onda permitidas [22]. Considerando que las longitudes de onda recorren todo el perímetro de la circunferencia ($2\pi R$) con el nodo localizado en un punto arbitrario en el borde, se tiene que las longitudes de onda permitidas son $\lambda_N = 4\pi R/N$ y por tanto los números de onda permitidos son

$$k_N = \frac{N}{2R} \quad (15)$$

La diferencia entre dos niveles seguidos del número de onda es $k_2 - k_1 = 1/2R$, por lo que el número de estados Ω en un Δk es

$$\Omega_{\Delta k} = \frac{\Delta k}{\frac{1}{2R}} = 2R\Delta k \quad (16)$$

Ahora para determinar el número de estados cuánticos en un ΔE se despeja Δk de 14, se reemplaza en 16 y se multiplica el resultado por dos por la degeneración de spin [18]

$$\Omega_{\Delta E} = 2(2R\Delta k) = \frac{4R}{v_f \hbar} \Delta E \quad (17)$$

La corriente total es

$$I_{\text{total}} = \left(\frac{4R}{v_f \hbar} \Delta E \right) \frac{\omega_c e}{2\pi} = \frac{4R\omega_c e}{2\pi v_f \hbar} \Delta E \quad (18)$$

Por último, al someter el sistema a una diferencia de potencial de la forma $\Delta E = e\Delta V$

$$I_{\text{total}} = \frac{2R\omega_c e^2}{\pi v_f \hbar} \Delta V \quad (19)$$

Como $I = \Delta V / \text{Resistencia}$ y reemplazando la frecuencia ciclotrónica $\omega_c = \sqrt{2}v_f/l_B$ reportada en [2] se tiene que

$$\text{Resistencia} = \frac{\sqrt{2}\pi l_B \hbar}{4Re^2} \quad (20)$$

III. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se encontró que los portadores de carga de electrones/huecos para el punto cuántico de grafeno a $T \rightarrow 0$ presenta una relación cuadrática con la energía de Fermi, lo que coincide con lo reportado para el grafeno bidimensional [19, 20], con la diferencia que en 11 aparecen términos que dependen de parámetros propios del modelo como son la longitud magnética, el potencial constante V_0 , la relación de flujos ζ y el tamaño del punto R . Al analizar numérica-

mente la contribución de los términos del número de portadores de electrones/hueco 11 para valores de $\zeta = 1$, $B = 1 T$, $V_0 = 15 mV$ y $E_F = 4,5 eV$

$$\frac{l_B^2 E_F^2}{v_f^2 \hbar^2} = 3.08 \times 10^4; \quad 2(\zeta + 1) = 4; \quad \frac{l_B^2 \tau^2 e^2 V_0^2}{v_f^2 \hbar^2} = 0,34 \quad (21)$$

Se encontró que la contribución a $n_{e,h}$ de los términos $2(\zeta + 1)$ y $l_B^2 \tau^2 e^2 V_0^2 / v_f^2 \hbar^2$ comparada con la de $l_B^2 E_F^2 / v_f^2 \hbar^2$ es insignificante, por lo que es posible aproximar el número de portadores de carga de electrones/huecos a solo el primer término

$$n_e \approx \frac{l_B^2 E_F^2}{\pi R^2 v_f^2 \hbar^2} \quad (22)$$

La resistencia eléctrica se puede graficar en función del radio del punto para un intervalo de valores de $[1, 20] nm$ y un campo magnético de $10 T$.

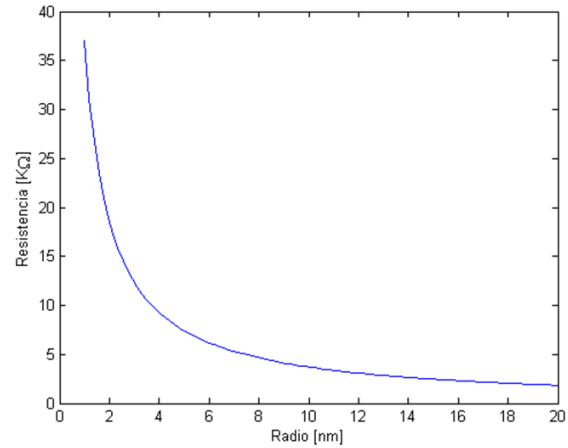


FIG. 3: Resistencia vs radio del punto cuántico de grafeno a un campo magnético de $10 T$

Se destaca de la Figura 3 la relación inversa con el radio del punto y que los valores que se obtienen de resistencia son del orden de $K\Omega$. Al comparar los resultados con la literatura se encontraron tres artículos experimentales que desarrollan la resistencia eléctrica para sistemas similares, de lo que se destaca: En [23] se realizaron dos muestras con formas diferentes de grafeno en línea recta y en forma serpenteante, y se reportó experimentalmente una resistencia de $4,5 K\Omega$ y $15 K\Omega$, respectivamente, mientras que en [24] y [25] se realizaron muestras de puntos cuánticos de grafeno en domos de óxido de silicio y grafeno decorado con cobalto para sensores de óxido de nitrógeno, con resistencias que van del orden de $1 K\Omega$ a $100 K\Omega$ y $1 K\Omega$ a $3,7 K\Omega$ para las muestras decoradas con cobalto a diferentes temperaturas y campos magnéticos. Los resultados del presente trabajo coinciden en orden de magnitud $K\Omega$ con lo reportado en la literatura y además corrobora la influencia del campo magnético en la resistencia del nanomaterial.

IV. CONCLUSIONES

El número de portadores de carga de electrones/huecos del punto cuántico de grafeno a un potencial V_0 depende de

los parámetros propios del modelo como la longitud magnética l_B , el radio del punto cuántico, y exhibe una relación cuadrática con E_F que coincide con la reportada para el grafeno a $T \rightarrow 0$. Mientras que la contribución de términos que contienen la relación de flujos ζ y el potencial constante V_0 es casi nula, por lo que es posible aproximar el número de portadores de carga a $n_{e,h} \approx l_B^2 E_F^2 / \pi R^2 v_f^2 \hbar^2$, así se concluye que $n_{e,h}$ se ve influenciado por los campos magnéticos y el tamaño del punto. Se encontró que la resistencia eléctrica del punto cuántico de grafeno depende de forma directa con la longitud magnética l_B y de forma inversa con el radio del punto R . Al considerar un campo magnético de 10 T y un tamaño de punto cuántico de 1 nm , 10 nm y de 20 nm , la resistencia eléctrica que se obtiene es

$$\begin{aligned} \text{Para } R = 1\text{ nm} &\rightarrow \text{Resistencia} = 37,03\text{ K}\Omega \\ \text{Para } R = 10\text{ nm} &\rightarrow \text{Resistencia} = 3,7\text{ K}\Omega \\ \text{Para } R = 20\text{ nm} &\rightarrow \text{Resistencia} = 1,85\text{ K}\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

Estos valores de resistencia eléctrica concuerdan en orden de magnitud con los reportados en la literatura para el grafeno en forma de línea recta ($4,5\text{ k}\Omega$), serpenteante ($15\text{ K}\Omega$) [23] y en muestras de puntos cuánticos de grafeno en domos de óxido de silicio que van de $1\text{ K}\Omega$ a $100\text{ K}\Omega$ [24] y el grafeno decorado con cobalto para sensores de óxido de nitrógeno que va de $1\text{ K}\Omega$ a $3,7\text{ K}\Omega$ [25]. Todos los resultados y análisis expuestos en este artículo constituyen parte parcial de lo realizado en la tesis doctoral [26] que actualmente se encuentra en revisión.

REFERENCIAS

- [1] E. Bulut Kul, M. Polat y A. D. Güçlü. Electronic and magnetic properties of graphene quantum dots with two charged vacancies. *Solid State Communications* **322**, 1-6 (2020).
- [2] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov y A. K. Geim. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics* **81**, 109-162 (2009).
- [3] M. Grujić, M. Zarenia, A. Chaves, M. Tadić, G. A. Farias y F. M. Peeters. Electronic and optical properties of a circular graphene quantum dot in a magnetic field: Influence of the boundary conditions. *Physical Review B* **84**, 205441 (2011).
- [4] G. Jian Ru. *Graphene Synthesis, Characterization, Properties and Application* (Published by Inc., 2011).
- [5] A. Mogulkoc, M. Modarresi, B. S. Kandemir, M. R. Roknabadi, N. Shahtahmasebi y M. Behdani. The role of electron-phonon interaction on the transport properties of graphene based nano-devices. *Physica B: Condensed Matter* **446**, 85-91 (2014).
- [6] Y. Cui, L. Liu, M. Shi, Y. Wang, X. Meng, Y. Chen, Q. Huang y C. Liu. A Review of Advances in Graphene Quantum Dots: From Preparation and Modification Methods to Application. *C – Journal of Carbon Research* **10** (2024).
- [7] S. Panda, K. Shalini Devi, S. Tsujimura, S. Kumar, J. Jakmunee y J. Prakash. Recent advances in graphene quantum dots: Chemistry of synthesis, surface modifications, and improved properties for biomedical applications. *TrAC Trends in Analytical Chemistry* **191** (2025).
- [8] A. A. Vargas Chávez. *Estructura supersimétrica de los estados de Landau en el grafeno*. Tesis de maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia. 2018.
- [9] J. Torres. *Tema 10: Estadística de Fermi-Dirac*. Repositorio Institucional de la Universidad de Granada. Granada.
- [10] D. Jena. *Quantum Physics of Semiconductor Materials and Devices* ISBN: 9780198856856. <https://global.oup.com/academic/product/quantum-physics-of-semiconductor-materials-and-devices-9780198856856> (Oxford University Press, 2022).
- [11] M. Abareghi y B. Sohrabi. Density functional theory insights into quantum capacitance modulation in graphene quantum dots by geometry, defects and doping. *Journal of Power Sources* **671** (2026).
- [12] A. M. Othman, M. A. Kher-Elden, F. Ibraheem, M. A. Hassan, M. Farouk y Z. M. Abd El-Fattah. Analogous electronic states in graphene and planer metallic quantum dots. *Scientific Reports* **14** (2024).
- [13] I. Ramli, N. Sani, Sukarti y Nurmallasari. Electronic Structure of Various Shapes of Graphene Quantum Dot. *Jurnal Sains dan Materi Indonesia* **27** (2025).
- [14] P. Tian, L. Tang, K. S. Teng y S. P. Lau. Graphene quantum dots: preparations, properties, functionalizations and applications. *Materials Futures* **3** (2024).
- [15] T. Pradeep. *Nanoscience and Nanotechnology* ISBN: 978-1-25-900732-3 (Tata McGraw-Hill, Nueva Delhi, India, 2012).
- [16] A. Aydin y A. Sisman. Discrete density of states. *Physics Letters A* **13** (2016).
- [17] J. Cruz Hoyos. *El efecto Aharonov-Bohm en materiales semiconductores de carácter topológico analizado desde la ecuación de Dirac-Weyl* Repositorio Universidad Nacional de Colombia. Manizales, 2020. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/79582>.
- [18] D. W. Snoke. *Interpreting Quantum Mechanics: Modern Foundations* ISBN: 9781009261555. <https://www.cambridge.org/core/books/interpreting-quantum-mechanics/5527B420647FB41AE0022745CA64D665> (Cambridge University Press, 2024).
- [19] D. Jena. en *Encyclopedia of Nanotechnology* Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame, 968-978 (Springer, 2012). ISBN: 978-90-481-9751-4.
- [20] M. Massicotte, G. Soavi, A. Principi y K. Tielrooij. Hot carriers in graphene – fundamentals and applications. *Nanoscale* **13** (2021).
- [21] M. Toriyama, A. Ganose, M. Dylla, S. Anand, J. Park, M. Brod, J. Munro, K. A. Persson, A. Jain y J. Snyder. How to analyse a density of states. *Materials Today Electronics* **1** (2022).
- [22] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics* Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. ISBN: 0-13-124405-1 (Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1995).
- [23] K. Singh, S. Sharma, B. Singh, M. Gupta y C. Tripathi. Fabrication of graphene, graphite and multi wall carbon nano tube based thin films and their potential application as strain sensor. *Thin Solid Films* **761** (2022).

- [24] J. Lee, M. Park, Y. Song, D. Cho, K. Lee, Y. Shim y S. Jeon. Role of graphene quantum dots with discrete band gaps on SnO₂ nanodomes for NO₂ gas sensors with an ultralow detection limit. *Nanoscale Advances* **5**, 2767-2775 (2023).
- [25] A. Fedotov, S. Prischepa, J. Fedotova, V. Bayev, A. Ronassi, I. Komissarov, N. Kovalchuk, S. Vorobyova y O. Ivashkevich. Electrical conductivity and magnetoresistance in twisted graphene electrochemically decorated with Co particles. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* **117** (2020).
- [26] J. S. Cruz Hoyos. *Estudio teórico de las propiedades de transporte asociadas a un punto cuántico de grafeno* Tesis doct. (Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, 2025). <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/90517>.