

VACIADO POR GRAVEDAD DE UN TANQUE ESFEROIDAL ABIERTO GRAVITY DRAINAGE OF AN OPEN SPHEROIDAL TANK

Y. Montilla^{*1}, F. Suárez², U. Durán³ y B. Linares³

¹Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Técnica Estatal de Quevedo, 120550 Quevedo, Ecuador.

²Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Universidad de las Américas, 170311 Quito, Ecuador.

³Facultad de Posgrado, Universidad Técnica de Manabí, 130105 Portoviejo, Ecuador.

Recibido: 06/04/2025 ; Aceptado: 12/05/2026

En este trabajo se simula el vaciado por gravedad de un tanque esferoidal abierto. Se introduce un parámetro adimensional λ que altera la geometría del tanque, pero no su volumen, generando variantes esferoidales prolata, esférica y oblata. Las aberturas del tanque resultan de cortar su superficie con dos planos simétricos, próximos a los extremos, sin afectar significativamente su capacidad. A partir de los principios de la hidrodinámica, se desarrollan dos modelos: uno numérico general y otro analítico aproximado basado en el teorema de Torricelli para el análisis del proceso de vaciado en función de la geometría y el tiempo. Ambos modelos se implementan mediante un código en Python 3.13. Los resultados muestran una excelente concordancia entre ambos enfoques para un rango específico de λ , aunque el modelo analítico pierde validez cerca de un umbral crítico. Bajo condiciones de igualdad entre volumen y abertura de descarga, el tanque prolato se vacía más rápido a pesar de un mayor nivel inicial de fluido, mientras que el oblato, con menor altura inicial, presenta un vaciado más lento. Estos resultados pueden ser de particular interés en ingeniería hidráulica y de procesos para el control de almacenamiento y distribución de líquidos. La implementación en Python 3.13 ofrece un recurso didáctico de libre acceso, completamente reproducible y aplicable en un aula.

Palabras Clave: tanque esferoidal, vaciado por gravedad, teorema de Torricelli, simulación en Python.

This study simulates the gravity-driven drainage of an open spheroidal tank. A dimensionless parameter λ is introduced that alters the geometry of the tank but not its volume, generating prolate, spherical, and oblate spheroidal variants. The openings in the tank are obtained by cutting its surface with two symmetrical planes, close to the ends, without significantly affecting its capacity. Based on the principles of hydrodynamics, two models are developed: a general numerical model and an approximate analytical model based on Torricelli's theorem for analyzing the drainage process as a function of geometry and time. Both models are implemented using Python 3.13 code. The results show excellent agreement between the two approaches for a specific range of λ , although the analytical model loses validity near a critical threshold. Under conditions of equal volume and discharge opening, the prolate tank drains faster despite a higher initial fluid level, while the oblate tank, with a lower initial height, drains more slowly. These results may be of particular interest in hydraulic and process engineering for the control of liquid storage and distribution. The implementation in Python 3.13 provides an open-access, fully reproducible, and classroom-applicable educational resource.

Keywords: spheroidal tank; gravity drainage; Torricelli's theorem; Python simulation.

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2026.37.2.37-44>



ISSN - 1850-1168 (online)

I. INTRODUCCIÓN

Un tanque abierto es un depósito de gran tamaño, comúnmente utilizado para almacenar líquidos, cuya parte superior tiene una entrada abierta a la atmósfera [1]. Su capacidad de almacenamiento y distribución de líquidos los hace indispensables en la industria, el transporte e incluso en los hogares.

En hidrodinámica, el vaciado por gravedad de un tanque abierto consiste en el aprovechamiento de la energía potencial gravitatoria para movilizar el fluido hacia el exterior, sin necesidad de mecanismos de bombeo [2]. La geometría del tanque desempeña un papel crucial en este proceso, ya que influye directamente en la variación del caudal a lo largo del tiempo. Por esta razón, el análisis riguroso del vaciado requiere la aplicación de principios físicos fundamentales, conceptos energéticos y herramientas matemáticas que permitan modelar con precisión el comportamiento del flujo.

Trabajos recientes se han enfocado en la optimización del vaciado por gravedad en tanques, especialmente en aplicaciones agrícolas donde la sedimentación y distribución del fluido dependen del diseño eficiente del sistema [3]. En particular, se ha evaluado el rendimiento de tanques de sedimentación inclinados, evidenciando cómo la geometría y la pendiente influyen directamente en la eficiencia de descarga. Por otro lado, Tetyuev y Silaev [4] analizaron el comportamiento del fluido en las proximidades del orificio de vaciado en configuraciones con flujos bifásicos, identificando patrones de inestabilidad asociados a geometrías curvas. Estos estudios resaltan la importancia de considerar las propiedades geométricas del recipiente para predecir con precisión la dinámica de vaciado.

Tradicionalmente, el vaciado de tanques abiertos se ha abordado considerando geometrías simples como cilíndricas y cúbicas, que tienen la particularidad de presentar un área transversal constante [1, 2, 5-7]. También se han ana-

* ymontilla@uteq.edu.ec

lizado geometrías más complejas como conos y esferas, caracterizadas por tener secciones transversales variables [5, 8-10]. En estos escenarios, se han obtenido soluciones exactas para el tiempo de vaciado y para la evolución del nivel del fluido en función del tiempo, bajo condiciones estacionarias utilizando el teorema de Torricelli. En cada una de las geometrías mencionadas, los parámetros como el radio o la altura modifican las dimensiones del tanque, mas no su forma geométrica. Este hecho constituye la motivación del presente trabajo: estudiar un modelo en el cual se mantiene constante el volumen del tanque, pero se altera su geometría mediante un parámetro que modifica su forma sin cambiar su capacidad.

En particular, se aborda el vaciado de un tanque esferoidal abierto, una geometría derivada de una elipse de revolución [11]. Se introduce un parámetro geométrico adimensional λ que modifica la forma del esferoide sin alterar su volumen, pudiendo adoptar formas prolata, esférica u oblata [12]. La abertura superior y el orificio de descarga resultan de cortar al esferoide con dos planos simétricos, próximos a los extremos, de modo que la fracción de volumen excluido sea despreciable.

Utilizando la ecuación de caudal, la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad, se deduce un modelo general y un modelo aproximado basado en el teorema de Torricelli. Dado que el modelo general no es trivial, se aborda mediante técnicas numéricas, mientras que el modelo aproximado, por tener una estructura más simple, se resuelve por métodos analíticos. Para simular el proceso de vaciado de ambos modelos se implementa un código en Python 3.13.

Los resultados muestran una gran concordancia entre ambos modelos para un determinado rango de valores de λ . Sin embargo, para valores de λ próximos a un umbral crítico, el modelo analítico pierde validez. Por otro lado, se concluye que, bajo condiciones de igualdad de volumen y tamaño de orificios, en una hipotética carrera de vaciado, el tanque prolato se vaciaría primero, a pesar de tener un nivel inicial de fluido mayor que los tanques esférico y oblato. En cambio, el tanque oblato, que comienza con un nivel menor de líquido, sería el último en vaciarse.

La simulación presentada constituye una herramienta didáctica que puede integrarse directamente en el aula gracias a la accesibilidad que ofrece Python 3.13. El abordaje del diseño de un sistema en ingeniería, como el de un tanque abierto, involucra modelado matemático, aplicación de principios físicos e implementación de métodos numéricos con herramientas computacionales. Este tipo de caso estimula en los estudiantes el desarrollo de habilidades para resolver problemas que todo ingeniero o científico en formación debe cultivar. En cuanto a aplicaciones, los resultados pueden tener implicaciones en ingeniería hidráulica y de procesos para el control de almacenamiento y distribución de líquidos.

II. TANQUE ESFEROIDAL ABIERTO

Un esferoide es una superficie generada al rotar una elipse, con semiejes a y b , alrededor de uno de sus ejes de simetría [13, 14]. En este contexto, se ha considerado un tanque de geometría esferoidal de altura $2b$ y ancho máximo $2a$,

centrado en el punto $(0,0,b)$, tal y como se ilustra en la Fig. 1. La superficie del tanque está definida por la Ec. (1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{(z-b)^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

y su volumen por la Ec. (2):

$$V = \frac{4}{3}\pi ba^2. \quad (2)$$

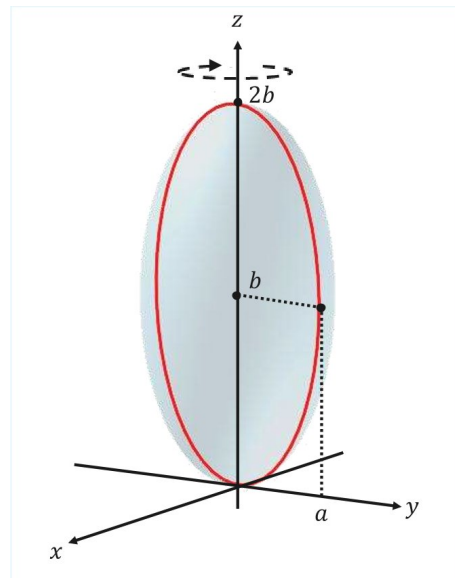


FIG. 1: Esferoide generado por la revolución de una elipse.

La geometría del tanque y su volumen dependen directamente de los valores de a y b . Supóngase ahora que el semieje horizontal puede expresarse como $a = \lambda b$, donde λ es un parámetro adimensional, y que el volumen del tanque se mantiene constante. Para simplificar el análisis, se impone la condición en unidades de longitud L :

$$a^2 b = \frac{3V}{4\pi} = 1 L^3.$$

Bajo esta restricción, se satisfacen las siguientes relaciones:

$$a = \lambda^{1/3} L; \quad b = \lambda^{-2/3} L. \quad (3)$$

Sustituyendo la Ec. (3) en la Ec. (1), se obtiene una forma generalizada de la superficie del tanque:

$$\frac{x^2}{\lambda^{2/3}} + \frac{y^2}{\lambda^{2/3}} + \frac{(z - \lambda^{-2/3})^2}{\lambda^{-4/3}} = 1. \quad (4)$$

Esta ecuación representa una familia de esferoides de volumen constante, cuya geometría relativa está determinada por el valor de λ [12]:

- Si $\lambda < 1$, el esferoide es *prolato* (más alargado en el eje vertical).
- Si $\lambda > 1$, el esferoide es *oblato* (más alargado en el eje horizontal).
- Si $\lambda = 1$, se obtiene una esfera perfecta.

La Fig. 2 muestra representaciones gráficas de tanques esferoidales para $\lambda = 0.5$, 1.0 y 1.5 , generadas con el software Python 3.13, de acuerdo con la Ec. (4).

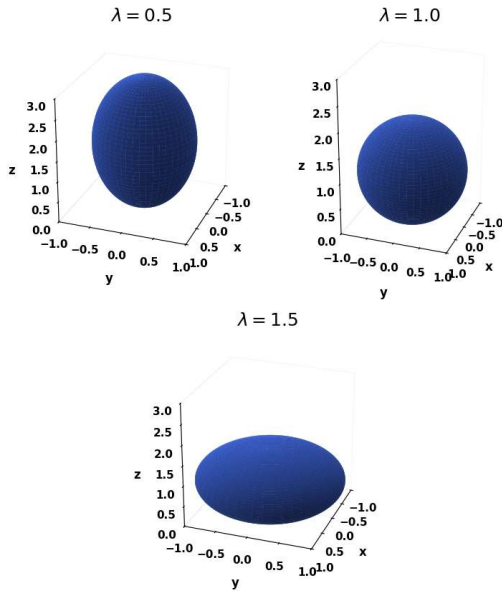


FIG. 2: Tanques esferoidales: prolato ($\lambda = 0.5$), esférico ($\lambda = 1.0$) y oblato ($\lambda = 1.5$).

Cada uno de los tanques presentados corresponde a un casquete cerrado. La Fig. 3 ilustra cómo, al cortar el esferoide con dos planos simétricos perpendiculares al eje z , se obtiene un tanque abierto con dos orificios circulares de diámetro φ en sus extremos verticales. La apertura se genera al remover las tapas superior e inferior del sólido hueco.

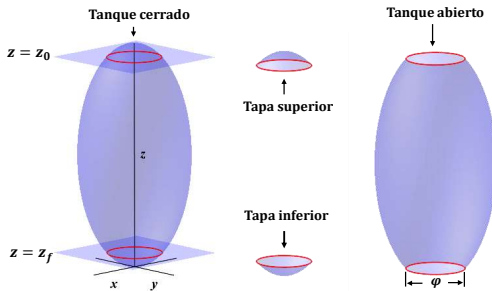


FIG. 3: Diseño de un tanque esferoidal abierto de diámetro φ .

La ubicación de los planos de corte que generan orificios circulares de diámetro φ se determina evaluando la Ec. (4) en el punto $(0, \frac{\varphi}{2}, z)$:

$$\frac{1}{\lambda^{2/3}} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \frac{(z - \lambda^{-2/3})^2}{\lambda^{-4/3}} = 1.$$

Resolviendo para z , se obtiene:

$$z = \lambda^{-2/3} \pm \frac{\sqrt{4\lambda^{2/3} - \varphi^2}}{2\lambda}. \quad (5)$$

La fracción $F(z)$ del volumen excluido se obtiene mediante el método de los discos alrededor del eje z [13, 14]:

$$F(z) = \frac{2\pi \int_0^{z_f} [R(z)]^2 dz}{\pi \int_0^{2\lambda^{-2/3}} [R(z)]^2 dz}, \quad (6)$$

donde z_f es la posición del plano inferior dada por la segunda solución de la Ec. (5). La integral en el numerador representa el volumen de las tapas, mientras que el denominador representa el volumen total del esferoide cerrado. El término $[R(z)]^2$ es el cuadrado del radio de giro de la sección transversal del tanque, dado por:

$$[R(z)]^2 = \lambda^{2/3} \left[1 - \left(\frac{z - \lambda^{-2/3}}{\lambda^{-4/3}} \right)^2 \right], \quad (7)$$

obtenido al despejar $y = R(z)$ en la Ec. (4), evaluada en el punto $(0, y, z)$. Al integrar la Ec. (6), se obtiene:

$$F(z) = \frac{3\lambda^{4/3}}{2} \left(\frac{1}{\lambda^{2/3}} - \frac{1}{2\lambda} \sqrt{4\lambda^{2/3} - \varphi^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda^{2/3}} - \frac{1}{2\lambda} \sqrt{4\lambda^{2/3} - \varphi^2} \right)^3. \quad (8)$$

Obsérvese que el valor de φ debe satisfacer la condición $\varphi < 2\lambda^{1/3} = 2a$, esto es, el valor elegido de φ debe ser menor que el ancho máximo del tanque. Cuando la razón $\varphi/2\lambda^{1/3} \ll 1$, los planos de corte se ubican muy cerca de los extremos del esferoide y la fracción de volumen excluido es despreciable.

Por ejemplo, en unidades del sistema internacional, cada tanque de la Fig. 2 tendría una capacidad de $(4/3)\pi \text{ m}^3 \approx 4189 \text{ L}$. Si se perfora un agujero de $5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$ (2 in) en cada uno, de la Ec. (8) se obtiene que la fracción de volumen excluida es aproximadamente:

- Para $\lambda = 0.5$, tanque prolato: $3.69 \times 10^{-5} \%$.
- Para $\lambda = 1.0$, tanque esférico: $1.47 \times 10^{-5} \%$.
- Para $\lambda = 1.5$, tanque oblato: $8.53 \times 10^{-6} \%$.

Estas fracciones de volumen son muy pequeñas y no representan una pérdida significativa en la capacidad del tanque. Por lo tanto, si $\varphi/2\lambda^{1/3} \ll 1$, se obtiene una familia de tanques esferoidales abiertos de igual volumen y con orificios del mismo tamaño. En efecto, el parámetro geométrico que controla el diseño del tanque abierto es λ .

III. HIDRODINÁMICA EN EL DRENADO DE UN TANQUE ESFEROIDAL ABIERTO

En este trabajo se estudia la hidrodinámica del vaciado del tanque esferoidal abierto descrito anteriormente. La Fig. 4 ilustra el sistema de interés: un tanque esferoidal centrado en el eje vertical, parcialmente lleno de fluido.

El orificio superior está acoplado a una válvula de venteo que permite que la superficie libre del fluido, representada por el punto 1, permanezca expuesta a la presión atmosférica. El orificio inferior se encuentra afilado en su borde y expuesto a la presión atmosférica en el punto 2; a través de él se produce la descarga del fluido hacia el exterior.

Durante el proceso de drenado, se asumen los siguientes supuestos físicos:

- El fluido es newtoniano, incompresible y presenta flujo laminar en el interior del tanque.

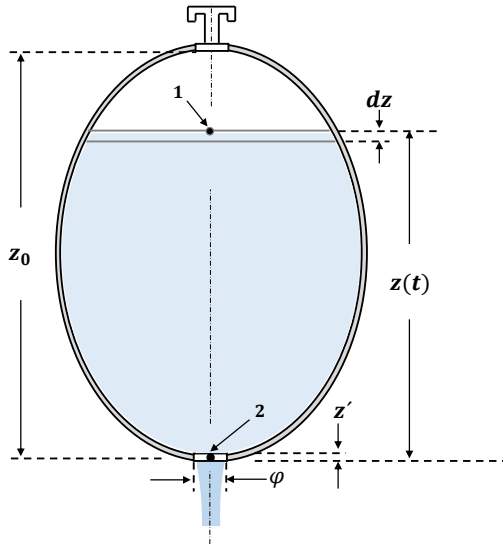


FIG. 4: Geometría del drenado de un tanque esférico.

- El flujo está impulsado únicamente por la energía potencial gravitatoria; no existen dispositivos mecánicos que añadan o extraigan energía del sistema.
- No se considera transferencia de calor con el entorno.
- Se desprecia la fricción tanto en las paredes como en el orificio de salida del tanque.
- Se incluye el efecto de vena contracta, un fenómeno que se produce justo fuera del orificio de salida debido a la incapacidad del fluido para girar abruptamente al atravesarlo [2], considerando un coeficiente corrector k propio de orificios circulares de borde afilado [1].

Inicialmente, en el instante $t = 0$, el tanque está completamente lleno y el orificio se encuentra sellado con un tapón. Para $t > 0$, al retirar el tapón, el fluido comienza a drenarse, lo cual genera una disminución progresiva del nivel de líquido.

Sea $V(t)$ el volumen del fluido en el tanque en el instante t . La variación de volumen está gobernada por la ecuación del caudal [1, 15]:

$$\frac{dV}{dt} = -A_2 v_2, \quad (9)$$

donde A_2 es el área del orificio de salida (m^2) y v_2 la velocidad del chorro al salir del tanque (m/s). El signo negativo indica que el volumen disminuye con el tiempo.

Se define como variable de estudio el nivel del fluido $z(t)$, medido desde la base del tanque hasta la superficie libre. Bajo los supuestos físicos considerados anteriormente, es posible aplicar la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (10)$$

y la ecuación de continuidad:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2. \quad (11)$$

Como los puntos 1 y 2 están expuestos a la atmósfera, las cargas de presión P/γ se cancelan. Se toma $z_2 = 0$ como nivel de referencia y $z_1 = z(t)$ como el nivel del fluido. El área de la superficie libre A_1 , dependiente de z , es mayor o igual que el área del orificio A_2 , por lo que se cumple que $v_1 \leq v_2$.

Al resolver las Ecs. (10) y (11) para v_2 , se obtiene la velocidad del chorro:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gz}{1 - (A_2/A_1)^2}}. \quad (12)$$

Por otra parte, el volumen diferencial dV se expresa como el producto del área transversal $A_1(z)$ por un elemento de altura dz :

$$dV = A_1(z) dz. \quad (13)$$

Aplicando la regla de la cadena $dV/dt = (dV/dz)(dz/dt)$ y sustituyendo las Ecs. (12) y (13) en (9), se obtiene:

$$\frac{dz}{dt} = -\beta(z) \sqrt{\frac{2gz}{1 - [\beta(z)]^2}}, \quad (14)$$

donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad y $\beta(z) = A_2/A_1$ representa la razón entre el área del orificio de salida y el área de la superficie libre.

Para determinar la dependencia de β con la altura, se aprovecha la simetría circular del tanque. La sección transversal a una altura z forma discos de radio variable $a'(z)$. Al evaluar la Ec. (4) en el punto $(a', 0, z)$, se obtiene:

$$\frac{a'^2}{\lambda^{2/3}} + \frac{(z - \lambda^{-2/3})^2}{\lambda^{-4/3}} = 1.$$

Resolviendo para a'^2 y multiplicando por π , se obtiene el área transversal:

$$\pi a'^2 = \pi \lambda^{2/3} \left[1 - \left(\frac{z - \lambda^{-2/3}}{\lambda^{-4/3}} \right)^2 \right], \quad (15)$$

que al simplificar conduce a:

$$A_1(z) = 2\pi z \lambda^{4/3} - \pi z^2 \lambda^2. \quad (16)$$

Por su parte, el área efectiva de descarga del orificio circular de salida está dada por:

$$A_2 = \frac{1}{4} k \pi \phi^2 \quad (17)$$

siendo ϕ el diámetro del orificio (m) y $k = 0.6$ el coeficiente de descarga típico para orificios circulares de borde afilado [16]. Dicho coeficiente incorpora, de forma aproximada, el efecto de la contracción del chorro o vena contracta, así como pérdidas locales asociadas a la salida del fluido [17]. Al despreciar la fricción en el drenado, k refleja principalmente el efecto geométrico de la vena contracta. En consecuencia, el área efectiva de descarga resulta menor que el área geométrica del orificio, lo cual aproxima mejor el comportamiento físico del vaciado.

Al dividir las expresiones (16) y (17), se obtiene la razón

de áreas:

$$\beta(z) = \frac{k\varphi^2}{4z(2\lambda^{4/3} - z\lambda^2)}. \quad (18)$$

Dado que la Ec. (5) proporciona las alturas en las cuales el área de la sección transversal del fluido coincide con el área de los orificios circulares, se identifican estos niveles como el nivel inicial y final del fluido durante el proceso de vaciado.

Separando variables en la Ec. (14), y tomando como límites de integración para z las alturas proporcionadas por la Ec. (5), se obtiene el tiempo total de vaciado t_v :

$$t_v = \int_{z_f}^{z_0} \frac{1}{\beta(z)} \sqrt{\frac{1 - [\beta(z)]^2}{2gz}} dz. \quad (19)$$

Una vez obtenido t_v , se plantea el siguiente problema de valor inicial para describir la evolución del nivel del fluido durante el vaciado:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\beta(z) \sqrt{\frac{2gz}{1 - [\beta(z)]^2}}, \\ z(0) &= \lambda^{-2/3} + \frac{\sqrt{4\lambda^{2/3} - \varphi^2}}{2\lambda}, \quad t \in [0, t_v]. \end{aligned} \quad (20)$$

Tanto esta ecuación como la integral definida en la Ec. (19) no admiten solución analítica exacta. Por lo tanto, su resolución debe abordarse de forma numérica para valores dados de λ y φ .

De esta manera, el modelo permite analizar el efecto del parámetro geométrico λ sobre la geometría del sistema y su comportamiento hidrodinámico, en una familia de tanques esferoidales abiertos de igual volumen y con orificios circulares simétricos en sus extremos.

IV. UNA SOLUCIÓN ANALÍTICA APROXIMADA: TEOREMA DE TORRICELLI

La complejidad analítica del modelo descrito en la sección anterior radica en la presencia del término $1 - \beta^2$ en el radical de las Ecs. (19) y (20). Este término introduce una dependencia no lineal respecto a la altura z , a través de la función $\beta(z)$ definida en la Ec. (18).

Excepto en los extremos del tanque, a lo largo de casi todo el dominio de z , se cumple que $\beta < 1$, ya que el área de la superficie libre es mayor que la del orificio de salida. Como el término β^2 involucra el cuadrado de una cantidad pequeña, su valor resulta aún menor. En efecto, para valores pequeños de β , el término $1 - \beta^2 \approx 1$, con lo cual la ecuación diferencial (14) se simplifica como:

$$\frac{dz}{dt} = -\beta(z) \sqrt{2gz}. \quad (21)$$

En esta ecuación, $\sqrt{2gz}$ es la velocidad del chorro, equivalente a la que adquiriría un cuerpo en caída libre desde una altura z . Esta expresión, conocida en la literatura como el *teorema de Torricelli* [10, 15, 18, 19], es ampliamente utilizada para modelar el vaciado de tanques abiertos a la atmósfera cuando la razón de áreas es muy pequeña [18].

La validez de esta aproximación está condicionada por la

geometría del sistema: un orificio de salida pequeño, caracterizado por un diámetro φ reducido, y un tanque suficientemente ancho, determinado por el parámetro λ , de modo que se garantice que $\beta(z) \ll 1$ a lo largo del drenado. Desde el punto de vista físico, esta condición equivale a exigir que el área del orificio de descarga sea mucho menor que el área transversal del tanque, es decir, $A_2 \ll A_1(z)$, o equivalentemente $\beta(z) = A_2/A_1(z) \ll 1$. Bajo este régimen, la velocidad de descenso de la superficie libre es despreciable frente a la velocidad de salida del chorro, por lo que el término β^2 puede omitirse sin introducir errores significativos. Por esta razón, la aproximación de Torricelli resulta adecuada para orificios pequeños y para regiones del drenado en las que la sección transversal del tanque permanece considerablemente mayor que la abertura de descarga.

En cuanto a la condición inicial, debido a la proximidad de los orificios a los extremos del eje vertical del tanque, el nivel inicial del fluido puede aproximarse a la altura total del esferoide sin perforaciones, es decir, $2b = 2\lambda^{-2/3}$, de acuerdo con la geometría mostrada en la Fig. 1. Al fijar esta condición en la Ec. (22), se obtiene el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dz}{dt} = -\beta(z) \sqrt{2gz}, \quad z(0) = 2\lambda^{-2/3}. \quad (22)$$

Al sustituir $\beta(z)$ dada por la Ec. (18) en el problema de valor inicial (22), se obtiene una ecuación diferencial separable e integrable. Su solución particular conduce a la siguiente expresión implícita que describe el nivel del fluido z como función del tiempo t :

$$(10\lambda^{-2/3} - 3z)\sqrt{z^3} = 8\sqrt{2}\lambda^{-5/3} - \frac{15}{8} \frac{k\varphi^2}{\lambda^2} \sqrt{2gt}. \quad (23)$$

Evaluando esta ecuación en $z = 0$ y resolviendo para t , se obtiene el tiempo de vaciado del tanque:

$$t_v = \frac{64\lambda^{1/3}}{15k\varphi^2\sqrt{g}}. \quad (24)$$

Esta expresión muestra que el tiempo de vaciado es directamente proporcional a $\lambda^{1/3}$ e inversamente proporcional al cuadrado del diámetro del orificio φ . En consecuencia, un tanque más ancho drena más lento y un orificio más grande acelera el vaciado.

A continuación, se comparan los resultados obtenidos con el modelo analítico aproximado y los del modelo numérico general.

V. RESULTADOS

Se implementó un código en Python 3.13 para llevar a cabo el análisis numérico y analítico del vaciado del tanque esferoidal abierto con capacidad de $(4/3)\pi \text{ m}^3 \approx 4189 \text{ L}$. La Fig. 5 muestra el código utilizado para simular el proceso considerando un orificio de descarga de diámetro $\varphi = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$ (aproximadamente 2 in.), una aceleración gravitacional $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ y un coeficiente de descarga $k = 0.6$.

La Tabla 1 presenta los resultados del tiempo de vaciado obtenido para los tres tipos de tanques esferoidales representados en la Fig. 2, tanto con el modelo numérico como

```

Código de Ejecución en Python 3.13
import numpy as np
from scipy.integrate import quad, solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

# 1. Parámetros
phi, g, k, lam = 0.05, 9.8, 0.6, 1.5

# 2. Límites de integración
z0 = lam**(-2/3) + np.sqrt(4*lam**(2/3) - phi**2)/(2*lam)
zf = lam**(-2/3) - np.sqrt(4*lam**(2/3) - phi**2)/(2*lam)

# 3. Razón de áreas
def beta(z):
    return (k*phi**2)/(4*z*(2*lam**(4/3) - z*lam**2))

# 4. Tiempo de vaciado (numérico)
def integrand(z):
    b = beta(z)
    return 0 if b <= 0 or b >= 1 else (1/b)*np.sqrt((1-b**2)/(2*g*z))
t_v_num, _ = quad(integrand, zf, z0, limit=200)

# 5. Nivel de fluido z(t)
def dz_dt(t, z):
    b = beta(z[0])
    return [0] if b <= 0 or b >= 1 else [-b*np.sqrt((2*g*z[0])/(1-b**2))]
sol = solve_ivp(dz_dt, [0, t_v_num], [z0], method='RK45',
max_step=t_v_num/1000)

# 6. Solución analítica (Torricelli)
t_v_ana = (64*lam**(1/3))/(15*k*phi**2*np.sqrt(g))
T, Z = np.meshgrid(np.linspace(0, t_v_ana, 300), np.linspace(0,
2*lam**(-2/3), 300))
F = (10*lam**(-2/3) - 3*Z)*np.sqrt(Z**3) - (8*np.sqrt(2)*lam**(-
5/3) - (15/8)*(k*phi**2/lam**2)*np.sqrt(2*g)*T)

# 7. Gráfica combinada
plt.figure(figsize=(7,5))
plt.contour(T, Z, F, levels=[0], colors='r', linewidths=3)
plt.plot(sol.t[:40], sol.y[0][:40], 'o', color='k', markersize=4)
plt.xlabel("Tiempo (s)", fontsize=11, fontweight='bold')
plt.ylabel("Nivel de fluido z(t) (m)", fontsize=11, fontweight='bold')
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)
plt.legend([plt.Line2D([], [], color='k', marker='o', lw=0,
markersize=6), plt.Line2D([], [], color='r', lw=3)], ["Numérica
t_v={t_v_num:.3f} s", "Analítica (Torricelli) t_v={t_v_ana:.3f} s"],
loc="best", fontsize=9)
plt.tight_layout()
plt.show()

input("\nPresiona Enter para salir...")

```

FIG. 5: Código implementado en Python 3.13 para el análisis numérico y analítico del vaciado del tanque esférico abierto. En el código, las variables griegas se representan como λ (λ), β (β) y ϕ (ϕ).

con la solución analítica aproximada basada en el teorema de Torricelli.

Los resultados de la Tabla 1 muestran una excelente concordancia entre los tiempos de vaciado obtenidos mediante el modelo numérico (Ec. 19) y la solución analítica aproximada basada en el teorema de Torricelli (Ec. 24). Las diferencias son del orden de milisegundos, lo cual confirma la validez y precisión de la aproximación en el rango de parámetros considerados.

En cuanto al efecto del parámetro geométrico λ , se observa que el tiempo de vaciado aumenta con el valor de λ . Este comportamiento es coherente con la expresión analítica, donde $t_v \propto \lambda^{1/3}$. En términos geométricos, esto significa que un tanque más ancho (oblato) presenta un vaciado más lento, mientras que un tanque más alargado en el eje vertical (prolato) vacía más rápidamente, bajo condiciones de volumen y orificio constantes.

Desde un enfoque intuitivo, si se iniciara una carrera de

TABLA 1: Tiempo de vaciado de tanques esféricos con capacidad de 4189 L y orificio de descarga de 0.05 m de diámetro.

Tanque	λ	t_v (s) Numérico	t_v (s) Analítico
Prolato	0.50	721.164	721.176
Esférico	1.00	908.617	908.624
Oblato	1.50	1040.110	1040.115

vaciado tomando como instante inicial $t = 0$, el tanque prolato ganaría la carrera, a pesar de tener un nivel inicial de fluido mayor. El tanque esférico terminaría en segundo lugar y el tanque oblato finalizaría de último, a pesar de tener el menor nivel inicial de fluido. A primera vista, podría parecer que los tanques oblato y esférico tienen ventaja por comenzar con una menor altura de fluido; sin embargo, su mayor ancho implica una mayor sección transversal, lo que reduce la velocidad del vaciado y los coloca en desventaja frente al tanque prolato.

La Fig. 6 confirma visualmente estos resultados. Las curvas que representan la evolución del nivel del fluido en el tiempo para ambos modelos se superponen prácticamente por completo en los tres casos, reforzando la consistencia entre el modelo numérico y la aproximación de Torricelli, incluso cerca de los extremos del tanque, donde la razón de áreas varía más significativamente.

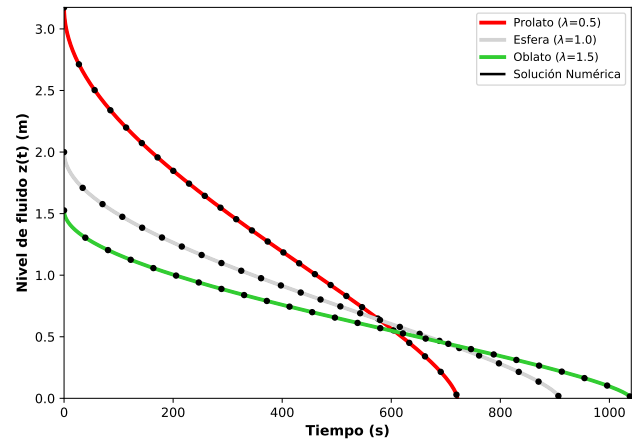


FIG. 6: Nivel de fluido en función del tiempo para tanques esféricos de capacidad de 4189 L y orificio circular de diámetro 0.05 m.

Para fines de comparación entre los modelos numérico y analítico, se ha considerado que la razón $\phi/2\lambda^{1/3} \ll 1$ garantiza igualdad de volumen y tamaño del orificio entre los tanques durante el proceso de vaciado, mientras que la condición $\beta < 1$ asegura la validez de la aproximación basada en Torricelli. Sin embargo, resulta importante reflexionar bajo qué valores de λ estas condiciones se ven comprometidas y cuál modelo resulta más adecuado en cada caso.

Fijado un diámetro pequeño, si λ disminuye significativamente, los valores de z_0 y z_f se incrementan, provocando una exclusión de volumen cada vez mayor, lo cual rompe la condición de volumen constante entre los tanques. En el caso límite, cuando $\lambda = \phi^3/8$ [L^{-3}], el radical de la Ec. (5) se anula y la posición de los planos coincide con el centro del tanque ($z_0 = z_f = \lambda^{-2/3}$). En este escenario extremo,

el orificio cortarí­a exactamente a la mitad del esferoide, resultando imposible colocar los agujeros en el tanque. Para valores de λ ligeramente superiores a este umbral, el tanque se comporta como un prolato extremo: muy estrecho y alargado, con una razón de áreas β cercana a la unidad que limita la aplicabilidad del modelo analítico por Torricelli.

Este comportamiento puede observarse en la Fig. 7, que muestra la evolución del nivel de fluido en función del tiempo para $\lambda = \varphi^3/4 \text{ m}^{-3}$ con $\varphi = 0.05 \text{ m}$. En este escenario, las curvas ya no se superponen: la solución numérica mantiene el perfil observado en la Fig. 6, mientras que la curva analítica presenta una desviación significativa, especialmente hacia los extremos. Para fines comparativos, la solución analítica se deriva de la ecuación diferencial (21) con la condición inicial dada por la Ec. (5), implementada en Python 3.13.

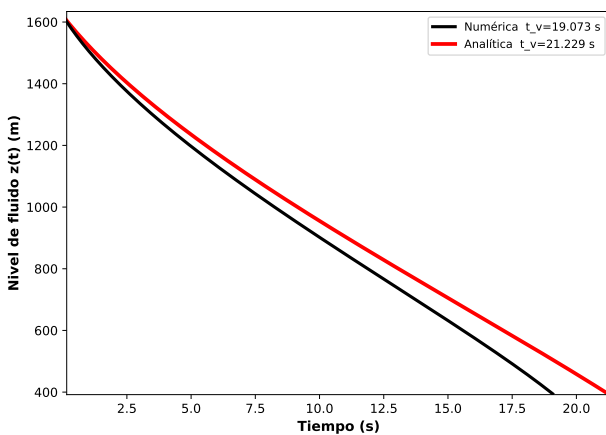


FIG. 7: Nivel de fluido en función del tiempo: comparación de modelos numérico y analítico para $\lambda = \varphi^3/4 \text{ m}^{-3}$ con $\varphi = 0.05 \text{ m}$.

Por el contrario, al aumentar λ considerablemente más allá del valor crítico, el volumen excluido al remover las tapas tiende a cero, dado que la forma del tanque se aplatina en los extremos, incrementando su ancho. En estos casos, la razón $\beta \ll 1$ y el modelo analítico basado en Torricelli ofrece resultados muy precisos. Esta situación es especialmente favorable en tanques esféricos, oblatos, oblatos extremos e inclusive prolatos con λ cercanos a la unidad.

Finalmente, cabe resaltar que la hipótesis de flujo laminar en el interior del tanque puede evaluarse mediante el número de Reynolds, parámetro adimensional asociado al movimiento del fluido y a sus propiedades físicas como la viscosidad. En principio, este criterio permitiría establecer un límite para la velocidad característica máxima del fluido y, por tanto, para las dimensiones del tanque en las cuales las ecuaciones obtenidas conservan su aplicabilidad física. Sin embargo, dado que el modelo adoptado corresponde a una idealización hidrodinámica basada en la ecuación de Bernoulli y el teorema de Torricelli, las pérdidas por fricción no se incorporan explícitamente. En este marco, las propiedades físicas del fluido, como la densidad o la viscosidad, no intervienen en las expresiones de los perfiles ni del tiempo de vaciado, quedando el comportamiento del sistema determinado principalmente por los parámetros geométricos del tanque esferoidal abierto.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un modelo para el vaciado por gravedad de un tanque esferoidal abierto que permite modificar la geometría manteniendo el volumen constante. Se evidencia cómo la geometría no solo altera la forma del tanque y la ubicación de las aberturas según su tamaño, sino que influye directamente en la hidrodinámica del proceso de vaciado.

En un hipotético escenario de diseño de un tanque esferoidal abierto de capacidad fija, las variaciones en la sección transversal del tanque pueden acelerar o retardar significativamente el tiempo de vaciado, constituyendo un mecanismo de control útil en aplicaciones de ingeniería hidráulica y de procesos. En términos prácticos, la aproximación de Torricelli ofrece resultados satisfactorios, considerando que tanques extremadamente altos presentarían limitaciones técnicas y económicas en su construcción.

El uso de Python 3.13 demostró ser una herramienta versátil y eficiente para abordar tanto los cálculos numéricos como analíticos. El código desarrollado constituye un recurso pedagógico valioso en la enseñanza de mecánica de fluidos, matemáticas aplicadas y física en programas de ingeniería, ofreciendo una perspectiva más detallada y profunda de la hidrodinámica del vaciado y del diseño de tanques.

Este estudio abre la posibilidad de investigaciones futuras orientadas al desarrollo de animaciones dinámicas que permitan visualizar el proceso de vaciado de manera más intuitiva. Adicionalmente, se propone explorar otras geometrías cuya relación entre área transversal y altura permita optimizar el tiempo de vaciado según los requerimientos específicos de la aplicación. Finalmente, sería de interés analizar bajo qué régimen el parámetro λ puede modificar significativamente el coeficiente corrector k de la vena contracta.

REFERENCIAS

- [1] R. L. Mott y J. A. Untener. *Mecánica de fluidos* 7.ª ed. ISBN: 978-607-32-3288-3 (PEARSON Educación, México, 2015).
- [2] Y. A. Çengel y J. M. Cimbala. *Mecánica de fluidos: Fundamentos y aplicaciones* 2.ª ed. ISBN: 978-607-15-0779-2 (McGraw-Hill/Interamericana, México, 2012).
- [3] K. Wang, Y. Li, S. Ren y P. Yang. A Case Study on Settling Process in Inclined-Tube Gravity Sedimentation Tank for Drip Irrigation with the Yellow River Water. *Water* **12**, 1685 (2020). <http://dx.doi.org/10.3390/w12061685>.
- [4] H.-S. Yoon y K.-M. Park. Behavior of the Free Surface of Two-Phase Fluid Flow Near the Taphole in a Tank. *Symmetry* **13**, 875 (2021). <http://dx.doi.org/10.3390/sym13050875>.
- [5] D. G. Zill y W. S. Wright. *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera* ISBN: 6075266305 (Cengage Learning, México, 2015).
- [6] A. Hicks y W. Slaton. Determining the Coefficient of Discharge for a Draining Container. *The Physics Teacher* **52**, 43-47 (2014). <http://dx.doi.org/10.1119/1.4849155>.
- [7] P. J. Pritchard. *Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics* 8.ª ed. ISBN: 9780470547557 (John Wiley & Sons, United States, 2011).

- [8] S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos numéricos para ingenieros* ISBN: 9786071512949 (McGraw-Hill, México, 2006).
- [9] J. Otto y C. E. Mungan. Flow of water out of a funnel. *European Journal of Physics* **45**, 055007 (2024). <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/ad7107>.
- [10] J.-C. Cortés López, E. López Navarro, C.-L. Pérez y R.-J. Villanueva. A vueltas con la modelización del vaciado de depósitos. *Modelling in Science Education and Learning* **17**, 5-22 (2024). <http://dx.doi.org/10.4995/msel.2024.20904>.
- [11] G. Strang y E. J. Herman. *Cálculo* <https://openstax.org/details/books/c%C3%A1lculo-volumen-3>.
- [12] E. W. Weisstein. *Spheroid* <https://mathworld.wolfram.com/Spheroid.html>.
- [13] R. Larson y B. H. Edwards. *Cálculo 1: De una variable* 9.^a ed. ISBN: 9786071502735 (McGraw-Hill/Interamericana, México, 2010).
- [14] J. Stewart. *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* 6.^a ed. ISBN: 9706866531 (Cengage Learning, México, 2008).
- [15] D. G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* 9.^a ed. ISBN: 9708300551 (Cengage Learning, México, 2009).
- [16] B. R. Munson, D. F. Young y T. H. Okiishi. *Fundamentos de Mecánica de Fluidos* ISBN: 0471725781 (Editorial Limusa, S.A. de C.V., Grupo Noriega Editores, México, D.F., 1999).
- [17] J. H. Lienhard y J. H. Lienhard. Velocity Coefficients For Free Jets From Sharp-Edged Orifices. *Journal of Fluids Engineering* **106**, 13-17 (1984). <http://dx.doi.org/10.1115/1.3242391>.
- [18] R. A. Serway y J. W. Jewett. *Física para ciencias e ingeniería. Volumen 1* 7.^a ed. ISBN: 9786075266718 (Cengage Learning, México, 2008).
- [19] H. D. Young y R. A. Freedman. *Física universitaria. Volumen 1* 12.^a ed. ISBN: 6074422885 (Pearson Educación, México, 2009).