

INTERACCIÓN DE UNA ONDA GRAVITACIONAL CON UNA PARTICULA EN UN POZO CUADRADO

R.T. Mainardi*

Facultad de Matemática Astronomía y Física (FaMAF) - Universidad Nacional de Córdoba.
Ciudad Universitaria – 5000 Córdoba - Argentina
e-mail: mainardi@famaf.unc.edu.ar

En este trabajo se enuncia y resuelve un problema de Mecánica Cuántica en el que se plantea la interacción de una onda gravitacional (OG) con partículas materiales. La interacción de una OG se introduce como una perturbación a la solución de la ecuación de Schrodinger para un núcleo “deuteronoide”. Este consiste de un carozo con doble número mágico más un nucleón, en clara analogía a un átomo hidrogenoide. El pozo nuclear se supone rectangular o sea la partícula está libre en su interior, excepto en los bordes del pozo.

La perturbación producida por la presencia de la OG, se traduce en un corrimiento en los niveles de energía del núcleo deuteronoide. Una transición del nucleón entre dos niveles produce una emisión de un fotón y se calcula la diferencia de energía entre fotones emitidos en ausencia y en presencia de la OG. Se concluye que dicha diferencia es imposible de detectar con las técnicas actuales (v.g espectroscopía Mossbauer), ya que la misma resulta ser mucho menor que los anchos de niveles de núcleos radiactivos. Este hecho se asocia directamente a que el nucleón extra está constreñido a moverse dentro del pozo.

In this paper we present and solve a Quantum Mechanical problem, where the interaction of a gravitational wave (GW) with a mass particle is analyzed. The interaction of a GW is considered as a perturbation to the solution to the Schrodinger equation for a deuterium-like nucleus. This is assumed to consist of a core nucleus with double magic number plus an extra nucleon in an straightforward analogy with an hydrogen-like atom. The nuclear well is assumed to be square, that is, the extra nucleon is free inside the well but constrained inside its borders.

The perturbation produced by the presence of the GW, produces a shift in the energy levels of the deuterium like nucleus. A nuclear transition between two levels results in the emission of a photon whose energy is shifted in comparison with that of a photon emitted in the absence of a GW. This change in energy is calculated and we conclude that it is impossible to detect such a shift with current spectroscopies (i.e., Mossbauer). This fact is directly related to the extra nucleon being constrained to remain inside the nucleus.

I. INTRODUCCIÓN

En una decena de textos modernos de Mecánica Cuántica consultados, no se ha podido encontrar ningún problema que haga alusión a la interacción de una onda gravitacional (OG) con algún sistema físico. La mayoría de los estudiantes de física completa las materias de grado habiendo estudiado todo tipo de ondas, aunque sin ningún contacto con este tema. Se considera o propone que presentarlo como un problema relativamente simple servirá para introducir el tema de la interacción de OG.

Como consecuencia de la permanente búsqueda de nuevos problemas para distintas materias de la licenciatura en física, se elaboró un problema de interacción de una OG con una partícula en un pozo cuadrado, para lo cual se desarrolló un modelo de núcleo deuteronoide

En lo que sigue se resuelve de manera simple el problema para este tipo de núcleo y a continuación se plantea la interacción de una OG como las que se espera detectar con alguno de los experimentos que se están desarrollando en varios países⁽¹⁾.

II. EL NUCLEO DEUTERONOIDE.

Es habitual encontrar el problema del deuterón⁽²⁾, en textos de Física Nuclear y de Mecánica Cuántica, ya que su solución ofrece la posibilidad de ilustrar sobre distintos aspectos de un sistema cuántico, en particular un sistema con un solo estado ligado.

Para generalizar este tratamiento se planteó, como problema de examen final, resolver el caso de un núcleo al que se lo denominó deuteronoide. Este consiste de un núcleo compacto con números mágicos de protones y neutrones, más un nucleón extra que se mueve en el interior de un pozo cuadrado. La denominación de deuteronoide sale claramente de la comparación con el átomo hidrogenoide. La solución del deuteronoide consiste en una extensión idealizada del problema del deuterón en el que se supone arbitrariamente que tiene tres estados ligados, el tercero de ellos con energía cero. (ver Fig. 1). El problema resultó ser muy interesante, ya que de su solución surge que no existe restricción sobre los valores de momento angular que un nucleón puede tener en cada uno de dichos niveles y los cálculos de corrimiento de energías se pueden calcular, dentro de las complicaciones usuales, con relativa facilidad.

* Investigador del CONICET.

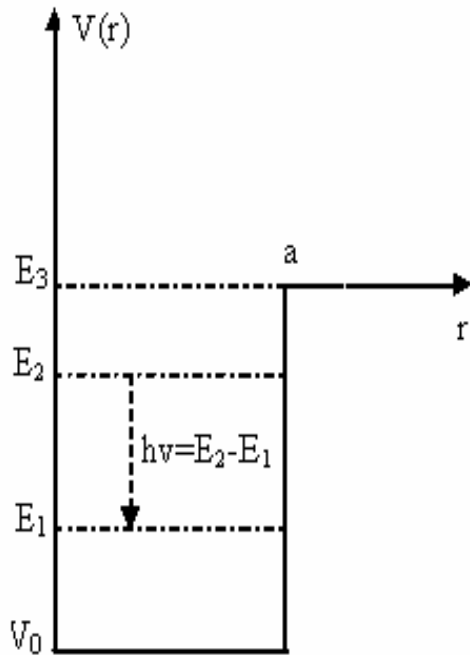


Figura 1. Pozo de potencial y niveles de energía para un núcleo "deuteronoide".

Solución de la ecuación de Schrodinger.

La ecuación de Schrodinger es:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi + V\varphi = E\varphi$$

la que con el cambio, suponiendo simetría esférica:

$$\varphi(r) = u(r)/r \quad (l=0)$$

se escribe como:

$$\frac{d^2}{dr^2} u(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)u(r) = 0$$

cuyas soluciones son:

$$u_i(r) = r_i \phi(r) \begin{cases} A_i \sin(k_i r) & 0 < r < a \\ B_i \exp(-\alpha_i r) & a < r < \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hbar k_i = \sqrt{2m(V_0 - E_i)} \\ \hbar \alpha_i = \sqrt{2mE_i} \end{cases}$$

El subíndice i toma sucesivamente los valores 1, 2 y 3 y el valor de $V_0 a^2$ debe ser tal que $E_3=0$.

La aplicación de las condiciones de contorno a estas soluciones nos da una ecuación trascendente muy similar a la que se obtiene en los libros de texto para el deuterón:

$$k_i a \cdot \cot g(k_i a) = -\alpha_i a$$

Soluciones numéricas para esta ecuación usando el programa MATHCAD nos da los valores:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a = \frac{5\pi}{2} = 7.854$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2mE_1}}{\hbar} a = 7.343$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2mE_2}}{\hbar} a = 5.603$$

$$\text{con: } \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > k_2 a > 1 > k_1 a$$

La normalización de las funciones de onda, expresada por:

$$(\varphi_i, \varphi_i) = 1,$$

proporciona las expresiones para A_i y B_i , con lo que se completa la solución del problema para el núcleo deuteronoide.

III. INTERACCION DE UNA ONDA GRAVITACIONAL

En mecánica cuántica una perturbación asociada a un potencial armónico es de la forma:

$$V' = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

Si la perturbación está producida por una onda plana gravitacional, de amplitud $h_{\{i,j\}}$ y frecuencia ω , que se desplaza en la dirección del eje z, la constante k en la expresión anterior es ahora de naturaleza tensorial y está relacionada al tensor de Riemann a través de la derivada segunda temporal de la amplitud de la OG⁽³⁾, con lo que toma la forma:

$$V' = \frac{-m}{4} \frac{d^2 h_{\{i,j\}}}{dt^2} x_i x_j$$

con $x^1=x$, $x^2=y$ y $x^3=z$. Esta ecuación se puede escribir como:

$$V' = \frac{m\omega^2}{4} \left[h_{\oplus} (y^2 - x^2) - 2h_{\otimes} xy \right]$$

en la que h_{\oplus} y h_{\otimes} miden las amplitudes de los modos independientes de polarización lineal de la OG y en el léxico propio del área se conocen como amplitudes "más" y "cruz", respectivamente. En coordenadas esféricas esta ecuación se escribe como:

$$V'(r, \theta, \phi) = V_{\oplus} \cdot r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + V_{\otimes} \cdot r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi$$

en las que las amplitudes V_{\oplus} y V_{\otimes} corresponden a las amplitudes de la perturbación producidas por componentes más y cruz de la OG.

La teoría de perturbaciones de la Mecánica Cuántica permite calcular el corrimiento de los niveles de energía por medio de la ecuación:

$$\Delta E_i = \frac{(\varphi_i, V' \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} = (\varphi_i, V' \varphi_i)$$

la que explícitamente se escribe como:

$$(\varphi_i, V' \varphi_i) = \left\{ \int_0^a A_i^2 \sin^2(k_i r) r^2 dr + \int_a^{\infty} B_i^2 \exp(-2\alpha_i r) r^2 dr \times \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \right\} \times \left\{ \int_0^{2\pi} [V_{\oplus} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + V_{\otimes} \sin \varphi \cos \varphi] d\varphi \right\}$$

Dando como resultado:

$$\Delta E_i = \frac{2\alpha_i V_{\oplus} a^2}{(1 + \alpha_i)(k_i a)} \left\{ \frac{\alpha_i a}{(k_i a)^3} \left[\frac{(k_i a)^3}{6} - \frac{1}{4} \left[(k_i a)^2 - \frac{1}{2} \right] \sin(2k_i a) - \frac{k_i a}{4} \cos(2k_i a) \right] + \frac{\sin^2(k_i a)}{8(\alpha_i a)^2} \left[(2\alpha_i a)^2 + 4\alpha_i a \right] \right\}$$

Estos corrimientos fueron calculados con un programa ad-hoc en MATHCAD para los niveles 1 y 2 insertando los valores de la sección anterior.

Un fotón emitido en una transición del nivel 2 al nivel 1 tendrá una energía dada por:

$$\hbar \nu = |E_2 - E_1|$$

El corrimiento relativo de la energía del fotón emitido estará dado entonces por:

$$\frac{\Delta E_1 - \Delta E_2}{E_1 - E_2} = \frac{4m^2 \omega^2 a^4}{\hbar^2} (.421 - .360) h(\oplus) = \approx 10^{-39} .h(\oplus)$$

La estimación actual sobre la amplitud máxima que una onda gravitacional tendrá en la tierra es:

$$h(\oplus) \sim 10^{-21}$$

con lo que finalmente obtenemos:

$$\frac{\Delta E_1 - \Delta E_2}{E_1 - E_2} \approx 10^{-60}$$

Corrimientos relativos de energía de 10^{-19} pueden ser detectados por espectrometría Mossbauer⁽⁴⁾.

IV. CONCLUSIONES

No es detectable el corrimiento en los niveles nucleares debido a la presencia de una onda gravitacional.

Si bien un nucleón es “libre” dentro del núcleo deuteronoide, no tiene disponible un continuo de niveles de energía, como si los tiene una partícula libre.

En los experimentos con interferómetros ópticos los espejos suspendidos pueden vibrar a cualquier frecuencia, v.g. están enteramente libres.

Si bien este ejercicio de Mecánica Cuántica presenta un experimento irrealizable, la posibilidad de introducir de manera relativamente simple la interacción de ondas gravitacionales con la materia, le da un valor didáctico al problema.

V. AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Daniel Barraco Diaz por una lectura cuidadosa de la sección II y por proveer la expresión tensorial correcta para la perturbación producida por la OG.

Referencias

- 1 - An exhaustive list of all current detection devices under construction can be seen at the web address: <http://www.johnstonsarchive.net/relativity/gwdtable.html>
- 2 - Enge, H. Introduction to Nuclear Physics. 1966 (Addison-Wesley Publ. Co. Inc.) Chap.2.
- 3 - Blair, D.G.; 1991, in The Detection of gravitational Waves. Edited by Blair, D.G. Cambridge University Press. Pp. 3-15.
- 4 - Tsipenyuk, Y.M. 1997. Nuclear Methods in Science and Technology. Institute of Physics Publishing. Pg343.