

# DETERMINACIÓN DE LAS ESCALAS ESPACIALES EN IMÁGENES OBTENIDAS EN EXPERIMENTOS DE LABORATORIO

M.S. Estela, L.P. Thomas y B.M. Marino

Instituto de Física Arroyo Seco, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro  
Pinto 399, 7000 Tandil, Argentina  
e-mail: lthomas@exa.unicen.edu.ar

Para obtener información cuantitativa de las imágenes adquiridas en los experimentos de laboratorio realizados por alumnos de las carreras de física e ingeniería, es necesario establecer la escala espacial en las imágenes a partir del conocimiento de la posición de puntos en una imagen de referencia. En este trabajo revemos los principales métodos para determinar tales escalas en dos dimensiones y comparamos los errores correspondientes con el objeto de establecer criterios prácticos que ayuden a su elección. Mostramos que algunas distorsiones usuales en las imágenes obtenidas en el laboratorio necesitan transformaciones más complejas, aunque en algunos casos los métodos sencillos pueden funcionar adecuadamente.

In order to obtain quantitative information from images acquired in laboratory experiments performed by students of Physics and Engineering, it is necessary to establish the space scale in the images from the knowledge of the position of points in a reference image. In this work we review the main methods to determine such two-dimensional scales and compare the corresponding errors in order to give practical criteria to select them. We show that usual distortions in the images obtained in the laboratory need more complex transformations, although simple methods can work suitably in some cases.

## 1 INTRODUCCIÓN

Para analizar un dado fenómeno físico modelado en el laboratorio, es común emplear imágenes registradas durante las experiencias a las cuales es necesario asociar un sistema de coordenadas de referencia para obtener información cuantitativa <sup>(1,2)</sup>. El proceso de asociación de coordenadas a una imagen está bien desarrollado en complejos programas de Sistemas de Información Geográfica (GIS) como Arcwiew <sup>(3)</sup>, empleados para la gestión y representación de información enlazada geográficamente. En la bibliografía relacionada con el procesamiento de imágenes también se describen las transformaciones geométricas que muestran grandes distorsiones estereoscópicas, pero no se suelen tratar los errores asociados a las pequeñas deformaciones <sup>(4,5)</sup>.

Por otra parte, en las experiencias de laboratorio los alumnos tienden a elegir (racional o intuitivamente) la

disposición de la cámara para obtener las imágenes con la mínima distorsión posible. Luego eventualmente surge la discusión sobre si se deben tomar en cuenta las pequeñas distorsiones residuales por medio de alguna transformación geométrica, normalmente una transformación afín o bilineal de seis parámetros <sup>(2)</sup>. En esta instancia se hallan las coordenadas por medio de tres puntos o se programan directamente las transformaciones aceptando los resultados sin un razonamiento crítico. En ambos casos se pierde parte del conocimiento del proceso de asignación de la escala incluyendo la estimación de los errores.

En este trabajo, dirigido a los alumnos que cursan materias de Física e Ingeniería en las que es necesario extraer información cuantitativa de imágenes procesadas digitalmente, comparamos algunos métodos elementales útiles para transformar las coordenadas en las imágenes a las coordenadas de laboratorio para algunos casos típicos, de modo de ilustrar en forma sencilla las diferencias y los errores asociados cuando hay pequeñas distorsiones. Nuestro objetivo es entonces el de proveer un criterio práctico para seleccionar el método más apropiado de asignación de coordenadas. También resulta de interés la aplicación de cálculos estadísticos en este proceso, cuyas herramientas conceptuales suelen aprenderse en materias independientes e involucran la correlación lineal entre dos variables únicamente.

## 2 ESCALA A PARTIR DE TRES PUNTOS

Este método clásico nos brinda una solución sencilla del problema planteado. Se trata de establecer las coordenadas en el sistema de representación que estamos utilizando, el que generalmente es el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. Es decir, la posición  $(P,Q)$  de un pixel en una imagen debe

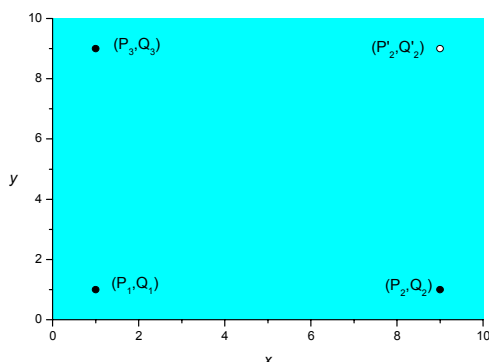


Fig. 1: Imagen y puntos de referencia para establecer el sistema de coordenadas

convertirse o transformarse en las coordenadas  $(x,y)$  en el sistema de referencia de laboratorio.

Quizás la forma intuitiva de asociar las escalas a una imagen sea considerando tres puntos  $(P_1, Q_1)$ ,  $(P_2, Q_2)$ ,  $(P_3, Q_3)$  (círculos rellenos en la Fig. 1) que presentan diferencias importantes en las coordenadas horizontal y vertical. En este caso se elige, o supone, que  $P_1=P_3$  y  $Q_1=Q_2$ , y por ende  $x_1=x_3$  e  $y_1=y_2$ , obteniéndose el resto de las coordenadas por medio de una transformación lineal, es decir, por la "regla de tres simple" elemental.

En este caso, dadas las coordenadas de tres puntos  $(x_1, y_1)$   $(x_2, y_2)$   $(x_3, y_3)$ , colineales de a pares  $(x_1=x_3, y_1=y_2)$ , las coordenadas  $(x,y)$  de un punto cualquiera  $(P, Q)$  de la imagen se calcula directamente por

$$x = \frac{P - P_1}{P_2 - P_1} (x_2 - x_1) + x_1 \quad (1)$$

$$y = \frac{Q - Q_1}{Q_3 - Q_1} (y_3 - y_1) + y_1 \quad (2)$$

Aquí  $y_2$  y  $x_3$  no se usan puesto que son redundantes por la hipótesis asumida inicialmente. Así, el método puede aplicarse ingresando sólo dos puntos, los cuales deben tener ambas coordenadas diferentes. Por ejemplo, los puntos  $(P_1, Q_1)$  y  $(P'_2, Q'_2)$  (símbolo abierto en Fig. 1) serían adecuados. Entonces, las Ecs. (1) y (2) deben cambiarse por

$$x = \frac{P - P_1}{P'_2 - P_1} (x'_2 - x_1) + x_1 \quad (3)$$

$$y = \frac{Q - Q_1}{Q'_2 - Q_1} (y'_2 - y_1) + y_1 \quad (4)$$

### 3 APROXIMACIÓN LINEAL DE MEJOR AJUSTE A MÁS DE TRES PUNTOS

#### 3a Generalidades

El método anterior, si bien es muy sencillo, se basa en un número reducido de puntos y el error en las

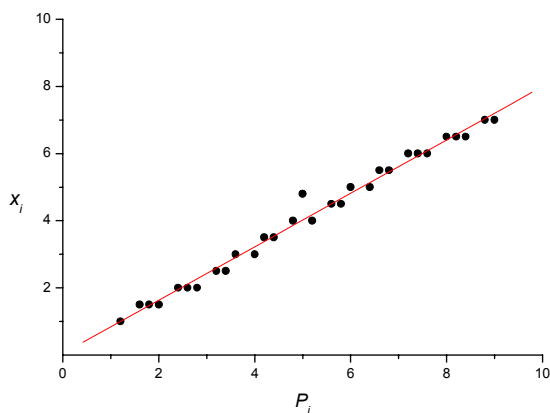


Fig. 2: Relación entre la coordenada horizontal  $(x)$  y la columna de la imagen  $P$ . Los puntos indican las asignaciones de diferentes píxeles de la imagen y la línea de trazo continuo es la recta de mejor ajuste.

escalas resultantes depende críticamente del error introducido por los valores de las coordenadas. Una forma de compensar los probables errores en la asignación de las coordenadas a los puntos conocidos consiste, entonces, en considerar un número mayor de datos y encontrar la recta de mejor ajuste a la nube de puntos resultante.

En particular, si los ejes coordenados  $(x,y)$  son paralelos a las filas y columnas de la imagen  $(P,Q)$ , es decir que a igual valor de  $P$  le corresponde igual valor de  $x$  independientemente de  $Q$  y en forma similar para  $y=y(Q)$ , entonces los valores aproximados  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  se calculan como:

$$\hat{x}_i = a + b \cdot P_i \quad (5)$$

$$\hat{y}_i = c + d \cdot Q_i \quad (6)$$

Tomemos por ejemplo la relación entre  $x_i$  y  $P_i$ , representada en la Fig. 2. Los diferentes puntos serán afectados por los errores debidos a la discretización de la imagen y también por incorrectas asignaciones de las coordenadas como el punto correspondiente a  $P=5$ .

Resulta claro que es conveniente realizar una regresión lineal de la nube de puntos. Por ejemplo, calculamos la relación lineal entre  $\hat{x}_i$  y  $P_i$  (línea en la Fig. 2) que minimiza los errores cuadráticos medios. De este cálculo obtenemos los coeficientes  $a$  y  $b$  de la Ec. (5). Para los coeficientes  $c$  y  $d$  de la Ec. (6) debemos realizar un cálculo análogo entre la coordenada  $\hat{y}_i$  y  $Q_i$ .

Notemos que los valores  $x_i$  asignados a los píxeles de la imagen no coinciden, en general, con los valores  $\hat{x}_i$  de mejor ajuste. En efecto, el valor de  $\hat{x}_i$  tiene los errores en la asignación de las coordenadas de cada punto compensados en parte, de modo que es conveniente emplear  $\hat{x}_i$  en lugar de los valores  $x_i$ .

#### 3b Cálculo de los coeficientes

Existen varias formas para determinar los coeficientes  $a-d$  de las Ecs. (5) y (6). Consideremos la forma estándar basada en el método de cuadrados mínimos. Si bien la solución puede encontrarse en cualquier libro de estadística <sup>(6,7)</sup>, por completitud incluimos aquí un breve resumen del cálculo para definir la nomenclatura empleada y para facilitar la comprensión de la próxima Sección.

En el método de cuadrados mínimos, la estimación  $\hat{x}_i$  para el punto  $i$  surge de hacer mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones en el eje  $x$ ,

$$e_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2, \quad (7)$$

donde  $n$  es el número total de puntos. Empleando la Ec. (5), expresamos la Ec. (7) como

$$e_x = \sum_{i=1}^n (x_i - a - b \cdot P_i)^2 \quad (8)$$

Las condiciones para que  $e_x$  sea un maximal son

$$\frac{\partial \cdot e_x}{\partial a} = 0 \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \cdot e_x}{\partial b} = 0 \quad (9b)$$

Reemplazando la Ec. (8) en (9a), obtenemos

$$a = \langle x_i \rangle - b \langle P_i \rangle, \quad (10)$$

donde

$$\langle x_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (11)$$

y

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i \quad (12)$$

son los valores medios de  $x_i$  y  $P_i$ , respectivamente.

Reemplazando la Ec. (8) en (9b) y empleando (10), obtenemos

$$b = \frac{\langle x_i \cdot P_i \rangle - \langle x_i \rangle \cdot \langle P_i \rangle}{\langle P_i^2 \rangle - \langle P_i \rangle^2}, \quad (13)$$

donde

$$\langle P_i^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i^2 \quad (14)$$

y

$$\langle x_i \cdot P_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i \quad (15)$$

son el valor cuadrático medio de  $P_i$  y la correlación entre las variables  $x_i$  y  $P_i$ , respectivamente.

En consecuencia, los valores  $a$  y  $b$  de mejor ajuste para la Ec. (5) se determinan fácilmente por medio de las Ecs. (10) y (13). Un cálculo análogo para los

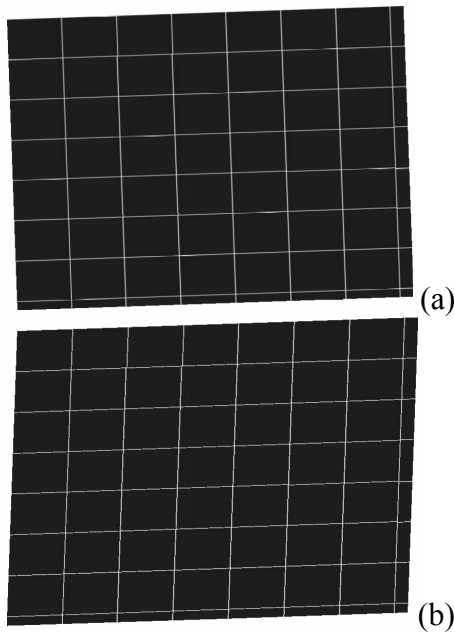


Fig. 3: Imágenes con sistemas de coordenadas rotados (a) y distorsionados (b) en 2°. Ambos casos necesitan una relación bilineal para asociar correctamente las coordenadas de laboratorio y de la imagen.

coeficientes  $c$  y  $d$  indicados en la Ec. (6) para la coordenada vertical  $y$  permite obtener

$$c = \langle y_i \rangle - d \langle Q_i \rangle \quad (16)$$

$$d = \frac{\langle y_i \cdot Q_i \rangle - \langle y_i \rangle \cdot \langle Q_i \rangle}{\langle Q_i^2 \rangle - \langle Q_i \rangle^2} \quad (17)$$

#### 4 APROXIMACIÓN BILINEAL

En la Sección anterior consideramos que el sistema de coordenadas  $(x,y)$  es paralelo a las filas y columnas de la imagen  $(P,Q)$ . Esto es estrictamente válido si la coordenada horizontal  $x$  es una función lineal sólo de  $P$ , y la coordenada vertical  $y$  es una función lineal de  $Q$  independientemente de  $P$ .

Por ejemplo, imágenes con ejes ligeramente rotados o que no estén en un ángulo recto como las indicadas en la Fig. 3 no cumplen estas condiciones. Ambos casos suelen presentarse en las imágenes obtenidas en el laboratorio como consecuencia de una incorrecta alineación de la cámara que toma las imágenes.

Este tipo de distorsiones es fácilmente solucionado usando una relación bilineal o transformación afín<sup>(8)</sup>

$$\hat{x}_i = a + b \cdot P_i + c \cdot Q_i \quad (18)$$

$$\hat{y}_i = d + e \cdot P_i + f \cdot Q_i \quad (19)$$

Es decir, las coordenadas  $x_i$  e  $y_i$  dependen de *ambas* variables  $P_i$  y  $Q_i$  en forma lineal. Notemos que  $a$  y  $d$  son términos de translación mientras que  $b$ ,  $c$ ,  $e$  y  $f$  pueden considerarse como términos de cambio de escala (amplificación o contracción), uno de rotación y otro de distorsión lineal como el indicado en la Fig. 3b<sup>(9)</sup>. Consecuentemente, la transformación afín (18)-(19) da cuenta adecuadamente de las deformaciones mostradas en la Fig. 3.

Por otra parte, para resolver las Ecs. (18)-(19) hay que hallar 6 coeficientes que pueden calcularse con tres puntos diferentes, ya que cada punto implica dos coordenadas  $x$  y  $y$ . Este procedimiento suele indicarse en los textos sobre procesamiento de imágenes<sup>(4,5)</sup>.

Pero si tenemos las coordenadas de más puntos, es posible realizar un cálculo estadístico similar al de la Sección 3b disminuyendo además los errores debidos a la asignación de las coordenadas de cada punto. También se obtiene la desviación estándar que nos indica el error cometido en el proceso de asignación y la confianza que debemos tener en el resultado.

El cálculo estadístico de los coeficientes  $a-f$  es similar al realizado en la Sección 3. Las condiciones para que  $e_x$  sea un maximal están dadas por la anulación de las derivadas de esta función respecto a los tres coeficientes  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , conduciendo a

$$a = \langle x_i \rangle - b \langle P_i \rangle - c \langle Q_i \rangle \quad (20)$$

$$b = \frac{c \cdot \varepsilon + \zeta}{\beta} \quad (21)$$

$$c = \frac{\delta \cdot \zeta - \alpha \cdot \gamma}{\alpha \cdot \beta - \delta \cdot \varepsilon} \quad (22)$$

donde

$$\beta = \langle Q_i \rangle \cdot \langle P_i \rangle - \langle Q_i \cdot P_i \rangle \quad (23)$$

$$\gamma = \langle x_i \cdot P_i \rangle - \langle x_i \rangle \cdot \langle P_i \rangle \quad (24)$$

$$\delta = \langle P_i \rangle^2 - \langle P_i^2 \rangle \quad (25)$$

$$\varepsilon = \langle Q_i \rangle^2 - \langle Q_i^2 \rangle \quad (26)$$

$$\zeta = \langle x_i \cdot P_i \rangle - \langle x_i \rangle \cdot \langle P_i \rangle \quad (27)$$

Luego, los coeficientes de la transformación bilineal en la coordenada horizontal dada por (18) se calculan por medio de las Ecs. (20)-(27). Análogamente se calculan los coeficientes  $d$ ,  $e$  y  $f$  para la coordenada vertical indicada por Ec. (19).

## 5 OTRAS TRANSFORMACIONES Y EJEMPLOS

La transformación descrita en la Sección 4 es un caso particular, en el que las relaciones de las coordenadas con las filas y columnas de las imágenes son lineales y no hay términos de dependencia con el producto  $P_i Q_i$ . Por ejemplo, las escalas de las imágenes como las mostradas en las Fig. 4 deberían calcularse con transformaciones no lineales más complejas mencionadas en las referencias. De ser necesaria su aplicación, se debe considerar el uso de un software específico.

De todas formas, es conveniente tener el orden de magnitud de los errores que se cometen con cada aproximación. En la tabla 1 mostramos los errores relativos que surgen de aplicar las transformaciones indicadas en las Secciones 2, 3 y 4 para las imágenes mostradas en las Figs. 3 y 4. Los valores en las columnas 3-5 de dicha tabla se calcularon con 8 puntos

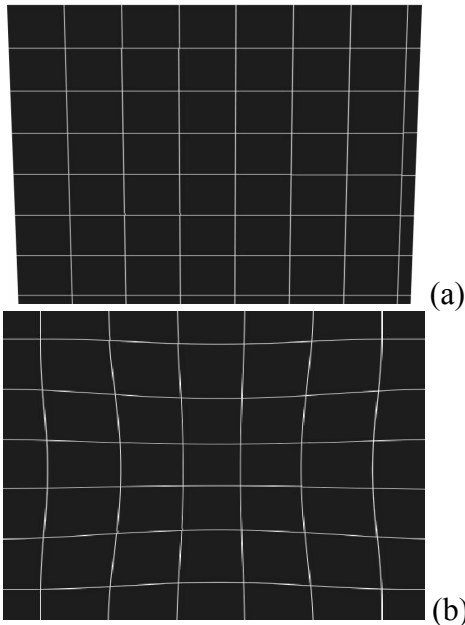


Fig. 4: Imágenes deformadas por (a) una incorrecta alineación de la imagen de referencia con el plano objeto de la cámara, y (b) por aberraciones de lentes. Ambos casos necesitan una relación no lineal para asociar correctamente las coordenadas de laboratorio y de la imagen.

distribuidos en la imagen y promediando el error de ambas coordenadas. Los valores reportados deben considerarse como indicativos ya que dependen de la exactitud de la asignación de las coordenadas realizada y de la calidad de las líneas o puntos de referencia en la imagen.

Figura	ángulo (grados)	Tres puntos	Lineal	Bilineal
3a	0	0.0062	0.0046	0.0046
3a	1	0.658	0.317	0.0092
3a	2	2.753	1.271	0.0091
3b	1	0.601	0.306	0.0069
3b	2	2.632	1.171	0.0054
4a	4	0.177	0.0509	0.0498
4b	-	0.678	0.50	0.487

Tabla 1: Cociente de la desviación estándar y el valor medio para las tres transformaciones analizadas.

Como puede observarse en la Tabla 1, las tres transformaciones dan errores similares sólo para una imagen centrada ( $0^\circ$  de rotación). La transformación bilineal da cuenta de las distorsiones señaladas en la Fig. 3. Por su parte, excepto para una imagen centrada, la transformación lineal (Sección 2) da un error que es aproximadamente dos órdenes de magnitud superior. El error de las escalas con tres puntos es un factor 2, aproximadamente, respecto del calculado con la relación lineal.

Por otra parte, las transformaciones consideradas no dan resultados satisfactorios en las imágenes con las distorsiones mostradas en la Fig. 4. La relación bilineal arroja un error muy parecido a la transformación lineal, apenas superado por el correspondiente al cálculo de la escala con tres puntos.

## 6 RESUMEN Y CONCLUSIONES

Hemos descrito los métodos básicos de asignación de coordenadas a imágenes digitales obtenidas en experiencias de laboratorio. Realizamos una comparación de los errores cometidos al usar imágenes que contienen distorsiones características de modo de ilustrar en forma simple los diferentes métodos que permiten asignar las escalas con sus correspondientes errores. Encontramos que es conveniente aplicar la transformación bilineal para la asignación del sistema de coordenadas en imágenes ligeramente rotadas o distorsionadas como las mostradas en la Fig. 3. En este caso la desviación estándar se mantiene muy baja y no depende del ángulo de la distorsión; es decir, la transformación corrige las distorsiones señaladas.

Por otra parte, con imágenes que tienen deformaciones como las mostradas en la Fig. 4, se debería optar por una relación simple de tres puntos o por una transformación no lineal. Cualquier cálculo estadístico lineal o bilineal no parece disminuir la desviación estándar de los resultados en forma significativa.

Desde el punto de vista práctico, en experiencias de laboratorio es entonces conveniente dedicar esfuerzo

para tener puntos de referencia bien definidos y obtener imágenes con el mínimo de distorsiones como las mostradas en la Fig. 4. Luego se deben identificar y estimar las distorsiones y los errores asociados, a fin de evaluar la necesidad o no de la programación de la transformación más adecuada. De todas formas, las transformaciones basadas en una nube de puntos compensan parcialmente las posibles incorrecciones en la asignación de las coordenadas. También permiten obtener una estimación de los errores que son indicadores de la precisión con que los ejes coordenados son asignados a las imágenes en las experiencias de laboratorio.

## REFERENCIAS

1. M. Estela, L. Thomas, B. Marino. *Procesamiento de Imágenes para la Medición de Espesores de Capas de Líquidos*. 33 Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa, (JAIIO' 2004), Córdoba, 20 -24 de septiembre 2004.
2. S.B. Dalziel, *DigImage: System Overview*. Cambridge Environmental Consultants (1995).
3. ArcView. <http://www.esri.com/software/arcgis/arcview/>
4. Castleman K. *Digital Image Processing*, Prentice Hall (1996).
5. Gonzalez R., Woods R. *Digital Image Processing*, Addison-Wesley (1992).
6. J.F. Martínez Ruiz, J.L. Sánchez-Crespo. *Métodos y aplicaciones del muestreo*, Alianza. Madrid (1986).
7. S.M. Ross. *Introduction to probability models*. Academic Press. San Diego (2000).
8. J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C.A. Trejo. *Análisis Matemático*. Kapesluz, Buenos Aires (1969).
9. J.B. Marion. *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Reverté, Barcelona (1992).