

La pelota de fútbol ¿dobla o no?

Carlos A. Perazzo¹ and Julio Gratton^{2,*}

¹Universidad Favaloro, Solís 453, 1078, Buenos Aires, Argentina

²INFIP-CONICET, Dpto. de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pab. I, Buenos Aires, Argentina.

Las fuerzas de arrastre y sustentación son de fundamental importancia para describir el movimiento de cuerpos inmersos en fluidos, un tema de gran interés para numerosas aplicaciones de la Física a otras Ciencias, al medio ambiente y a la tecnología. Sin embargo, debido a la complejidad de los problemas involucrados, estas fuerzas se suelen tratar muy someramente, si es que se tratan, en los cursos introductorios y sus textos. Creemos sin embargo que estos conceptos y sus aplicaciones se pueden presentar en términos sencillos, accesibles para los estudiantes de los primeros cursos. En este trabajo mostramos cómo lograr esto por medio de un ejemplo que trata un tema que ha dado que hablar a los aficionados y comentaristas deportivos: el efecto de la densidad del aire sobre la trayectoria de una pelota de fútbol pateada con chanfle.

Drag and lift forces are fundamental to describe the motion of objects immersed in fluids, a subject of great interest for many applications of Physics to other Sciences, to the environment and to technology. However, due to the complexity of the problems involved, these forces are usually discussed superficially, if at all, in introductory courses and their bibliography. Nevertheless, we believe that these concepts and their applications can be presented and discussed in a simple way, accessible to the students of the first courses. In this paper we show how to achieve this by means of an example dealing with a subject frequently debated among sports fans and journalists: the effect of the air density on the trajectory of a football kicked with spin.

I. FUERZAS SOBRE UN CUERPO EN EL SENO DE UN FLUIDO

Los fluidos ejercen fuerzas sobre los cuerpos que están en su seno. Puesto que todo objeto terrestre está inmerso en un ambiente fluido, es importante conocerlas. Su tratamiento riguroso requiere conocer la Mecánica de los Fluidos [1] y por este motivo no se suelen tratar o bien se tratan en forma muy somera en los cursos introductorios de Física. El propósito de este trabajo de carácter pedagógico es presentarlas de una manera sencilla y accesible para los estudiantes de dichos cursos y mostrar sus efectos por medio de un ejemplo interesante y atractivo. Estas fuerzas se dividen en tres grupos:

- El empuje de Arquímedes, que actúa sobre todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido, cualquiera sea de su estado de movimiento.
- Fuerzas que dependen de la velocidad relativa \mathbf{u} del fluido respecto del cuerpo, que a su vez se dividen en fuerzas de arrastre, que son paralelas a \mathbf{u} , y fuerzas de sustentación, que son ortogonales a \mathbf{u} .
- Fuerzas que dependen de la aceleración del cuerpo respecto del fluido que lo rodea.

Describiremos brevemente las fuerzas de arrastre y de sustentación que son las que interesan para el movimiento de una pelota de fútbol.

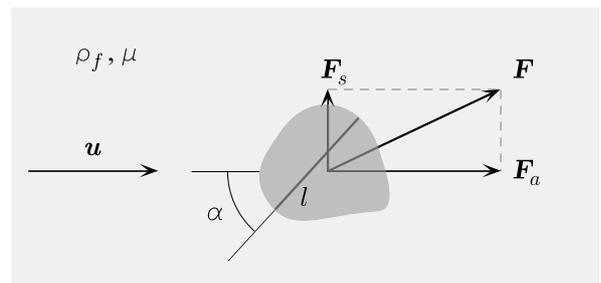


Figura 1: Fuerzas sobre un cuerpo que se mueve en un fluido.

II. FUERZA DE ARRASTRE

Usaremos el análisis dimensional para obtener la expresión general del arrastre F_a sobre un cuerpo que se mueve con la velocidad $-\mathbf{u}$ en un fluido de densidad ρ_f y coeficiente de viscosidad μ (Fig. 1). Sea l la longitud característica del cuerpo transversal a \mathbf{u} . Con las magnitudes dimensionales del problema (F_a, l, u, μ, ρ_f) sólo podemos formar dos combinaciones adimensionales, que podemos elegir como el número de Reynolds

$$\mathcal{R} = \frac{\rho_f u l}{\mu} \quad \text{y} \quad \Pi = \frac{F_a}{\frac{1}{2} \rho_f u^2 l^2} \quad (1)$$

Debemos agregar los invariantes que describen la forma del cuerpo (que llamaremos f) y dos ángulos (que llamaremos α) que determinan su orientación respecto de \mathbf{u} . La relación invariante más general entre las magni-

*Electronic address: jgratton@tinfiplfp.uba.ar

tudes del problema es entonces

$$\Pi = \phi(\mathcal{R}, f, \alpha) \quad (2)$$

donde la forma de la función ϕ no se puede determinar por análisis dimensional. De (2) obtenemos

$$F_a = \frac{1}{2}\rho_f u^2 l^2 \phi(\mathcal{R}, f, \alpha) \quad (3)$$

En el límite de velocidades bajas ($\mathcal{R} \ll 1$) el arrastre se debe a la viscosidad y es independiente de ρ_f (que da la medida de la inercia del fluido). Por lo tanto

$$\lim_{u \rightarrow 0} \phi(\mathcal{R}, f, \alpha) = \frac{g_1(f, \alpha)}{\mathcal{R}} \quad (4)$$

luego

$$F_a = F_\mu = g_1(f, \alpha) \mu u l, \quad \mathcal{R} \ll 1 \quad (5)$$

Para altas velocidades ($\mathcal{R} \gg 1$) el arrastre no depende de μ y por lo tanto debe ser independiente de \mathcal{R} . Luego

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(\mathcal{R}, f, \alpha) = g_2(f, \alpha) \quad (6)$$

y entonces

$$F_a = F_t = \frac{1}{2} g_2(f, \alpha) \rho_f u^2 l^2, \quad \mathcal{R} \gg 1 \quad (7)$$

Notar que $\mathcal{R} \approx F_t/F_\mu$.

Si no conocemos de antemano u no podemos calcular \mathcal{R} y hay que proceder por tanteo usando (5) o (7) para obtener u y entonces calcular \mathcal{R} , controlando *a posteriori* si el resultado es o no consistente.

III. EL COEFICIENTE DE ARRASTRE

Es usual definir el coeficiente de arrastre como

$$C_a = C_a(\mathcal{R}, f, \alpha) = \frac{F_a}{\frac{1}{2}\rho_f u^2 S_\perp} \quad (8)$$

donde $S_\perp \approx l^2$ es el área de la sección del cuerpo ortogonal a \mathbf{u} . Luego (3) se escribe

$$F_a = \frac{1}{2} C_a \rho_f u^2 S_\perp \quad (9)$$

De (5) y (9) vemos que para velocidades bajas

$$C_a = \frac{2g_1(f, \alpha)}{\mathcal{R}} \quad (10)$$

Para velocidades mayores el comportamiento de C_a es complicado y sólo tiende a una constante como predice la (7) cuando \mathcal{R} es muy grande. En general C_a se determina experimentalmente. Para una esfera $C_a \approx 1$ para $\mathcal{R} \approx 10^2$ y cae a 0.5 para $\mathcal{R} \approx 10^3$, es casi constante entre $\mathcal{R} \approx 10^3$ y 10^5 , pero entre $\mathcal{R} \approx 2 \times 10^5$ y 3×10^5 cae por un factor entre 4 y 5, y se mantiene aproximadamente constante de $\mathcal{R} \approx 10^6$ en adelante. Pero para cuerpos con un perfil aerodinámico C_a puede ser mucho menor, por ejemplo para un ala de avión orientada según la dirección normal de vuelo $C_a \approx 0.01 - 0.02$.

IV. FUERZA DE SUSTENTACIÓN

Además del arrastre el móvil experimenta una fuerza ortogonal a su movimiento (Fig. 1), como se puede comprobar dejando caer una hoja de papel. Esta es la fuerza de sustentación, que permite el vuelo de las aves, aviones y helicópteros, y hace que una pelota de fútbol pateada con chanfle siga una trayectoria con comba.

Para entender la sustentación usaremos el Teorema de Bernoulli. Sea un cuerpo que se mueve con velocidad $-\mathbf{u}$ en un fluido. Desde el referencial del móvil se observa un movimiento del fluido, que lejos del cuerpo es un flujo uniforme con velocidad $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}}$. Cerca del mismo la velocidad \mathbf{v} del fluido es una función complicada de la posición, de la forma del cuerpo y de \mathcal{R} . Supongamos que $\mathcal{R} \gg 1$ de modo que los efectos de la viscosidad se pueden ignorar en el grueso del flujo (tal flujo se llama ideal). El flujo será estacionario, salvo en la estela turbulenta detrás del móvil. Si además el flujo es incompresible se puede mostrar que fuera de la estela

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_f} = \frac{u^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_f} = \text{cte.} \quad (11)$$

Aquí p es la presión donde la velocidad del fluido es v y p_0 es la presión muy lejos del cuerpo. La (11) es el Teorema de Bernoulli y expresa que p es tanto mayor cuanto menor es v , y viceversa.

Supongamos que el móvil tiene un perfil aerodinámico de modo que la estela turbulenta es muy angosta y se puede ignorar, luego el flujo es laminar casi en todas partes. Sea S la superficie del móvil y dS un elemento cuya normal exterior es $\hat{\mathbf{n}}$. Debido a la presión del fluido sobre dS actúa una fuerza $d\mathbf{F} = -p\hat{\mathbf{n}}dS$. La fuerza que el fluido ejerce sobre el móvil es entonces

$$\mathbf{F} = \int_S d\mathbf{F} = - \int_S p\hat{\mathbf{n}}dS \quad (12)$$

donde p se obtiene de la (11).

La parte de \mathbf{F} paralela a \mathbf{u} es el arrastre y de (12) deberíamos recuperar los resultados anteriores, pero resulta $\mathbf{F}_a = 0$, en contradicción con lo que se observa (paradoja de D'Alembert). Ocurre que si $\mathcal{R} \gg 1$ la viscosidad se puede ignorar en el grueso del flujo, pero nunca muy cerca del cuerpo, donde hay una delgada capa límite en la cual la velocidad del fluido relativa al cuerpo pasa de su valor externo a 0. Debido a esta rápida variación de \mathbf{v} el cuerpo está sometido a un arrastre viscoso. Pero para calcularlo no podemos usar la (12), que se funda en el Teorema de Bernoulli que vale en el grueso del flujo donde se ignora μ , y además no conocemos el espesor de la capa límite. El cálculo correcto requiere usar la teoría de la capa límite, cuyo resultado fundamental es que el espesor de la misma es del orden de $l/\sqrt{\mathcal{R}}$.

En cuanto a la parte de \mathbf{F} ortogonal a $\hat{\mathbf{x}}$, o sea la sustentación, observemos que para que exista es preciso que la distribución de presiones sobre la superficie del móvil no sea simétrica, lo que implica que el campo de velocidades en las proximidades del cuerpo debe ser asimétrico.

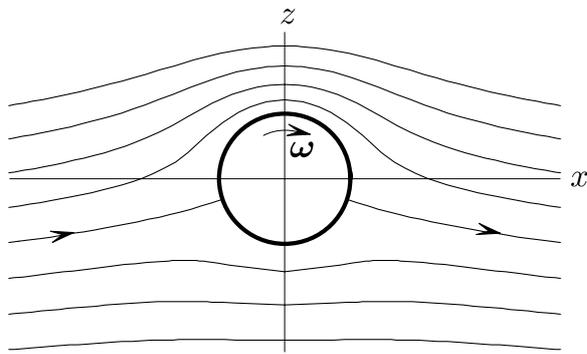


Figura 2: Esfera rotante (radio R) que se desplaza en un fluido.

¿Cómo se consigue esto? Consideremos una esfera que rota con una velocidad angular ω perpendicular a \mathbf{u} (Fig. 2). La superficie de la esfera tiene una velocidad \mathbf{v}_s cuya magnitud varía de 0 en los polos a $v_e = \omega R$ en el ecuador, y arrastra en su movimiento al fluido en contacto con la misma. Claramente, el plano definido por \mathbf{u} y ω divide la esfera en dos mitades en una de las cuales $(\mathbf{v}_s)_x$ es paralela a \mathbf{u} mientras que en la otra es antiparalela.

El campo de velocidades en el fluido es asimétrico ya que en la primera mitad \mathbf{v}_s y \mathbf{u} se suman mientras que en la otra se restan. Por lo tanto aparece una diferencia de presión entre ambas mitades que da lugar a una fuerza cuya dirección y sentido es el de $\mathbf{u} \times \omega$. La magnitud de la sustentación se puede estimar por medio del análisis dimensional. De momento que $\mathcal{R} \gg 1$ las magnitudes dimensionales del problema son F_s , R , u , ρ_f , ω . Con estos parámetros se pueden formar dos combinaciones adimensionales, por ejemplo $\Pi_1 = \omega R/u$ y $\Pi_2 = F_s/\rho_f u^2 R^2$, de modo que en principio tendremos que $\Pi_1 = \psi(\Pi_2)$. Sin embargo la función ψ no puede ser cualquiera puesto que F_s resulta de la diferencia de presiones, que a su vez proviene de la diferencia de velocidades. Por lo tanto en la expresión de F_s , los parámetros u y $v_e = \omega R$ tienen que aparecer con el mismo exponente. Esto implica que $\Pi_1 = K\Pi_2$ donde K es un número. Resulta entonces que

$$\mathbf{F}_s = K\rho_f R^3 \mathbf{u} \times \omega \quad (13)$$

V. EL COEFICIENTE DE SUSTENTACIÓN

Del mismo modo que para el arrastre el coeficiente de sustentación se define como

$$C_s = \frac{F_s}{\frac{1}{2}\rho_f u^2 S_\perp} \quad (14)$$

En términos de C_s la fuerza de sustentación es

$$F_s = \frac{1}{2}C_s \rho_f u^2 S_\perp \quad (15)$$

Para un esfera rotante [2] se tiene

$$C_s = \beta \frac{v_e}{u}, \quad \beta = \frac{\pi K}{2} \quad (16)$$

Mediciones en túnel de viento muestran que $\beta \cong 0.355$ para $v_e/u < 1$.

No es preciso que el móvil esté rotando para que haya sustentación. En efecto, si su forma es adecuada, el movimiento mismo del cuerpo puede generar la diferencia de presiones necesarias. Esto es lo que ocurre con las alas de los aviones y de las aves.

VI. LA PELOTA DE FÚTBOL ¿DOBLA O NO?

El lector puede encontrar en [3] una reseña sobre la aerodinámica de pelotas usadas en diferentes deportes (que sin embargo no incluye la de fútbol). Ver también [4, 5]. Una discusión cualitativa de los efectos para la pelota de fútbol se puede ver en la web [6].

Una pelota de fútbol tiene un radio entre 10.8 y 11.3 cm y masa m entre 400 y 450 g. Un tiro fuerte puede salir disparado con una velocidad inicial u_0 entre 15 y 20 m/s. Para el primer valor se tiene $\mathcal{R} = 2 \times 10^5$ de donde resulta $C_a \approx 0.5$. Supongamos que el jugador pateó la pelota con chanfle y que ésta gira a f vueltas por segundo, luego $v_e = 2\pi Rf$. Notar que C_s varía a lo largo de la trayectoria puesto que u es variable. Averiguaremos los efectos del arrastre y la sustentación sobre la trayectoria de la pelota, que suponemos lanzada con un ángulo de elevación θ_0 . La fuerza sobre la misma es $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_s$ y por lo tanto la aceleración es

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -g\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F}_a/m + \mathbf{F}_s/m \\ &= -g\hat{\mathbf{z}} - \frac{3}{8}C_a \frac{m_f u^2}{mR} \hat{\mathbf{u}} - \frac{3}{8}\beta \frac{m_f u v_e}{mR} \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\omega} \end{aligned} \quad (17)$$

Aquí $m_f = 4\pi\rho_f R^3/3$ es la masa de aire desplazada por la pelota y $S_\perp = \pi R^2$. El signo de los dos últimos términos se debe a que aquí \mathbf{u} es la velocidad de la pelota, pues estamos observando el movimiento desde el referencial del estadio mientras que en (15) \mathbf{u} es la velocidad del aire en el referencial de la esfera. Notar que $F_s/F_a \approx v_e/u$ es mayor donde u es menor. Debido a la sustentación la pelota sufre una aceleración cuya dirección es $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\omega} \times \hat{\mathbf{u}}$, que cambia la dirección pero no el módulo de la velocidad.

Para poner en evidencia las modificaciones que el arrastre y la sustentación introducen respecto del tiro oblicuo en el vacío escribiremos las (17) en términos de invariantes, introduciendo las escalas características $t^* = \sqrt{2}u_0/g$, $l^* = u_0^2/g$ y $u^* = u_0$ y pondremos $u = Uu^*$, $t = Tt^*$, etc. Con esto las (17) toman la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\mathbf{U}}{dT} = -\hat{\mathbf{z}} - AC_a U^2 \hat{\mathbf{U}} - A\beta_s UV \hat{\mathbf{U}} \times \hat{\omega} \quad (18)$$

donde $V = v_e/u_0$ da cuenta de la rotación de la pelota y

$$A(u_0, \rho_f, D) = \frac{3 m_f l^*}{8 m R} \quad (19)$$

es un parámetro constante. Es razonable suponer que v_e (y por lo tanto V) se mantiene constante durante el movimiento, ya que el aire frena muy poco la rotación.

Para entender la naturaleza de los efectos bastará estudiar el caso particular en que el eje de rotación es vertical. Conviene usar coordenadas esféricas U, θ, φ en el espacio de la velocidad, definiendo $U_x = U \cos \theta \cos \varphi$, $U_y = U \cos \theta \sin \varphi$ y $U_z = U \sin \theta$. De (18) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dU}{dT} &= -\sin \theta - AC_a U^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\theta}{dT} &= -\frac{\cos \theta}{U} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{dT} &= A\beta V \end{aligned} \quad (20)$$

La primera de estas ecuaciones nos dice que U varía por dos causas: el efecto de la componente de la gravedad en la dirección de \mathbf{U} (que tiende a disminuir U cuando la pelota asciende y aumentarlo en el descenso) y del arrastre, que siempre reduce U . La segunda ecuación nos dice que la componente de la gravedad perpendicular a \mathbf{U} tiende a curvar hacia abajo la trayectoria. La tercera ecuación describe el efecto de la sustentación. Si la pelota no gira ($V = 0$) esta ecuación nos dice que la trayectoria está en el plano $(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u}_0)$. Si la pelota gira la trayectoria no es plana. La última ecuación se puede integrar de inmediato. Si $\varphi_0 = \varphi(0) = 0$ resulta

$$\varphi = \sqrt{2} A\beta VT = \frac{3\pi\beta m_f}{4\sqrt{2} m} ft \quad (21)$$

VII. DISCUSIÓN

El sistema de ecuaciones para U y θ se tiene que integrar numéricamente. El resultado se muestra en la Fig. 3. Observando esta figura se nota que el efecto de la resistencia del aire es muy importante, ya que el alcance del tiro al nivel del mar es apenas el 55% del que tendría un tiro en el vacío. A 4000 m de altura la densidad del aire (y por lo tanto la fuerza de arrastre) es bastante

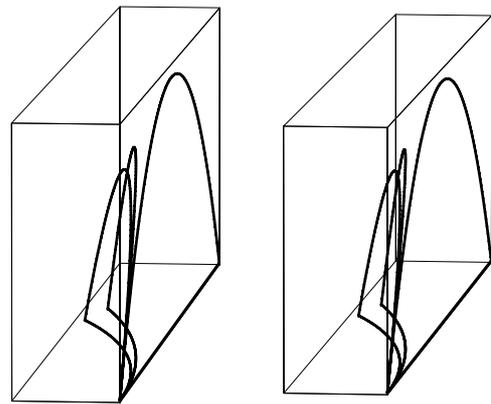


Figura 3: Trayectorias de una pelota pateada con chaffle. Mirando cada figura con un ojo se puede ver una imagen tridimensional. Se muestran tres trayectorias calculadas numéricamente, todas con $\theta_0 = \pi/4$, $\varphi_0 = 0$ y con la misma \mathbf{u}_0 . La de mayor alcance corresponde a un tiro en el vacío, la de menor alcance corresponde a $\rho_f = 0.00120 \text{ g/cm}^3$ que es la densidad del aire al nivel del mar y la de alcance intermedio a $\rho_f = 0.0008194 \text{ g/cm}^3$, que es la densidad del aire a 4000 m de altura. Se representan también las proyecciones verticales de las trayectorias. Para que se apreciara mejor el efecto de la sustentación supusimos $f = 12 \text{ s}^{-1}$, un valor un tanto grande; valores más realísticos reducen la escala horizontal transversal a \mathbf{u}_0 , manteniendo la relación entre los ángulos de desviación.

menor que al nivel del mar y por ese motivo el alcance es un 20% mayor. En cuanto al efecto de la sustentación, a igual distancia horizontal recorrida por la pelota, la desviación del tiro al nivel del mar es aproximadamente el doble de la que corresponde al tiro en la altura.

Consideramos en conclusión que es posible y aconsejable introducir las nociones de arrastre y sustentación en los cursos elementales de Física, ya que ésto se puede hacer en forma sencilla y accesible para los estudiantes de ese nivel. Asimismo el conocimiento de estas fuerzas permite estudiar interesantes fenómenos cotidianos y así mostrar aplicaciones prácticas de la Física, como el ejemplo que hemos tratado.

Agradecemos los subsidios PIP 02230 del CONICET, X031 de la Universidad de Buenos Aires y PICTR2002-00094 de la ANPCYT. CAP agradece el apoyo de la Fundación Universitaria Dr. R. G. Favaloro.

-
- [1] Ver por ejemplo L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos*, Volumen 6 del Curso de Física Teórica. Reverté S.A. 1991.
 [2] P. Gerhart, R. Gross y J. Hochstein, *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*, Addison Wesley Iberoamericana S.A., Wilmington, Delaware, USA, 1992.
 [3] R.D. Mehta, Aerodynamics of sports balls, Ann. Rev. Flu-

- id Mech. **17**, 151–189, 1985.
 [4] C.B. Daish, *The Physics of Ball Games*, The English University Press, London, 1972.
 [5] S.J. Haake (ed), *The Engineering of Sport*, A.A. Balkema, Rotterdam, 1996.
 [6] <http://physicsweb.org/articles/world/11/6/8/1>.