

SOBRE LA GENERACIÓN DE PERTURBACIONES EN PREDICCIÓN POR CONJUNTOS EN SISTEMAS ATMOSFÉRICOS.

Ferri, G. L.¹

¹Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa
Uruguay 151 – (6300) Santa Rosa - Argentina
e-mail: glferri@exactas.unlpam.edu.ar

Usamos el sistema de Lorenz como “toy model” de modelos meteorológicos para simular el ciclo de análisis y estudiar la eficiencia relativa de dos métodos para generar perturbaciones en la dirección de máximo crecimiento: vectores singulares, y “vectores criados” (bred vectors). Se muestra que los vectores criados tienden a coincidir con el primer vector singular. El método de “vectores criados” selecciona las direcciones de máximo crecimiento de la misma manera que lo hace el de vectores singulares. El primer método es tan eficaz como el segundo, pero más eficiente para sistemas grandes, dado que requiere mucho menos volumen de cálculo.

The Lorenz system was used as ‘toy model’ of atmospheric systems for to simulate the analysis cycle of the atmosphere. Also we compare the relative efficiency of the two methods designed to generate fast-growing perturbations: bred vectors and singular vectors. Both are equivalent in that task, but bred vectors require much less volume of calculus

I. INTRODUCCIÓN

El pronóstico del tiempo se obtiene integrando en el tiempo, modelos de la atmósfera que, dadas las observaciones meteorológicas de hoy, pueden simular la evolución de la atmósfera en los próximos días. La integración temporal de un modelo atmosférico es un problema de valores iniciales. Lograr un buen pronóstico del tiempo requiere tanto de un modelo que sea una representación realista de la atmósfera, como de condiciones iniciales precisas.

La atmósfera y sus modelos numéricos son sistemas caóticos. Perturbaciones iniciales arbitrariamente pequeñas evolucionan en el tiempo haciéndose tan grandes como el tamaño del atractor [1]. En lo que concierne a sistemas físicos reales, su estado nunca puede medirse exactamente. Por ejemplo, el análisis que se haga de la atmósfera en un determinado momento, contiene errores que sólo pueden estimarse. Los errores en el análisis se deben a (a) errores en las mediciones; (b) errores en la “primera conjetura” –ver más adelante-; (c) falta de una cobertura completa de datos; y (d) aproximaciones en las técnicas de análisis [2]. Aún con un modelo perfecto de la atmósfera, la eficacia de un pronóstico se degrada totalmente al cabo de unas pocas semanas.

Desde hace ya tiempo se conoce [3] que si se corren un conjunto de pronósticos, iniciados en condiciones iniciales ligeramente perturbadas, el promedio sobre el conjunto puede ser un pronóstico de mejor calidad que si se corre uno solo partiendo de las condiciones iniciales medidas. Para que ello ocurra deben darse dos condiciones: Primero, el modelo que usemos debe ser realista. En lo que sigue, supondremos un

modelo perfecto. La segunda condición es que el conjunto, al tiempo inicial, debe ser representativo de la incerteza en el análisis.

Uno de los aspectos cruciales de la predicción por conjuntos es la generación de perturbaciones iniciales. Estas perturbaciones deben ser una muestra realista de los errores posibles en el análisis inicial. La cantidad de miembros del conjunto está limitada por la capacidad computacional, por lo tanto es importante que este número limitado de perturbaciones sean una muestra óptima de la distribución inicial de probabilidades del error. Entre todos los posibles errores, los más importantes son los que apuntan en las direcciones de más rápido crecimiento del error [4].

Se usan dos métodos para seleccionar un conjunto de perturbaciones representativas del error de análisis: El de los *vectores singulares*, usado por el Centro Europeo para Pronósticos Meteorológicos de Rango Medio (ECMWF, por sus siglas en inglés), y el de los *vectores criados* (*bred vectors*), usado por el Centro Nacional de Predicciones Medioambientales, en Estados Unidos (NCEP, por sus siglas en inglés).

En la sección 2 de este trabajo, describimos ambos métodos, y en la sección 3 usamos sistemas lineales sencillos, de baja dimensión, tales como el de Lorenz o el de Roessler como ‘toy models’ para comparar numéricamente la efectividad de cada uno.

II. PREDICCIONES POR CONJUNTOS

El *análisis* de la atmósfera es la mejor estimación que puede hacerse de su estado en un tiempo dado. La integración de un modelo numérico iniciado en el análisis a un tiempo t_0 , es el *pronóstico de control*, y el análisis en t_0 , es el *análisis de control*. Si agregamos al análisis de control una pequeña perturbación, tenemos un *análisis perturbado*, y la integración del modelo numérico iniciado en el análisis perturbado es un *pronóstico perturbado*. Integrando varios pronósticos, iniciados en distintos análisis perturbados, tenemos un *conjunto de pronósticos*, y el promedio de ellos es el *pronóstico por conjunto* ('*Ensemble forecast*').

En 1974, Leith [3] demostró que el promedio sobre un conjunto puede producir un pronóstico superior al pronóstico de control, siempre y cuando las perturbaciones del conjunto sean representativas del tipo de errores que contiene el análisis de control. Estudios posteriores con modelos de diferente sofisticación confirmaron los resultados de Leith [5,2].

En el conjunto de perturbaciones iniciales, debemos representar adecuadamente la distribución de probabilidades del estado de la atmósfera alrededor de la estimación que tenemos de su estado, el análisis de control. La forma de esta distribución de probabilidades dependerá de qué clase de errores tenemos en el análisis de control. Cuanto más probable sea un tipo de error, con mayor probabilidad le adicionamos este error al análisis.

(a) Ciclo de análisis

En un ciclo de análisis típico de 6 horas, un modelo global se integra durante un período corto de tiempo (6 horas) partiendo de condiciones iniciales dadas por un análisis atmosférico previo. Este pronóstico de 6 horas sirve como *primera conjetura* para el próximo análisis. El próximo análisis es un promedio pesado de: (1) observaciones recolectadas en una ventana de ± 3 horas centrada en el tiempo de validez del pronóstico y (2) el pronóstico dinámico de corto rango o primera conjetura, iniciado en el análisis anterior. Este ciclo se corre cuatro veces por día, todos los días. (fig. 1 y 2). De esta forma, el modelo actúa como un transportador de información desde regiones ricas en datos hacia regiones pobres en datos, y por lo tanto provee una buena estimación del estado real de la atmósfera aún para aquellas regiones donde no hay observaciones [2].

El uso reiterado del modelo para producir las primeras conjeturas tiene un efecto dinámico importante en el análisis. El ciclo de análisis puede considerarse como la corrida del modelo sobre una perturbación del estado verdadero de la atmósfera. La amplitud de la perturbación se mantiene pequeña por el re-escalo periódico (cada 6 horas) mediante el uso de los datos observacionales. Es inevitable, entonces, que

los errores introducidos en cada etapa del análisis,

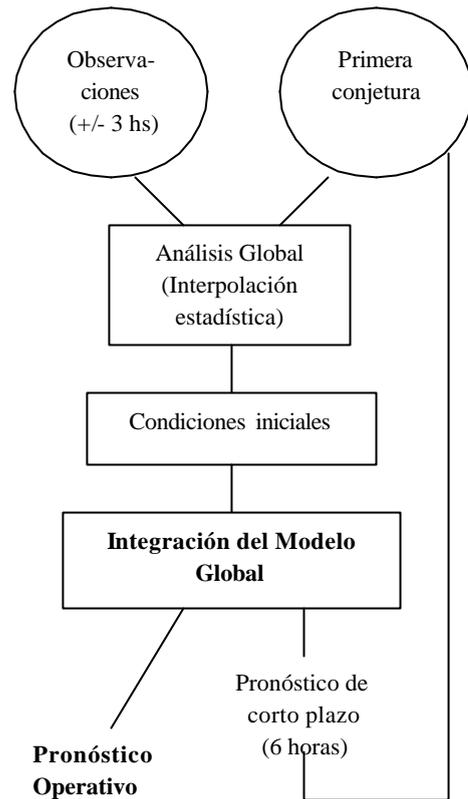


Fig. 1. Diagrama de flujo de la asimilación de datos durante el ciclo de análisis.

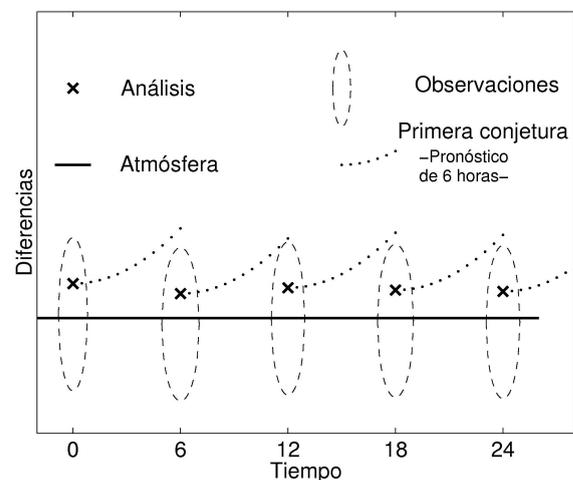


Figura 2: Representación esquemática del ciclo de análisis de 6 horas. En el eje vertical se indican las diferencias entre el estado verdadero de la atmósfera y el análisis, y el pronóstico de él. Notar que la diferencia entre el verdadero estado de la atmósfera (o las observaciones) crece con el tiempo, debido al tipo de errores en el análisis inicial.

al incorporar los datos, se proyecten sobre las direcciones crecientes del flujo atmosférico en tiempos posteriores. Esto es porque las componentes del error en direcciones de crecimiento rápido (de expansión del atractor), se amplifican

rápido, mientras que las componentes en dirección de decaimiento (de contracción del atractor) pierden su amplitud rápidamente en el corto rango de la primera conjetura. Y como *los datos observacionales no son suficientes para determinar el estado de la atmósfera*, estos errores, que evolucionan dinámicamente no pueden ser quitados en el próximo análisis. Así, en el comienzo del próximo pronóstico de corto rango en el ciclo de análisis, los errores que han evolucionado dinámicamente ya están presentes en las condiciones iniciales listos para amplificarse de nuevo. Esto es especialmente cierto sobre las regiones donde los datos son muy dispersos, como por ejemplo, sobre los océanos. El resultado es que el análisis contiene ambos tipos de errores: (1) los aleatorios introducidos por las observaciones más recientes; y (2) los errores crecientes, asociados con las inestabilidades del flujo, generados dinámicamente (a partir de errores aleatorios introducidos en análisis previos) mediante el uso repetido de los pronósticos de corto rango.

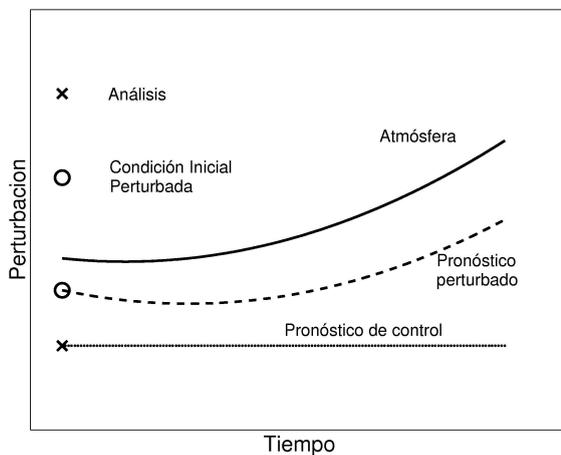


Figura 3: Ilustración esquemática de los componentes básicos de un pronóstico por conjuntos.

Si pudiéramos descomponer los errores presentes en el análisis y seguir su evolución, veríamos que los errores aleatorios, introducidos en la última etapa del análisis por las incertezas observacionales, decaen inicialmente antes de proyectarse sobre las direcciones crecientes de la evolución del flujo, después de uno o dos días. Por el contrario, los errores crecientes se amplifican desde el primer momento de modo que son los principales responsables del crecimiento del error en el corto rango. Esto significa que, aún cuando los errores crecientes constituyen sólo una porción del campo total de errores de análisis, su contribución es relativamente más importante en la evolución del error de pronóstico.

Hay una segunda razón, de índole práctica, que también sugiere ignorar el efecto de los errores aleatorios en el análisis. Los errores estocásticos tienen tan alto número de grados de libertad que aunque se quisiera no se podrían muestrearlos adecuadamente con un número finito de perturbaciones. La conclusión es que debemos *perturbar las condiciones iniciales a lo largo de los errores crecientes presentes en el análisis*.

En la fig. 3 se muestran esquemáticamente todos los componentes de una predicción por conjuntos: (a) Un análisis de control y un pronóstico numérico iniciado en él; (b) Una perturbación de este análisis y el pronóstico perturbado correspondiente y (c) La “verdadera” evolución de la atmósfera.

En primer lugar hay que señalar que el análisis difiere de la “verdad” (que no puede conocerse exactamente). En segundo lugar, el pronóstico de control se aparta de la evolución verdadera desde el principio. Esta divergencia inicial es una evidencia empírica de la existencia de errores de crecimiento rápido en el análisis. En tercer lugar hay que señalar que si introducimos una perturbación aleatoria en el análisis de control, los dos pronósticos (el de control y el perturbado) convergen inicialmente.

Perturbar el análisis de control con un campo de errores de crecimiento rápido puede parecer a primera vista que va en contra del objetivo de mejorar un pronóstico numérico. Pero el objetivo de los pronósticos por conjuntos, es que *la evolución verdadera de la atmósfera debe ser un posible miembro del ensemble*. En otras palabras, debemos introducir perturbaciones similares al error real en el análisis. Está claro que este objetivo no puede lograrse con perturbaciones aleatorias. Los pronósticos perturbados aleatoriamente no pueden capturar la divergencia rápida inicial entre la verdadera evolución de la atmósfera y el pronóstico de control. Después de 2-3 días los pronósticos perturbados se apartan del control pero a ese tiempo la atmósfera verdadera ya ha divergido notablemente de ambos pronósticos.

En resumen, las perturbaciones en el conjunto deben representar los errores crecientes en el análisis. Si hacemos esto, podemos lograr uno de los principales objetivos de las predicciones por conjuntos, que es *reducir el crecimiento no lineal del error en el promedio del conjunto*.

(b) Vectores singulares

Los vectores singulares dominantes del propagador lineal integral para un sistema dinámico no lineal proveen información acerca del crecimiento máximo de una perturbación durante un intervalo finito de tiempo, y puede usarse para estimar la evolución de errores iniciales presentes en el análisis. [7,8,9].

Sea X el vector de estado de un sistema autónomo, cuya evolución temporal puede escribirse formalmente:

$$\frac{dX}{dt} = A(X) \tag{1}$$

y designemos con $X(t)$ una integración de (1) desde t_0 hasta t que genera una trayectoria desde un punto inicial $X_0 = X(t_0)$ hasta $X_1 = X(t)$.

La evolución temporal de una pequeña perturbación δX a lo largo del tiempo en que evoluciona la trayectoria $X(t)$ puede describirse, en primera aproximación por las ecuaciones linealizadas

$$\frac{d \mathbf{dX}}{dt} = J(X) \mathbf{dX} \quad (2)$$

donde $J(X) = \left. \frac{\partial A(X)}{\partial X} \right|_{X(t)}$ es el operador tangente, Jacobiano,

de $A(X)$ calculado en el punto $X(t)$ de la trayectoria. Para cada t , $J(X)$ toma un valor distinto sobre la trayectoria no lineal.

Sea $L(t, t_0)$ el propagador integral de las ecuaciones dinámicas linealizadas, a lo largo de la trayectoria no lineal $X(t)$, que “mapea” una perturbación inicial \mathbf{dK} en el instante t_0 al tiempo de optimización t .

$$\mathbf{dK}(t) = L(t, t_0) \mathbf{dK}(t_0), \quad (3)$$

donde

$$L(t_0, t) = \exp \int_{t_0}^t J(t') dt' \quad (4)$$

(integrado sobre la trayectoria no lineal).

Sea $\|\mathbf{dX}(t)\|^2 = \langle \mathbf{dX}(t), \mathbf{dX}(t) \rangle$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea, y $\langle \dots, \dots \rangle$ es el producto escalar euclídeo. Usando (3) y la ortogonalidad del propagador lineal:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{dX}(t)\|^2 &= \langle L(t, t_0) \mathbf{dK}(t_0), L(t, t_0) \mathbf{dK}(t_0) \rangle \\ &= \langle \mathbf{dK}(t_0), L^* L \mathbf{dK}(t_0) \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

Lo que interesa es encontrar la dirección en la cual $\|\mathbf{dX}(t)\|^2 / \|\mathbf{dK}(t_0)\|^2$ es máxima. Este problema es equivalente a buscar los autovectores $\mathbf{v}_i(t_0)$ de:

$$L^* L \mathbf{v}_i(t_0) = \mathbf{s}_i^2 \mathbf{v}_i(t_0) \quad (6)$$

Correspondientes a los mayores autovalores \mathbf{s}_i^2 .

Las raíces cuadradas de los autovalores, \mathbf{s} son los *valores singulares*, y los autovectores \mathbf{v}_i son los *vectores singulares* de L . Los vectores singulares correspondientes a los máximos valores singulares identifican las direcciones caracterizadas por un crecimiento máximo. El intervalo de tiempo $t - t_0$ se llama el *tiempo de optimización*. A diferencia de L , el operador $L^* L$ es normal. Por lo tanto, sus autovalores son reales, $\mathbf{s}_i^2 \geq 0$, y sus autovectores $\mathbf{v}_i(t_0)$ se pueden elegir para formar una base ortonormal completa en el espacio n -dimensional tangente de las perturbaciones en X_0 . Aplicando la ecuación (5) a los vectores singulares,

$$\|\mathbf{v}_i(t)\|^2 = \langle \mathbf{v}_i(t_0), L^* L \mathbf{v}_i(t_0) \rangle = \mathbf{s}_i^2 \|\mathbf{v}_i(t_0)\|^2 = \mathbf{s}_i^2 \quad (7)$$

Como cualquier perturbación $\mathbf{dK}(t)$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores singulares se sigue que, si ordenamos a éstos en forma decreciente según el valor de \mathbf{s}

$$\max \left(\frac{\|\mathbf{dK}(t)\|^2}{\|\mathbf{dK}(t_0)\|^2} \right) = \mathbf{s}_1 \quad (8)$$

si el máximo crecimiento está asociado con el vector singular dominante \mathbf{v}_1 que, en el espacio de las fases señala en la dirección de más rápido crecimiento de una perturbación

Las características de los vectores singulares dependen fuertemente de la definición de producto interno y de la elección del intervalo de tiempo de optimización.

(c) *Vectores ‘criados’ (bred vectors)*

Uno de los métodos para crear perturbaciones realistas es el llamado *crianza de los modos crecientes* ó BGM [2,6] (Por las siglas en inglés de *breeding growing modes*) que ha sido designado así, recordando cómo los errores en las direcciones de crecimiento rápido son inadvertidamente criados en el ciclo de análisis.

Sea X_c la mejor estimación del estado del sistema al tiempo t . (Análisis de control). El método de “Crianza de perturbaciones de crecimiento rápido” consiste en:

- Agregar una perturbación pequeña arbitraria a X_c .
- Integrar el sistema durante un tiempo breve t_b (6 horas en modelos atmosféricos) a partir de la condición inicial no perturbada X_c (control) y de la condición perturbada, $X_p = X_c + \text{perturbación}$.
- Restar el pronóstico para el tiempo t_b del control, del pronóstico al tiempo t_b de la condición inicial perturbada: $X_p(t_b) - X_c(t_b)$
- Reescalar la diferencia de modo que tenga la misma amplitud que la perturbación inicial. Esta perturbación es ahora agregada al análisis de las siguientes 6 horas, como en (a), y el proceso se repite hacia delante en el tiempo.

Este modelo selecciona (“cría”) los modos que crecen más rápido durante el ciclo. Tres o cuatros días después de iniciado el ciclo de crianza, el ritmo de crecimiento de la perturbación alcanza un nivel de saturación.

Para obtener un vector que señale la dirección de máximo crecimiento de una perturbación del sistema X en el tiempo t_0 , la crianza de vectores arranca en un tiempo $t_1 = t_0 - \text{algunos días}$. Se agrega una pequeña perturbación arbitraria al análisis en t_1 :

$$X_p(t_1) = X_c(t_1) + \text{perturbación} \quad (9)$$

y se integra el sistema no lineal desde $X_c(t_1)$, y desde $X_p(t_1)$ obteniendo así un pronóstico de control para las próximas 6 horas, $X_{c,1}(t)$, y un pronóstico perturbado $X_{p,1}(t)$, también para las próximas 6 horas.

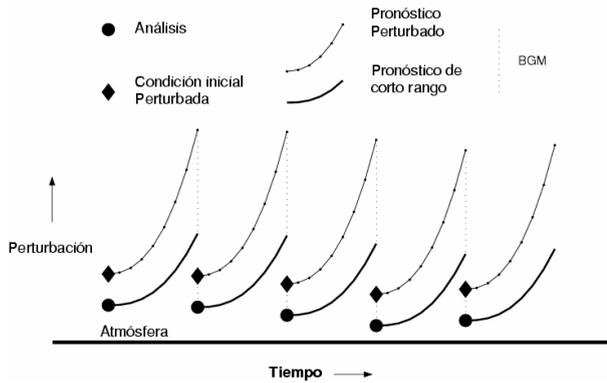


Figura 4. Representación esquemática del ciclo de crianza. Observar que el ciclo de crianza depende del ciclo de análisis, pero no lo afecta. Se introduce inicialmente una pequeña perturbación arbitraria en el análisis de control. Después de un tiempo corto de integración, la diferencia entre el pronóstico de control y el pronóstico perturbado es reescalado al tamaño de la perturbación inicial, y esta diferencia es añadida al nuevo análisis. Después de un tiempo, (3 ó 4 días en sistemas atmosféricos), la perturbación está dominada por los modos crecientes, debido a una “selección natural” de perturbaciones de crecimiento rápido.

Una perturbación elegida arbitrariamente es combinación lineal de los modos singulares. La evolución no lineal de la perturbación la proyecta sobre los modos singulares de crecimiento más rápido. La perturbación se mantiene pequeña por los sucesivos reescalos, y al cabo de tres o cuatro días es una combinación lineal, sólo de los modos singulares de crecimiento más rápido. Fig. 4.

En $t_2 = t_1 + 6$ horas, hay un nuevo análisis (obtenido del modo indicado en la sección anterior), $X_c(t_2)$. La nueva perturbación para este estado se calcula normalizando a la amplitud de la perturbación inicial, la diferencia $X_{p,1}(t_2) - X_{c,1}(t_2)$. Se inicia entonces una nueva integración del sistema no lineal durante las próximas 6 horas, partiendo de $X_c(t_2)$, (pronóstico de control) y desde $X_c(t_2) +$ nueva perturbación, (pronóstico perturbado). Esta operación se repite hasta t_0 . La diferencia normalizada al final de las dos últimas integraciones es el BGM (“Bred growing mode”)

De la forma en que están contruidos los vectores criados, están estrechamente relacionados con los vectores de Lyapunov. En efecto, luego de un tiempo de crianza infinitamente largo, usando amplitudes infinitesimales, los vectores criados coinciden con los vectores de Lyapunov. El hecho de que los vectores criados tengan amplitud finita, provee una forma natural de filtrar inestabilidades presentes en el sistema que tienen crecimiento rápido pero que saturan no linealmente a amplitudes tan pequeñas que son irrelevantes para perturbaciones en el conjunto.

III – SIMULACIONES NUMÉRICAS

Para las simulaciones usamos como modelo atmosférico el sistema de Lorenz,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s x + s y \\ -x z + R x - y \\ x y - b z \end{bmatrix} \quad (10)$$

con $s = 10$; $R = 28$, y $b = 8/3$. Con estos valores de los parámetros s , R y b , el sistema tiene un atractor caótico, que es la bien conocida “mariposa” de Lorenz, un objeto de geometría fractal, cuya dimensión es 2.09.

(a) Vectores singulares

Para calcular los vectores singulares, integramos el Jacobiano del sistema de Lorenz, ec.(4) en pasos de integración de un millonésimo de unidad temporal, entre un tiempo inicial t , y un tiempo final $t +$ un milésimo de unidad temporal. Para obtener el propagador $L(t_0, t)$, se componen sucesivamente los propagadores $L(t, t + 0.001)$. Finalmente calculamos los autovectores y autovalores de L^*L , y designamos con v_1 al autovector correspondiente al mayor autovalor, y con v_2 y v_3 a los autovectores correspondientes a los otros autovalores, en orden decreciente. El valor usado para el tiempo de optimización fue de dos unidades temporales.

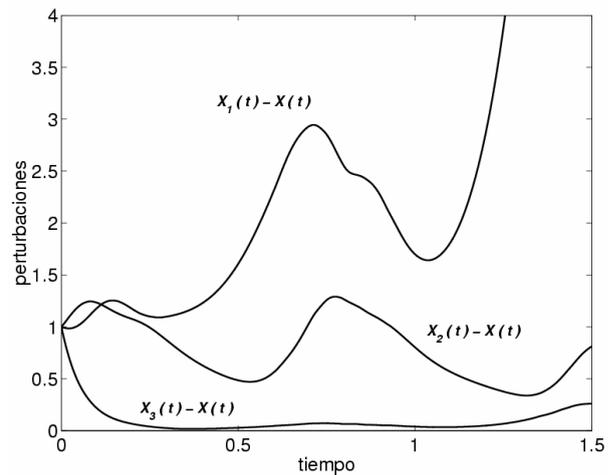


Figura 5. Evolución de perturbaciones en las direcciones de los vectores singulares, para el sistema de Lorenz

(b) Evolución de las perturbaciones

Seleccionamos en el atractor de Lorenz un punto X_0 , que lo obtenemos integrando el sistema desde una condición inicial cualquiera, durante 300 unidades temporales, y tomamos el valor final obtenido. De ese modo nos aseguramos que X_0 esté en el atractor. Integramos el sistema a partir de X_0 para obtener una trayectoria de referencia, $X(t)$. Luego adicionamos a X_0 perturbaciones en las direcciones de los tres vectores singulares, con módulo igual a uno, e integramos, con inicio en $X_i = X_0 + v_i$, $i = 1, 2, 3$, tres trayectorias perturbadas, $X_i(t)$. En la figura 5 mostramos cómo evoluciona la diferencia $|X_i(t) - X(t)|$ para las tres trayectorias perturbadas, donde podemos observar que la perturbación inicial en la dirección del vector singular principal crece mucho más rápidamente que las otras dos.

(c) Simulación del Ciclo de Análisis

Sea $X_1 = X(t_1)$ el comienzo del ciclo de análisis, y $X_0 = X(t_0)$, el final del mismo, y comienzo del pronóstico. Para obtener X_1 se integró el sistema de Lorenz durante 300 unidades temporales partiendo de cualquier condición inicial, en pasos de un milésimo, quedándonos con el valor obtenido al final de la integración. Se eligió $t_0 = t_1 + 8$. La integración entre X_1 y X_0 es la trayectoria de referencia. Esta trayectoria representa el estado ‘verdadero’ del sistema. Al intervalo (t_1, t_0) lo dividimos en diez subintervalos de longitud $t_b = 0.5$. Para cada instante $t_1 + nt_b$ agregamos a la trayectoria de referencia un *error de medición* con números aleatorios de distribución gaussiana con desviación estándar igual a 0.5. Se obtuvo así la trayectoria ‘medida’, X_{med} .

Integramos el sistema desde t_1 , en el punto $X_{med}(t_1) = X_1 + \text{error de medición}$ hasta $t_1 + t_b$, obteniendo así la “primera conjetura” para el sistema en $t_1 + t_b$. El análisis en ese instante lo calculamos simplemente como

$$\text{análisis}(t_1 + t_b) = \frac{X_{med}(t_1 + t_b) + \text{primera conjetura}(t_1 + t_b)}{2} \quad (11)$$

A continuación se integra el sistema entre $t_1 + t_b$ y $t_1 + 2t_b$, iniciando la integración en $\text{análisis}(t_1 + t_b)$. Obteniendo, por el mismo procedimiento $\text{análisis}(t_1 + 2t_b)$. El proceso se continúa hasta obtener $\text{análisis}(t_1 + 10t_b) = \text{análisis}(t_0)$, que es la mejor estimación que puede hacerse del estado del sistema en t_0 . Finalmente como en la simulación conocemos el estado ‘verdadero’ del sistema, podemos obtener el error de análisis en t_0 ,

$$\text{error de análisis}(t_0) = \text{análisis}(t_0) - X_0 \quad (12)$$

Dejando fijo el punto X_1 donde comienza el análisis, y cambiando los números aleatorios que simulan los errores de medición, se calcularon 500 errores de análisis en X_0 . Se calcularon los vectores singulares en $\text{análisis}(t_0)$, y se proyectaron los errores de análisis, normalizados a uno, sobre el plano v_1-v_2 , generado por los dos principales vectores singulares. El valor medio del módulo de esta proyección fue igual a 0.98, lo que evidencia que el *error de análisis* en X_0 se proyecta fuertemente sobre el plano v_1-v_2 definido por los vectores singulares que apuntan a las direcciones, en el espacio de fases, de mayor crecimiento de una perturbación. El experimento se repitió cambiando X_1 se obtienen patrones muy similares.

(d) Simulación del ciclo de “crianza”

Los vectores singulares exploran lo que hará el sistema desde $X_0 = X(t_0)$ en adelante mediante el propagador tangente. Los vectores “criados” portan información de lo que el sistema ha hecho antes de t_0 , el momento a partir del cual se quiere hacer el pronóstico. Seleccionamos un punto en el atractor, X_1 , e integramos el sistema partiendo desde X_1 , un tiempo T hacia adelante. El valor final de la integración es nuestro X_0 . La trayectoria así obtenida es la evolución “verdadera” del sistema antes de X_0 . Necesitamos conocer las direcciones de crecimiento máximo de una

perturbación allí, en X_0 . Cada T/n unidades temporales agregamos a la trayectoria de referencia un “error de análisis” con una amplitud de uno. Obtenemos así valores X_c que simulan la mejor estimación que puede tenerse de la evolución del sistema, y seguimos la “receta” detallada en el punto c) del capítulo anterior para obtener un “vector criado” al final del ciclo, en X_0 . En nuestro trabajo, hicimos $T = 4$, y $n = 10$. Este procedimiento lo repetimos 500 veces con distintas perturbaciones arbitrarias, y proyectamos los “vectores criados” sobre el plano $v_1 - v_2$, generado por los dos vectores singulares que señalan las direcciones de mayor crecimiento de una perturbación en X_0 . El promedio de las proyecciones sobre este plano es de 0.93. Y particularmente el promedio de las proyecciones sobre la dirección del principal vector singular v_1 es 0.89. Esto muestra que el “vector criado” es prácticamente equivalente al principal vector singular en cuanto a buscar la dirección de mayor crecimiento de una perturbación.

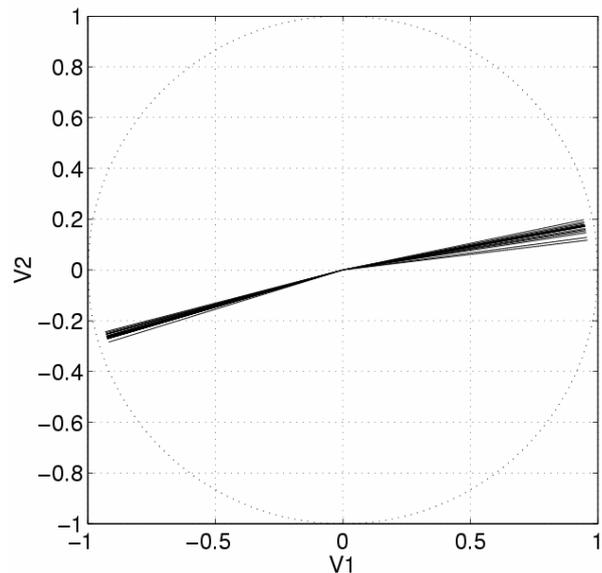


Figura 5. Vectores criados proyectados sobre el plano definido por los vectores singulares v_1 y v_2 . En la figura se muestran 500 vectores criados sobre el mismo intervalo cambiando los errores de análisis. Puede verse que el vector criado selecciona prácticamente la misma dirección que v_1 como la dirección de mayor crecimiento.

IV. CONCLUSIONES

Usamos el sistema no lineal de Lorenz como modelo simplificado de la atmósfera para reproducir el ciclo de análisis que brinda la mejor estimación que puede tenerse del estado de la atmósfera en un tiempo dado, y hemos visto que el error en el análisis no es aleatorio sino que es sesgado en la dirección de mayor rapidez de crecimiento de una perturbación.

Un pronóstico por conjunto requiere perturbar el análisis con perturbaciones que no sean aleatorias, sino que tengan el mismo sesgo que el error de análisis. Comparamos los dos métodos utilizados para seleccionar las direcciones de máximo crecimiento de una perturbación, y concluimos que el método

de “vectores criados” selecciona las direcciones de máximo crecimiento de la misma manera que lo hace el de vectores singulares. La diferencia está en el volumen de cálculo que sería necesario en un modelo meteorológico realista, que tiene muchísimas variables. Mientras que el método de vectores singulares requiere la diagonalización de una enorme matriz, en el de “vectores criados” es la propia dinámica no lineal del sistema la que “cria” perturbaciones en las direcciones de máximo crecimiento. El segundo método es—por tanto—tan eficaz como el primero, pero muchísimo más eficiente para sistemas grandes.

Repetimos las simulaciones con el sistema no lineal de Rössler, y obtuvimos idénticos resultados.

Referencias

- [1] Lorenz E. N. *J. Atmos. Sci.*, **20**, (1963), 130.
- [2] Z. Toth and E. Kalnay, *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **74**, (1993) 2317.
- [3] Leith, C. E., *Monthly Weather Rev.*, **102**, (1995), 409.
- [4] Ehrendorfer, M. and J. J. Tribbia, *J. Atmos. Sci.*, **122**, (1997), 286.
- [5] Houtekamer, P. L. and J. Derome, *Monthly Weather Rev.*, **122**, 2179.
- [6] Toth Z. and E. Kalnay, *Monthly Weather Rev.*, **125**, (1997), 3297.
- [7] Buizza, R. and T. N. Palmer *J. Atmos. Sci.*, **52**, (1995), 1069.
- [8] Buizza, Roberto. “*Chaos and weather prediction*”. Meteorological [Training Course Lecture Series – ECMWF] (2000), 1.
- [9] Buizza, R. and A. Montani, *J. Atmos. Sci.*, **56**, (1999), 2965.