

# Soluciones autosemejantes para flujos bidimensionales estacionarios sobre un plano inclinado

Carlos A. Perazzo<sup>1</sup> y Julio Gratton<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup>Universidad Favaloro, Solís 453, 1078, Buenos Aires, Argentina

<sup>2</sup>INFIP-CONICET, Dpto. de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pab. I, Buenos Aires, Argentina.

Mostramos que siempre y cuando el espesor de la corriente varíe suavemente (que es la condición de validez de la aproximación de lubricación) las ecuaciones que describen flujos viscogravitatorios estacionarios sobre un plano inclinado de un líquido con reología del tipo ley de potencia son formalmente análogas a las de la difusión no lineal no estacionaria en una dimensión. Esta analogía permite obtener una variedad de soluciones del primer problema dado que la difusión no lineal ha sido muy estudiada y se conocen numerosas soluciones. En este trabajo mostramos varias soluciones autosemejantes obtenidas de esta manera.

We show that whenever the thickness of the current varies slowly (which is the condition for the validity of the lubrication approximation) the governing equations for steady viscous gravity flows of a power-law liquid on an inclined plane are formally equivalent to those of unsteady nonlinear diffusion in one dimension. This analogy allows to derive a variety of solutions of the first problem since nonlinear diffusion has been widely investigated and many solutions are known. In this paper we describe several self-similar solutions obtained in this way.

## I. LA ANALOGÍA

Trataremos corrientes viscogravitatorias bidimensionales estacionarias sobre un plano inclinado en un ángulo  $\alpha$ . La reología del líquido está dada por

$$\tau_{ij} = 2AE^{(1-\lambda)/\lambda} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad E = (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}, \quad (1)$$

donde  $A$ ,  $\lambda$  son constantes positivas,  $\tau_{ij}$  y  $\dot{\epsilon}_{ij}$  son respectivamente las componentes del tensor de esfuerzos y de tasa de deformaciones ( $\lambda > 1$  para un líquido pseudo-plástico,  $\lambda < 1$  para uno dilatante y  $\lambda = 1$  para reología Newtoniana). Sean  $x$ ,  $y$  las coordenadas a lo largo y a través del plano y  $h(x, y)$  el espesor de la corriente. Despreciando la tensión superficial y usando la aproximación de lubricación se obtiene [1]

$$\left\{ q_x [q_x^2 + h_y^2]^{\frac{\lambda-1}{2}} h^{\lambda+2} \right\}_x + \left\{ h_y [q_x^2 + h_y^2]^{\frac{\lambda-1}{2}} h^{\lambda+2} \right\}_y = 0. \quad (2)$$

donde  $q = h - x \tan \alpha$ . Si se satisfacen las condiciones

$$|h_x| \ll |\tan \alpha|, \quad h_y^2 \ll \tan^2 \alpha \quad (3)$$

la ecuación (2) se reduce a

$$\tan \alpha (h^{\lambda+2})_x - (h_y h^{\lambda+2})_y = 0. \quad (4)$$

Las componentes medias  $x$  e  $y$  de la velocidad son

$$u = h^{\lambda+1} k \tan^\lambda \alpha, \quad v = -h_y h^{\lambda+1} k \tan^{\lambda-1} \alpha. \quad (5)$$

donde  $k = 2^{\frac{1-\lambda}{2}} (\lambda+2)^{-1} (A^{-1} \rho g \cos \alpha)^\lambda$ ,  $\rho$  es la densidad y  $g$  es la aceleración de la gravedad. El flujo a través de una sección  $x = \text{cte.}$  es  $q = \int u h dy$ .

Si  $X$ ,  $Y$ ,  $H$  son las escalas longitudinal, transversal y de espesor de la corriente, de la (4) resulta  $H \sim Y^2 X^{-1} \tan \alpha$  y las condiciones (3) se satisfacen si  $X \gg Y$  independientemente de  $\lambda$ .

Usaremos la notación  $\lambda_1 = \lambda+1$ ,  $\lambda_2 = \lambda+2$ ,  $\lambda_3 = \lambda+3$  y  $\lambda_5 = 2\lambda+5$ . Introduciendo en (4) una nueva variable dependiente  $\Phi$  definida por

$$\Phi = \tilde{h}^{\lambda_2}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{\lambda_2 \tan \alpha}, \quad (6)$$

obtenemos

$$\Phi_x = (\Phi^m \Phi_y)_y, \quad (7)$$

con  $m = 1/\lambda_2$  ( $m = 1/3$  para líquidos Newtonianos). La (7) es equivalente [2] a la ecuación de difusión no lineal en una dimensión con  $0 < m < 1/2$ , en la cual  $y$  es la (única) variable espacial y  $x$  juega el rol del tiempo. En el contexto de la difusión no lineal  $\Phi$  es la propiedad que difunde y  $M = \int \Phi dy$  es la cantidad total de  $\Phi$ .

Es habitual escribir la (7) en la forma

$$\Phi_x = -(\Phi S)_y, \quad \text{con } S = -\Phi^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \Phi_y, \quad (8)$$

que expresa la conservación de  $M$ . La cantidad  $S$  es la velocidad con que difunde  $\Phi$ .

Conviene mostrar las fórmulas siguientes:

$$u = k \lambda_2^{\lambda_1} (\tan \alpha)^{\lambda+\lambda_1} \Phi^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad (9)$$

$$v = -k \lambda_2^{\lambda_1} (\tan \alpha)^{\lambda+\lambda_1} \Phi_y = u S, \quad (10)$$

$$q = k \lambda_2^{\lambda_2} (\tan \alpha)^{\lambda+\lambda_2} M, \quad (11)$$

$$u h = k \lambda_2^{\lambda_2} (\tan \alpha)^{\lambda+\lambda_2} \Phi, \quad (12)$$

$$v h = k \lambda_2^{\lambda_2} (\tan \alpha)^{\lambda+\lambda_2} \Phi S, \quad (13)$$

\*Correo electrónico: jgratton@tinfiplf.uba.ar

que relacionan  $u$ ,  $v$  y  $q$  con  $\Phi$ ,  $M$  y  $S$ . Notar que  $\rho$ ,  $g$  y  $A$  aparecen en la relación entre  $h$  y  $u$ ,  $v$  pero no en  $\Phi$ . Se ve de (10) que  $S = v/u$  da la dirección del flujo.

Con esta analogía los resultados conocidos para la difusión no lineal se pueden trasladar a la teoría de los flujos viscogravitatorios estacionarios sobre un plano inclinado.

## II. SOLUCIONES AUTOSEMEJANTES

Las soluciones autosemejantes de la ecuación de difusión no lineal se pueden obtener mediante el formalismo del plano de fases [3], y se pueden reinterpretar por medio de la analogía. Resumimos ahora dicho formalismo.

Se buscan soluciones de la (8) de la forma

$$Z(\zeta) = \Phi^m x/y^2, \quad V(\zeta) = Sx/y, \quad (14)$$

$$\zeta = \begin{cases} y/bx^\delta & \text{si } x > 0 \\ -y/b(-x)^\delta & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

donde  $b$  y  $\delta$  son constantes. Sustituyendo estas definiciones en (8) se encuentra

$$\frac{dV}{dZ} = \frac{Z(2\delta - 1) + mVZ - mV(V - \delta)}{mZ(2Z + mV)}, \quad (15)$$

$$\frac{d \ln |\zeta|}{dZ} = -\frac{1}{(2Z + mV)}. \quad (16)$$

Si se conoce la solución  $V(Z)$  de la ecuación autónoma (15), la (16) permite calcular  $Z = Z(\zeta)$  y así obtener  $\Phi = \Phi(y, x)$  de la (14). De este modo se pueden encontrar todas las soluciones autosemejantes de (7). Las correspondientes corrientes bidimensionales estacionarias se pueden entonces obtener usando (6).

Las soluciones  $V(Z)$  se representan en el plano de fases  $(Z, V)$  como trayectorias integrales. Generalmente la (15) se debe integrar numéricamente, y para encontrar la solución de interés se debe conocer el comportamiento de las trayectorias integrales en el entorno de sus 6 puntos singulares. Describiremos brevemente 4 de ellos (ver detalles en [3] para  $m = 3$  y en [4] para  $m > 0$ ).

- Punto  $\mathcal{O} = (0, 0)$ : si  $\delta \neq 0$  corresponde a  $\zeta = \infty$ ,  $y = \infty$ , y da el comportamiento de  $\Phi$  al infinito. Para  $Z > 0$  es un nodo y todas las curvas integrales (salvo  $Z = 0$ ) convergen a un eje; para  $Z < 0$  es una silla, y una única curva llega a  $\mathcal{O}$ . Si  $\delta = 0$  el punto  $\mathcal{O}$  es una silla y la única trayectoria integral que pasa por él describe para  $x < 0$  una línea de contacto  $y_f = \text{cte}$ .

- Punto  $\mathcal{A} = (0, \delta)$ : es una silla, y representa una línea de contacto  $y_f(x)$ .

- Punto  $\mathcal{C} = (0, \infty)$ : es un nodo y representa la línea  $y_f = \zeta_f b x^\delta$  ( $\zeta_f = \text{cte}$ ) que describe un borde del sustrato, por encima del cual el líquido se derrama.

- Punto  $\mathcal{E} = (\infty, \infty)$ : es un nodo-silla, y representa  $y = 0$ .

A continuación daremos ejemplos de corrientes bidimensionales obtenidas a partir de soluciones autosemejantes de la ecuación de difusión no lineal.

## III. FLUJOS LIMITADOS POR UNA PARED LATERAL

Sea en  $x < 0$ ,  $y < 0$  una corriente uniforme de espesor  $h_0$ , separada por una pared delgada en  $y = 0$  de otra corriente uniforme de espesor  $h'_0$  en  $x < 0$ ,  $y > 0$ . La pared termina abruptamente en  $x = 0$ , de modo que en  $x > 0$  las dos corrientes se juntan. Sean  $\Delta y$  y  $D$  el espesor de la pared y el ancho de la capa límite cerca de la misma donde  $u$  depende de  $y$ . Nos interesa la asintótica de la solución para  $x \gg \Delta y, D$ , donde  $\Delta y$  y  $D$  no son relevantes. Este problema es análogo al de la ruptura a  $t = 0$  de un dique que separa dos capas de fluido de diferente espesor sobre un plano horizontal, que fue estudiada en [3] para  $m = 3$  y el análisis se puede extender a  $m > 0$ . Los parámetros relevantes son  $\Phi_0$  y  $\Phi'_0$ , relacionados con  $h_0$  y  $h'_0$  por medio de (6), de modo que este problema es autosemejante. Las dimensiones de  $\Phi$  son las de  $(y^2/x)^{1/m}$  (como en la difusión no lineal  $x$  juega el rol de tiempo, debemos considerar que sus dimensiones difieren de las de  $y$ ). Luego  $\delta = 1/2$  y  $\zeta = y/\Phi_0^{m/2} x^{1/2}$ . Esta solución, que llamaremos  $h_a$ , depende de  $\Phi_0$  y del parámetro adimensional  $\Phi'_0/\Phi_0$ . De acuerdo con esto podemos tener tres diferentes clases de soluciones.

- Si  $\Phi_0 > \Phi'_0$  la curva integral que representa  $h_a$  consta de dos partes: una curva  $B$  en  $V > 0$  que va desde  $\mathcal{E}$  hasta  $\mathcal{O}$ , y que representa el flujo en  $y > 0$ , y una curva  $B'$  que va de  $\mathcal{E}$  hasta  $\mathcal{O}$  en  $V < 0$  y que representa el flujo para  $y < 0$ . Para  $y \rightarrow -\infty$  e  $y \rightarrow +\infty$ ,  $\Phi$  debe tender a  $\Phi_0$  y  $\Phi'_0$  respectivamente y las soluciones correspondientes a  $B$  y  $B'$  deben empalmar suavemente en  $y = 0$  debido a la continuidad de  $\Phi$  y  $S$ . Estas condiciones determinan unívocamente  $B$ ,  $B'$  y las constantes de integración.

- Si  $h'_0 = 0$  (*i.e.* no hay fluido en  $y > 0$  para  $x < 0$ ) la solución, que llamaremos  $h_b$ , debe tener una línea de contacto  $y_f(x) > 0$  para  $x > 0$ . Luego las curvas integrales adecuadas son  $A$ , que va desde  $\mathcal{E}$  hasta  $\mathcal{A}$ , y  $A'$  que va desde  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{O}$ ; esta última se determina como antes por continuidad de  $\Phi$  y  $S$ .

- Supongamos ahora que la superficie de escurrimiento se extiende de  $y = -\infty$  a  $y = 0$ , y que el fluido puede caer por el borde para  $x > 0$ . Esta corriente, que llamaremos  $h_c$ , se representa mediante la curva  $C$  que une  $\mathcal{E}$  con  $\mathcal{O}$ .

Estas tres corrientes se muestran en la Fig. 1 para tres valores de  $\lambda$ . Notar que la escala de espesor  $h_0$  que las caracteriza no depende de  $x$ , de modo que el único cambio del perfil transversal de la corriente es un estiramiento proporcional a  $x^{1/2}$ .

## IV. FLUJO SOBRE UNA TIRA INCLINADA DE ANCHO UNIFORME

Supongamos que para  $x < 0$  la corriente fluye en un canal limitado en  $y = \pm L/2$  por paredes que terminan en  $x = 0$  y que para  $x > 0$  el líquido fluye sobre una tira de modo que parte del mismo se derrama sobre sus bordes.

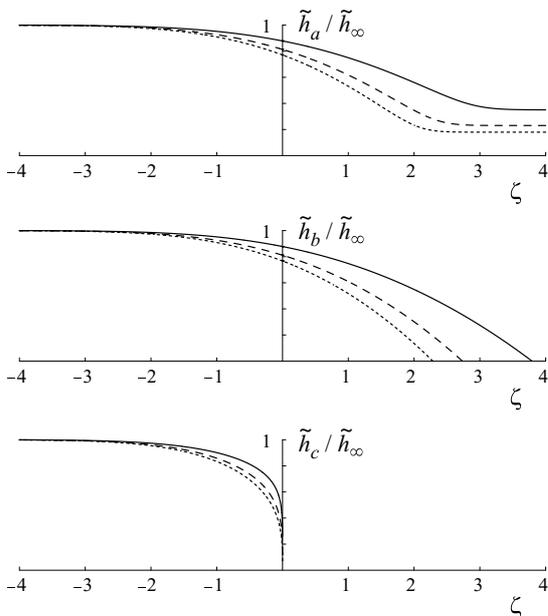


Figura 1: Flujos estacionarios bidimensionales autosemejantes: ( $\tilde{h}_a$ ) combinación de dos corrientes uniformes de distinto espesor; ( $\tilde{h}_b$ ) expansión de una corriente uniforme limitada por una pared en  $x < 0$ ,  $y = 0$ ; ( $\tilde{h}_c$ ) corriente uniforme limitada por una pared en  $x < 0$ ,  $y = 0$  y que se derrama sobre un borde en  $x > 0$ ,  $y = 0$ . Las líneas llenas, de trazos y punteadas corresponden a  $\lambda = 3, 1, 0.3$ , respectivamente.

Nos interesa el flujo para  $x$  muy grande, donde el grueso del líquido se ha perdido, de modo que la profundidad de la corriente en el canal es irrelevante y el único parámetro significativo es  $L$ . Este es un caso especial de autosemejanza pues  $\zeta$  depende sólo de  $y$ , luego  $\delta = 0$  y  $h$  depende de  $x$  sólo a través del factor  $y^2/x$ . Este flujo está representado en el plano de fases por una curva integral en el semiplano  $Z > 0$  que comienza en  $\mathcal{C}$  (que representa el borde  $y = -L/2$ ) para  $V < 0$ , pasa por un punto del eje  $Z$  (que corresponde a  $y = 0$ ) y luego vuelve a  $\mathcal{C}$  (que ahora representa el borde  $y = L/2$ ) en el semiplano  $V > 0$ . Los detalles se encuentran en [3] para  $m = 3$ , y se pueden generalizar para  $0 < m = 1/\lambda_2 < 1/2$ . Las soluciones (Fig. 2) están dadas implícitamente por:

$$\zeta = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2\lambda_5})}{\xi^{\lambda_2} \Gamma(\frac{\lambda_3}{\lambda_5})} \left[ {}_2F_1\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_5}, \frac{1}{2}; \frac{\lambda_3}{\lambda_5}; \xi^{\lambda_5}\right) - \sqrt{1 - \xi^{\lambda_5}} \right] - 1, \quad (17)$$

donde  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  es la función hipergeométrica y  $\xi = \frac{hx}{h_0 x_0}$ ,  $\zeta = \frac{y}{L}$ . Aquí  $h_0 = h(0, x_0)$ , y  $x_0 \neq 0$  es un valor fijo de  $x$ . El espesor máximo de la sección transversal es  $h_0$ , ocurre para  $y = 0$ ,  $x = x_0$  y disminuye como  $1/x$  debido a la pérdida del líquido derramado. El flujo a través de una sección  $x = \text{cte.}$  disminuye como  $x^{-\lambda_2}$ .

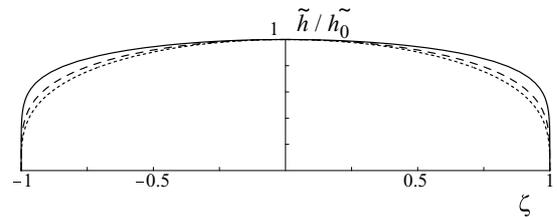


Figura 2: Flujo estacionario sobre una tira. Las líneas llenas, de trazos y punteadas corresponden a  $\lambda = 3, 1, 0.3$ .

## V. DISCUSIÓN

Se ha desarrollado la analogía entre flujos viscogravitatorios estacionarios bidimensionales de un líquido con reología del tipo ley de potencia sobre un plano inclinado, y la difusión no lineal en una dimensión espacial. Se usó la analogía para obtener algunas soluciones exactas. Mediante este procedimiento se pueden obtener muchas otras soluciones para flujos estacionarios bidimensionales.

Las aproximaciones necesarias para establecer la analogía son equivalentes a las de la teoría de lubricación, y por lo tanto no imponen restricciones más severas que las usuales al tratar problemas de este tipo.

Esta teoría no incluye la tensión superficial, lo que implica que el número de Bond debe ser grande. Cabe esperar que la tensión superficial sea más importante donde la curvatura de la superficie libre es grande.

La teoría de lubricación no es correcta en los lugares donde la superficie libre es muy empinada, y lo mismo vale para las corrientes bidimensionales que consideramos aquí. A pesar de esto el resto de la solución así como las relaciones globales que se obtienen son válidas.

Agradecemos los subsidios PIP 02230 del CONICET, X031 de la Universidad de Buenos Aires y PICTR2002-00094 de la ANPCYT. CAP agradece el apoyo de la Fundación Universitaria Dr. R. G. Favalaro.

- [1] C. A. Perazzo y J. Gratton, Thin film of non-Newtonian fluid on an incline, Phys. Rev. E **67**, 016307 (2003).  
 [2] S. D. R. Wilson y S. L. Burgess, The steady, spreading flow of a rivulet of mud, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **79**, 77 (1998).

- [3] J. Gratton y F. Minotti, Self-similar viscous gravity currents: phase-plane formalism, J. Fluid Mech. **210**, 155 (1990).  
 [4] C. A. Perazzo, Tesis Doctoral(2002), disponible en formato .pdf.