

# Soluciones analíticas generales para meniscos cilíndricos

Carlos A. Perazzo<sup>1</sup> y Julio Gratton<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup>Universidad Favaloro, Solís 453, 1078, Buenos Aires, Argentina

<sup>2</sup>INFIP-CONICET, Dpto. de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pab. I, Buenos Aires, Argentina.

En un trabajo precedente [J. Fluid Mech. **507**, 367-379, 2004] sobre flujos viscocapilares paralelos sobre un plano inclinado mostramos que la forma de la superficie libre está determinada por la condición de equilibrio estático entre la gravedad y la tensión superficial, en forma independiente de la reología del líquido y del campo de velocidades. Dicha forma es un menisco cilíndrico cuyas características dependen de la longitud capilar y de los ángulos de contacto. En el presente trabajo se desarrolla una teoría general de estos meniscos, que permite obtener expresiones analíticas de la forma de la superficie libre para cualquier topografía de la superficie de escurrimiento y para valores arbitrarios de los ángulos de contacto, tanto para meniscos apoyados como colgantes.

In a previous paper [J. Fluid Mech. **507**, 367-379, 2004] on parallel viscocapillary flows on an inclined plane we showed that the shape of the free surface is determined by the static equilibrium condition between gravity and surface tension, independently of the rheology of the liquid and its velocity field. This shape is a cylindrical meniscus that depends on the capillary length and on the contact angles. In this paper we develop a general theory of these menisci, that allows to obtain formulae for the shape of the free surface for any topography of the supporting surface and for arbitrary values of the contact angles, for sessile as well as hanging menisci.

## I. INTRODUCCIÓN

Recientemente hemos investigado soluciones exactas de la ecuación de Navier–Stokes que representan flujos viscocapilares paralelos sobre una superficie plana inclinada [1–3] debido a su interés por tratarse de fenómenos que ocurren frecuentemente tanto en la naturaleza como en procesos industriales. Dichas soluciones dependen de la forma de la superficie libre, que es un menisco cilíndrico determinado por la condición de equilibrio estático entre la gravedad y la tensión superficial y por la forma de la superficie de escurrimiento. La teoría de estos meniscos fue desarrollada hace mucho tiempo [4], sin embargo no se encuentran en la literatura expresiones cerradas que den la forma de la superficie libre para topografías generales del sustrato. Aquí obtenemos fórmulas generales que valen para meniscos apoyados o colgantes y para cualquier perfil del sustrato.

## II. ECUACIÓN DE LA SUPERFICIE LIBRE

En la Fig. 1 mostramos la geometría del problema. La coordenada  $X$  es ignorable. Sea un menisco por encima o por debajo de una superficie cuya topografía es  $S(Y)$ . Indicamos con  $H(Y)$  la superficie libre, con  $\gamma$  la tensión superficial, con  $\theta_i$  y  $\theta_d$  los ángulos de contacto a izquierda y derecha del menisco, con  $\rho$  la densidad y con  $g$  la aceleración de la gravedad. El perfil de la superficie libre

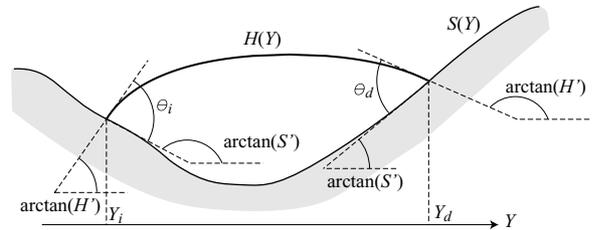


Figura 1: Geometría del problema.

satisface la ecuación

$$\frac{\rho g}{\gamma} H' = \left[ \frac{H''}{(1 + H'^2)^{3/2}} \right]' \quad (1)$$

Definiendo la longitud capilar  $l_c^2 = \gamma/\rho g$ , introduciendo  $\sigma = +1$  para meniscos apoyados y  $\sigma = -1$  para meniscos colgantes y usando las variables adimensionales  $h = H/l_c$ ,  $y = Y/l_c$ , la (1) se escribe

$$\sigma h' = \left[ \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} \right]' \quad (2)$$

Integrando una vez se obtiene

$$\sigma h = \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} - c_0 \quad (3)$$

donde  $c_0$  es la curvatura (adimensionalizada con  $l_c$ ) en el lugar donde  $h = 0$ . Multiplicando por  $h'$  e integrando nuevamente resulta

$$\frac{1}{2} \sigma h^2 = -\frac{1}{(1 + h'^2)^{1/2}} - c_0 h + 1 \quad (4)$$

\*Correo electrónico: jgratton@tinfipl.fp.uba.ar

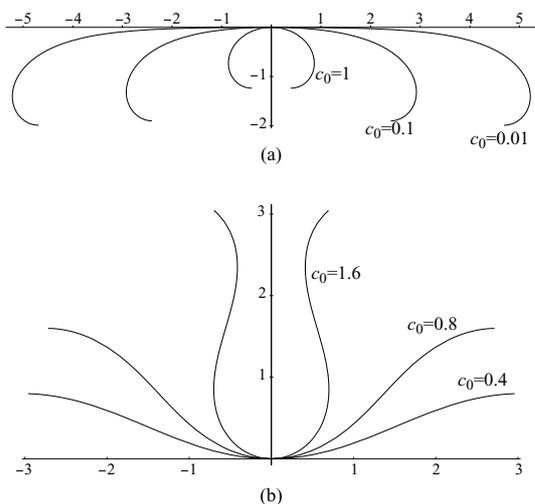


Figura 2: Soluciones  $h(y)$  para (a)  $\sigma = +1$ , (b)  $\sigma = -1$ .

donde hemos tomado la segunda constante de integración como la unidad, lo que se puede hacer sin pérdida de generalidad eligiendo oportunamente el origen de  $h$ . De aquí se despeja

$$\frac{dy}{dh} = \frac{1 - \frac{\sigma}{2}h^2 - c_0h}{\sqrt{1 - (1 - \frac{\sigma}{2}h^2 - c_0h)^2}}. \quad (5)$$

Esta ecuación se integra y permite obtener  $h(y)$  en la forma implícita siguiente:

$$y = \frac{\sqrt{h(h_1 + h)(h_2 + h)(h_3 - h)}}{h_1 + h} + [\text{signo}(c_0)]^{\frac{1+\sigma}{2}} h_2 [F(\phi|a^2) - E(\phi|a^2)] \quad (6)$$

donde  $F(\phi|a^2)$  y  $E(\phi|a^2)$  son las integrales elípticas de primera y segunda especie y

$$h_1 = 2\sigma c_0,$$

$$h_2 = \sigma \left( \sqrt{c_0^2 + 4\sigma} + c_0 \right), \quad h_3 = \sigma \left( \sqrt{c_0^2 + 4\sigma} - c_0 \right)$$

$$a = \frac{h_3}{h_2}, \quad \phi = \arcsen \sqrt{\frac{hh_2}{(h_1 + h)h_3}} \quad (7)$$

La ecuación (6) permite obtener cualquier menisco cilíndrico independientemente del ángulo de contacto entre el líquido y el sustrato. La longitud capilar da la escala de su perfil y los únicos parámetros que determinan su forma son  $\sigma$  y  $c_0$ . En la Fig. 2 se muestran algunos ejemplos.

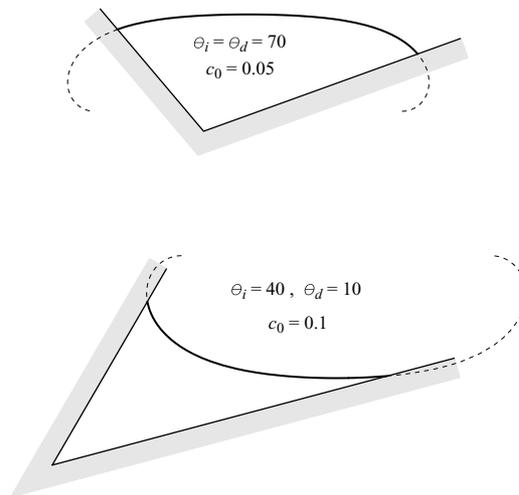


Figura 3: Ejemplos de meniscos apoyados.

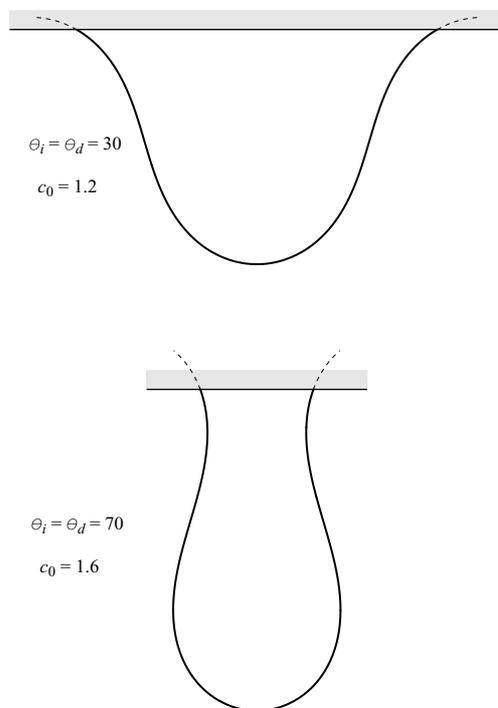


Figura 4: Ejemplos de meniscos colgantes.

### III. APLICACIONES

Para aplicar la solución (6) a una situación concreta es preciso conocer  $s(y)$ , la topografía del sustrato escalada con  $l_c$ , y los ángulos de contacto  $\theta_{i,d}$  que son datos del problema, además de  $c_0$ , que depende de manera no trivial de  $s(y)$  y del volumen adimensionalizado  $a$  del fluido

por unidad de longitud a través de la condición integral

$$\int_{y_i}^{y_d} (h - s) dy = a \quad (8)$$

donde  $y_i$ ,  $y_d$  son las líneas de contacto a izquierda y derecha. Además nuestra solución debe cumplir las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \arctan h' &= \arctan s' + \theta_i - \pi & \text{en } y &= y_i \\ \arctan h' &= \arctan s' - \theta_d + \pi & \text{en } y &= y_d \end{aligned} \quad (9)$$

Claramente la solución (6) que cumple con (8) y (9) debe ser estable. Sin entrar en el análisis general de la estabilidad, que está fuera de los propósitos de este trabajo, se puede afirmar que los meniscos colgantes bajo una superficie plana, y con ángulos de contacto mayores que  $\pi/2$  son inestables.

A manera de ejemplo, en la Fig. 3 se muestran dos meniscos apoyados sobre un diedro, y en la Fig. 4 dos meniscos que cuelgan de un plano.

#### IV. CONCLUSIONES

Hemos extendido nuestros trabajos anteriores y obtenido expresiones analíticas que dan la forma de la superficie de meniscos cilíndricos apoyados sobre o colgados de un sustrato de topografía arbitraria. Estas expresiones están adimensionalizadas con la longitud capilar, y dependen de un único parámetro.

Agradecemos los subsidios PIP 02230 del CONICET, X031 de la Universidad de Buenos Aires y PICTR2002-00094 de la ANPCYT. CAP agradece el apoyo de la Fundación Universitaria Dr. R. G. Favaloro.

- 
- [1] C.A. Perazzo & J. Gratton, Navier–Stokes solutions for parallel flow in rivulets on an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **507** (2004) 367–379.
- [2] C.A. Perazzo & J. Gratton, Exact solutions for steady parallel viscous capillary flows over or under an incline. *Proceedings of the VIII Meeting on Recent Advances in Physics of Fluids and its Applications* (2004) 41–44.
- [3] C.A. Perazzo & J. Gratton, Exact solutions of the Navier–Stokes equation for steady parallel viscopillary flows on an inclined plane. *Anales AFA* **15** (2004) 131–135.
- [4] F. Bashforth and J.C. Adams, An Attempt to Test the Theory of Capillary Action, Cambridge University Press and Deighton, Bell & Co. (1892).