

# SOLUCIÓN AUTOSIMILAR PARA LOS FLUJOS DE INTERCAMBIO EN CANALES DE SECCIÓN TRANSVERSAL ARBITRARIA

L. P. Thomas, B. M. Marino

*Instituto de Física Arroyo Seco, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Buenos Aires  
Pinto 399, 7000 Tandil, Argentina. Investigador del CONICET.  
[lthomas@exa.unicen.edu.ar](mailto:lthomas@exa.unicen.edu.ar)*

Estudiamos los flujos estratificados generados por la liberación repentina de un líquido en el seno de otro de diferente densidad en un canal uniforme de sección transversal arbitraria. Hallamos la solución autosimilar que describe la etapa inicial de los flujos en la aproximación de aguas poco profundas ignorando el mezclado entre los líquidos. Las resultantes distribuciones de la altura y la velocidad de las corrientes son funciones analíticas explícitas en el caso límite conformado por una capa densa de espesor mucho menor que el del fluido liviano o ambiente. También se determinan las condiciones que cumplen los frentes de los flujos generados en este tipo de canales. Mostramos que, respecto de lo que ocurre en los canales de sección rectangular, las corrientes de gravedad estudiadas presentan perfiles de altura diferentes y sus respectivos frentes viajan a distintas velocidades dependiendo de la forma de la sección transversal.

We study the stratified flows generated in an uniform and arbitrary cross-section channel by the sudden release of a fluid into another fluid of slightly different density. A self-similar solution describing the initial stage of the flows, under the shallow water equations approximations and ignoring the mixing between the fluids, is found. The resulting height and velocity distributions of the currents are explicit analytical functions in the limit case that considered a dense fluid layer of much smaller depth than that of the light (or ambient) fluid layer. Also the conditions fulfilled by the fronts of the generated flows in this kind of channel are determined. We show that the studied gravity currents present height profiles that are different from those characteristic of the flows developed in non-rectangular cross-section channels, and their respective fronts travel at different velocities depending on the cross-section shape.

## 1. INTRODUCCIÓN

De los numerosos estudios teóricos y experimentales sobre las corrientes de gravedad generadas en canales de sección transversal rectangular <sup>(1)</sup> surge que sus características principales resultan ser independientes de la coordenada transversal al flujo.

Por otra parte, la investigación de los flujos en canales y estuarios angostos requiere conocer cómo su dinámica, y en particular la de los frentes asociados, es afectada por la forma de la sección transversal. Son conocidos algunos intentos para modelar teóricamente el flujo conducido por variaciones laterales de batimetría. Por ejemplo, Simpson & Nunes <sup>(2)</sup> modelaron el estuario del río Seiont (Gales, Reino Unido) con una sección transversal parabólica para mostrar las circulaciones transversales secundarias, mientras que Wong <sup>(3)</sup> y Wong y Munchow <sup>(4)</sup> modelaron la circulación gravitacional en la Bahía de Delaware con una sección transversal triangular, en tanto que Valle-Levinson & O'Donnell <sup>(5)</sup> simularon el campo del flujo de un estuario costero plano con una sección rectangular con un canal triangular en el medio. En todos estos casos los resultados son obtenidos numéricamente y/o en trabajos de campo.

Thomas y Marino <sup>(6)</sup> estudiaron experimentalmente los flujos de intercambio producidos en un canal de sección transversal triangular usando tres técnicas diagnósticas complementarias <sup>(7)</sup>, una de las cuales permite obtener las distribuciones longitudinales de densidad. Los resultados muestran las similitudes y diferencias respecto de la conducta presentada por las

corrientes generadas en canales de sección transversal rectangular.

Para explicar estos resultados a partir de las ecuaciones básicas de la fluidodinámica, Thomas y Marino <sup>(8)</sup> desarrollaron un modelo analítico, basado en el balance global de masa considerando una distribución de altura constante (o "box model"), que describe satisfactoriamente la influencia de la sección transversal sobre las velocidades de los frentes.

Si bien las leyes de escala predichas por este modelo parecen ser las adecuadas en general, existen diferencias significativas entre las distribuciones de altura de los flujos de laboratorio y las predichas por la teoría. En particular la distribución uniforme de altura adoptada en dicho modelo es una simplificación considerable que deja de lado algunas características interesantes de los flujos estudiados.

En este trabajo presentamos la solución autosimilar que describe la etapa inicial de los flujos de intercambio en la aproximación de aguas poco profundas, ignorando el mezclado entre los líquidos y en la situación límite que consiste en considerar inicialmente una capa de un fluido denso cuyo espesor es mucho menor que el de la capa de un fluido mas liviano (o ambiente) situada sobre ella. Se obtienen las distribuciones de altura y de velocidad de las corrientes de gravedad desarrolladas, las que son funciones analíticas explícitas y constituyen una mejor aproximación que la obtenida al aplicar el *box model*.

También se determinan las condiciones teóricas que deben cumplir los frentes en canales de sección

transversal no rectangular. Mostramos que, respecto de aquel caso, las corrientes de gravedad constituidas por el fluido liviano y por el fluido denso presentan diferentes distribuciones de altura y densidad, y sus respectivos frentes viajan a distintas velocidades dependiendo de la forma de la sección transversal, características no señaladas en el modelo teórico previo.

## 2. EL MODELO AUTOSIMILAR

Supongamos que el contorno de la sección transversal uniforme de un canal es dado por

$$y = b \cdot z^\alpha, \quad (1)$$

donde  $z$  e  $y$  son las coordenadas vertical y transversal de dicha sección, respectivamente, y  $\alpha$  y  $b$  son constantes. En particular,  $b = w/h_0^\alpha$  es determinada por el ancho  $w$  del canal y la altura  $h_0$  efectivamente alcanzada por el fluido en el instante inicial.

La Fig. 1 muestra las posibles formas adoptadas por las sección del canal para diferentes exponentes  $\alpha$ . El valor  $\alpha \rightarrow 0$  determina una sección transversal rectangular,  $\alpha = 1$  una sección transversal triangular,  $\alpha < 1$  provee secciones transversales convexas, y  $\alpha > 1$  indica secciones con una pronunciada depresión central. Por lo tanto, la utilización del parámetro  $\alpha$  facilita el análisis de las propiedades básicas del flujo presente en un canal de sección transversal arbitraria. La Ec.(1) es similar a otras funciones asumidas en el estudio teórico y numérico de la variación de la profundidad transversal sobre el flujo en estuarios angostos<sup>(2-8)</sup>.

La superficie  $s$  de la sección transversal de altura  $h$  ocupada por el fluido es, en este caso,

$$s = \int_0^h y \cdot dz = \frac{b \cdot h^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad (2)$$

Consideremos una capa de fluido denso (densidad  $\rho_1$ ) cuyo espesor es mucho menor que el del fluido más liviano (densidad  $\rho_2$ ) en un canal de sección transversal

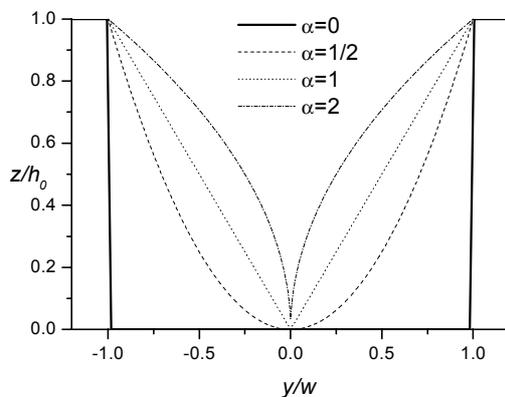


Fig. 1: Formas que puede adoptar las sección transversal de un canal según el valor del parámetro  $\alpha$ .

uniforme en la dirección  $x$ . La ecuación de continuidad indica que

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(us) = 0, \quad (3)$$

donde  $u$  es la velocidad del fluido y  $t$  el tiempo. La ecuación de conservación del momentum adopta la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

donde  $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$  es el valor inicial de la aceleración reducida debido a la gravedad ( $g$ : aceleración de la gravedad).

Adimensionalizamos las Ecs. (3) y (4) usando los parámetros adimensionales  $H = h/h_0$ ,  $X = x/h_0$ ,  $U = u/\sqrt{g'h_0}$  y  $T = t\sqrt{g'h_0}/h_0$ , donde  $h_0$  es el espesor característico inicial de la capa de fluido. Empleando (1), obtenemos que (3) y (4) son expresadas por

$$\frac{\partial H^\alpha}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X}(UH^\alpha) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X} = 0. \quad (6)$$

Las Ecs. (5) y (6) admiten una solución autosimilar donde las variables  $H$  y  $U$  son funciones del tiempo y de la coordenada espacial en la dirección del flujo, a través de la variable independiente  $\xi = X/T$ . En ese caso, (5) y (6) adquieren la forma

$$(\alpha+1)(U-\xi) \frac{dH}{d\xi} + H \frac{dU}{d\xi} = 0 \quad (7)$$

$$(U-\xi) \frac{dU}{d\xi} + \frac{dH}{d\xi} = 0. \quad (8)$$

Combinando (7) y (8), obtenemos que

$$H = (\alpha+1)(U-\xi)^2 \quad (9)$$

Reemplazando (9) en (7) e integrando, hallamos

$$U = \frac{2\sqrt{\alpha+1}}{2\alpha+3} (\sqrt{\alpha+1}\xi + 1) \quad (10)$$

$$H = \frac{\alpha+1}{(2\alpha+3)^2} (2\sqrt{\alpha+1} - \xi)^2, \quad (11)$$

donde se ha impuesto la condición  $U=0$  en  $H=1$ . Dado que

$$0 \leq H \leq 1, \quad (12)$$

la solución expresada por (10) y (11) tiene sentido físico cuando

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}} \leq \xi \leq 2\sqrt{\alpha+1}, \quad (13)$$

$$0 \leq U \leq 2\sqrt{\alpha+1}. \quad (14)$$

En la Fig. 2 se representa la solución provista por las Ecs. (10) y (11) en función de  $\xi = X/T = x/t\sqrt{g'h_0}$ .

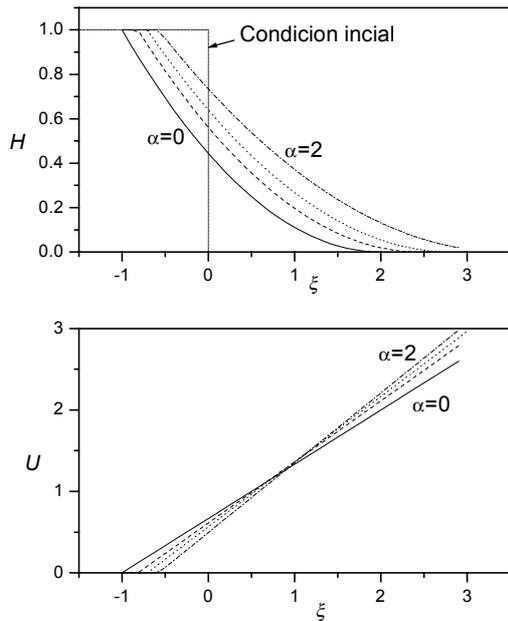


Fig. 2: Distribuciones de altura y velocidad adimensionales provistas por la solución autosimilar para la capa del fluido denso en canales para los que es  $\alpha=0, 0.5, 1, \text{ y } 2$ .

### 3 FRENTE

Las soluciones obtenidas indican que la altura es una función analítica continua hasta  $H=0$ . Sin embargo, los resultados experimentales muestran el desarrollo de frentes antes de que la altura se anule. Por lo tanto, debemos hallar las condiciones que deben cumplir los frentes desarrollados en los canales de sección no-rectangular.

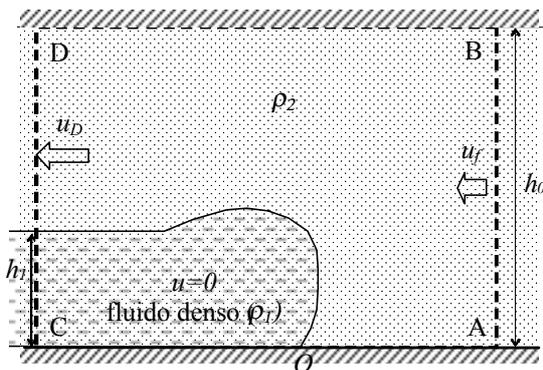


Fig. 3: Esquema de la zona frontal de la corriente del fluido denso.

#### 3a Frente de la corriente del fluido denso

Consideremos la situación física esquematizada en la Fig. 3 donde el volumen de control indicado por la línea de trazos se considera en el marco de referencia que se mueve con el fluido denso.

El fluido liviano ingresa por la sección AB con una velocidad  $u_f$  uniforme; luego supera la zona frontal de la corriente densa y cambia su velocidad. En la Sección CD, ubicada suficientemente lejos para que cualquier perturbación originada en la zona frontal sea

despreciable, la velocidad es nuevamente uniforme y de magnitud  $u_D$ . La conservación de la masa implica que

$$u_f = u_D (1 - H_1^{\alpha+1}), \quad (15)$$

donde  $H_1 = h_1/h_0$ .

Por otra parte, la distribución de presión en función de la altura es hidrostática en ambas secciones. En AB está dada por

$$p = p_A - \rho_2 g \cdot z, \quad (16)$$

y la presión  $p_A$  está relacionada con la presión en el punto de estagnación O por medio de la ecuación de Bernoulli,

$$p_A = p_O - \frac{1}{2} \rho_2 u_f^2. \quad (17)$$

La presión en CD es

$$p = \begin{cases} p_C - \rho_1 g \cdot z & 0 \leq z \leq h_1 \\ p_C - \rho_1 g \cdot h_1 - \rho_2 g \cdot (z - h_1) & h_1 < z \leq h_0 \end{cases} \quad (18)$$

Las distribuciones de presión permiten calcular el flujo de momentum

$$m = \iint p \cdot dydz + \iint \rho_2 u^2 dydz. \quad (19)$$

en ambas secciones. Usando (16), (17) y (1), el flujo de momentum en AB queda expresado por

$$m_{AB} = \frac{b \cdot h_0^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} \left( p_A + \frac{1}{2} \rho_2 u_f^2 - \frac{\alpha+1}{\alpha+2} \rho_2 g h_0 \right). \quad (20)$$

mientras que en la sección CD es

$$m_{CD} = \frac{b \cdot h_0^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} \left[ p_O - \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \rho_1 g h_0 H_1^{\alpha+2} - (\rho_1 - \rho_2) g h_0 H_1 (1 - H_1^{\alpha+1}) - \frac{\alpha+1}{\alpha+2} \rho_2 g h_0 (1 - H_1^{\alpha+2}) - \rho_2 u_f^2 (1 - H_1^{\alpha+1}) \right] \quad (21)$$

donde consideramos  $p_C = p_O$ .

Igualando los flujos de momentum,  $m_{AB} = m_{CD}$ , e invocando la conservación de la masa a través de (15), hallamos que el número de Froude  $F_1$  en el frente de la corriente densa, en función de la altura local  $H_1 = h_1/h_0$  en el frente, es

$$F_1 = \frac{u_f}{g' h_0 H_1} = \frac{(1 - H_1^{\alpha+1}) \left( 2 - \frac{2}{\alpha+2} H_1^{\alpha+1} \right)}{(1 + H_1^{\alpha+1})}. \quad (22)$$

Se observa que, para  $\alpha=0$ , la Ec (22) coincide con la expresión hallada para los canales rectangulares propuesta por Shin et al. <sup>(9)</sup>

#### 3b Frente de la corriente del fluido liviano

Ahora centremos nuestra atención en el fluido liviano que se mueve sobre el más denso en la dirección opuesta cubriendo el espacio dejado por

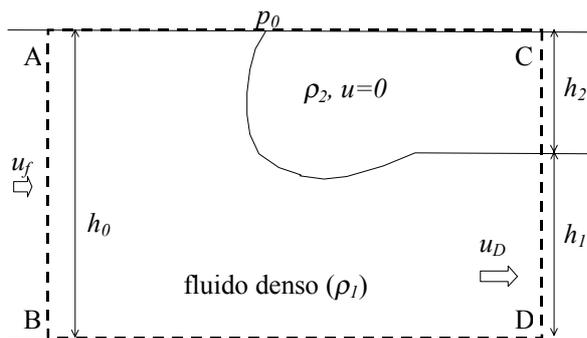


Fig. 4: Esquema de la zona frontal de la corriente de gravedad del fluido menos denso.

éste. La parte mas avanzada del fluido liviano, ubicada entorno a  $H=1$ , también desarrolla una zona frontal como se observa en la Fig. 4.

Con un análisis análogo al realizado en la Sección 3a, obtenemos el número de Froude  $F_2$  en función de la altura  $H_2=h_2/h_0$  como

$$F_2 = \frac{u_f}{g' h_0 H_2} = \frac{2}{\alpha + 2} \frac{(1 - H_2)^{\alpha+1} [1 - (1 - H_2)^{\alpha+2}]}{H_2 [2 - (1 - H_2)^{\alpha+1}]} \quad (23)$$

Si  $\alpha=0$  y  $H_2=1-H_1$ , las Ecs. (22) y (23) son las mismas y además coinciden con la expresión hallada por Shin *et al.* <sup>(9)</sup> para los canales de sección transversal rectangular.

Para  $\alpha \neq 0$ , las Ecs. (22) y (23) difieren significativamente entre sí y respecto de las expresiones correspondientes a un canal de sección transversal rectangular. En la Fig. 5 se representan gráficamente ambas expresiones de los números de Froude en función del espesor correspondiente.

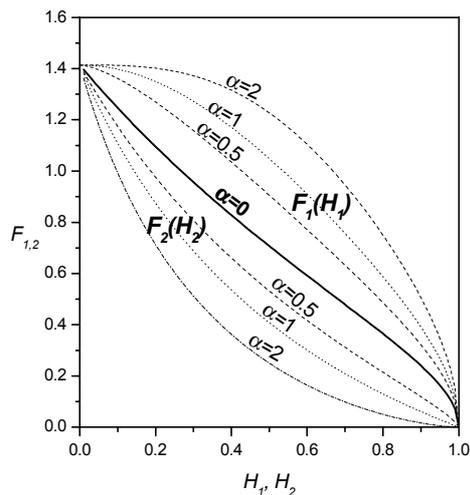


Fig. 4: Distribuciones de los números de Froude de la corriente del fluido denso  $F_1=u_f(g'h_0H_1)^{1/2}$  y del liviano  $F_2=u_f(g'h_0H_2)^{1/2}$  en función de la altura local para diferentes  $\alpha$  con  $H_2=1-H_1$ .

#### 4 COMPARACIÓN CON LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

En la Fig. 5 se muestran los perfiles de altura de la corriente de gravedad que circula sobre el fondo obtenidos por Marino y Thomas <sup>(10)</sup> en un canal de sección triangular ( $\alpha=1$ ). La línea de puntos representa la distribución de altura empleada usualmente en los típicos "box models". La línea de trazo continuo corresponde a la Ec. (11) donde la posición  $\xi=0$  coincide con la posición inicial del fluido denso. La solución teórica en el seno del fluido es válida hasta los respectivos frentes de las corrientes marcados como discontinuidades abruptas en el perfil teórico.

La altura y la velocidad en los frentes deben satisfacer las ecuaciones Ecs. (22) y (23) según lo expuesto en la Sección 3. Se observa que los resultados experimentales tienen la tendencia adecuada aunque resultan ser inferiores a los valores teóricos en un 20% aproximadamente. Desafortunadamente, hasta donde sabemos no contamos con otros resultados obtenidos en experimentos realizados en canales de sección transversal no-rectangular para realizar una comparación complementaria de los resultados obtenidos con el modelo teórico autosimilar. En consecuencia, nuestro próximo objetivo será el de realizar nuevas series de experiencias de laboratorio utilizando canales de secciones parabólicas, hiperbólicas y circulares para convalidar el modelo.

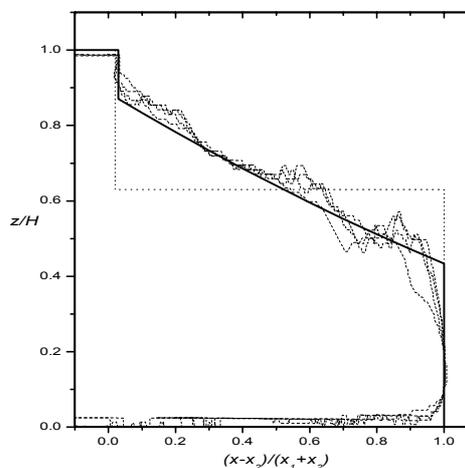


Fig. 5: Perfiles de altura de una corriente de fluido denso obtenidas a distintos tiempos en un canal de sección transversal triangular (líneas de trazos), perfil asumido en el box model (línea de puntos) y perfil encontrado en este trabajo (línea de trazo continuo) bajo la hipótesis de autosimilaridad.

#### 5. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se encontró la solución autosimilar que describe la evolución de las distribuciones de altura y velocidad de los frentes para los flujos de intercambio generados en canales rectos cuya forma de sección transversal depende de un coeficiente  $\alpha$ . Los resultados analíticos muestran una mejora

significativa respecto de los “*box models*” usados corrientemente cuando se los compara con los resultados experimentales disponibles para una sección triangular.

En particular, se obtiene un perfil autosimilar de altura que se corresponde con los perfiles experimentales, y un frente de menor altura y más lento en la corriente de fluido liviano con respecto al frente de la corriente del fluido denso. Las velocidades medidas de los frentes resultan un 20 % menor que lo señalado por la teoría. Esta diferencia podría tener su explicación en el tratamiento matemático de una capa de fluido equivalente.

En efecto, el tratamiento de la Sección 2 es estrictamente válido para una capa de fluido denso de espesor mucho menor que el de fluido liviano. La solución teórica es analítica y explícita con esta hipótesis. No obstante, resulta claro que un modelo más apropiado debería estar basado en el tratamiento de dos capas de fluidos de espesores similares, aunque en ese caso las soluciones son generalmente más complejas y probablemente numéricas, de modo que su obtención será considerado en un trabajo posterior.

Es importante destacar también que la comparación entre la teoría y los resultados experimentales se realiza para un tipo particular de sección transversal del canal ( $\alpha=1$ ). Son necesarios resultados experimentales obtenidos en canales con otras secciones para probar adecuadamente la generalidad de la solución teórica.

A pesar de las limitaciones mencionadas, la presente solución autosimilar aquí encontrada representa una mejora interesante tanto desde el plano teórico-conceptual como práctico del estudio de las

corrientes de gravedad en canales de sección transversal arbitraria.

## REFERENCIAS

- 1- Simpson, J. E. "Gravity currents in the environment and the laboratory", Cambridge University Press (1997).
- 2- Simpson J. H. y Nunes, R. A. Estuarine Coastal and Shelf Sci. **13**, 257-266 (1981).
- 3- Wong, K.C. J. Geophys. Res. **99**, 209-222 (1994).
- 4- Wong, K.C. y Munchow, A. Contin. Shelf Res. **15**, 59-88 (1995).
- 5- Valle-Levinson, A. & O'Donnell, J. "Tidal Interaction with Buoyancy-driven Flow in a Coastal Plain Estuary", 7<sup>th</sup> International Conference on Physics of Estuaries and Coastal Seas: Buoyancy Effects on Coastal Dynamics, USGS, Woods Hole, Mass., Nov. 28, 1994. Ver también Valle-Levinson, A. & Lwiza, K. M. M. J. Geophys. Res. **100**, 18551-18563 (1995).
- 6- Thomas, L.P., Marino, B.M. Anales AFA 14, 95-99, 2002.
- 7- Thomas, L.P., Marino, B.M. y Dalziel, S.B. Int. J. Heat & Technology **21**, 143-148 (2003).
- 8- Thomas, L.P. y Marino, B.M. J. Fluids Eng. **126**, 290-292 (2004).
- 9- Shin, J.O., Dalziel, S.B. & Linden, P.F. J. Fluid Mech., en prensa (2004).
- 10- Marino, B.M. y Thomas, L.P. "Flujos de intercambio en canales de sección transversal no-rectangular: resultados experimentales", XXI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, San Pedro, Estado de San Pablo, Brasil, 18-22 Octubre 2004.