

ESTUDIO EXPERIMENTAL Y TEÓRICO DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS A TRAVÉS DE ESTRUCTURAS PERIÓDICAS

A. Dolinko^{†‡}, B. J. Gómez^{†‡}, C. E. Repetto^{†‡}, C. R. Stia^{†‡} y R. Welti[†]

[†]Laboratorio de Vibraciones y Ondas (FCEIA-UNR), Pellegrini 250, S2000BTP Rosario

[‡]Instituto de Física de Rosario (CONICET-UNR), 27 de Febrero 210 bis, S2000EZP Rosario
e-mail: welti@fceia.unr.edu.ar

En este trabajo se estudia, utilizando una simple y efectiva versión del método de las impedancias, el band gap acústico de un sistema unidimensional localmente periódico constituido por un tubo de sección modulada. Se estudian los modos normales y se calculan los coeficientes de transmisión de una estructura con dos o más períodos de repetición. Se muestra que una elección adecuada de los parámetros del sistema permite obtener bandas pasantes muy selectivas en rangos de frecuencias previamente seleccionados. Se encuentra un muy buen acuerdo entre los resultados teóricos y los resultados experimentales que se obtienen a partir de un dispositivo simple.

Palabras clave: Ondas sonoras, Modos normales, Filtros

In this work, the acoustic band-gap of a one-dimensional and locally periodic system is studied by using a simple version of the impedance method. The system consists of a duct with modulated section. The normal modes and the transmission coefficients are calculated for a system with two or more repeated structures. It is shown that very selective bands are obtained at specific frequencies after a convenient choice of the periods of repetition. A very good agreement is found between theoretical results and the corresponding experimental ones obtained by using a simple device.

Keywords: Sound waves, Normal modes, Filters

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de la propagación de ondas clásicas en un medio ordenado periódicamente ha recibido mucha atención en los últimos años, tanto para el caso de ondas electromagnéticas como acústicas. Una de las principales causas de este creciente interés es la posibilidad de diseñar y construir materiales compuestos, denominados formaciones band gap fotónicos o acústicos, que permiten controlar los coeficientes de transmisión de las ondas propagantes. Inicialmente muchas de las aplicaciones se desarrollaron en el caso electromagnético¹⁻², y posteriormente para ondas acústicas^{3,4}.

Los estudios en una o dos dimensiones, además de ser útiles para una mayor comprensión de sistemas tridimensionales, más difíciles de construir, presentan también aplicaciones interesantes^{5,6}. En este trabajo se va a reexaminar una guía de onda periódica unidimensional, la que ha sido estudiada extensamente tanto desde el punto de vista teórico como experimental⁷⁻¹¹.

El efecto band gap acústico se produce básicamente en un sistema perfectamente periódico, en el que se alternan dos materiales con impedancias acústicas significativamente diferentes. La superposición coherente de las ondas dispersadas en cada uno de los puntos donde se producen rápidas variaciones en la impedancia, lleva a intervalos de frecuencia en las cuales la propagación del sonido está prohibida, produciéndose el llamado band gap acústico o sónico.

Hay muchos métodos para calcular la respuesta acústica de una guía de onda unidimensional^{8,11}. El objetivo específico de este trabajo es presentar un procedimiento simplificado que se basa en el cálculo de la

función impedancia a lo largo de la guía de onda periódica. Esto implica que nuestro análisis se limita a frecuencias para las cuales solamente se propaga el modo longitudinal a lo largo de la estructura. En este modelo las variables del problema varían espacialmente sólo en la dirección paralela a la línea de transmisión. En la zona en que se producen bruscas variaciones de la sección se pueden producir ondas transversales evanescentes. La comparación con los resultados experimentales muestra, sin embargo, que el efecto de estas ondas evanescentes puede no ser tomado en consideración en algunos casos o ser corregidos en otros, mediante la introducción de conceptos como longitud *efectiva*. En lo que sigue, estos efectos no serán tenidos en cuenta.

La adecuada selección de las condiciones de contorno en los extremos del sistema permite calcular el coeficiente de transmisión acústico de la estructura y las autofrecuencias de los modos del sistema cuando éste está cerrado en sus dos extremos. Cómo se verá más adelante, se encuentra que los espectros respectivos están correlacionados.

II. TEORÍA

El sistema que se estudia en este trabajo consiste de un tubo de sección circular cuyo diámetro está modulado periódicamente entre uno grande y otro pequeño. Se analizarán, por un lado, los modos normales de vibración de esta estructura cuando está cerrada en ambos extremos (figura 1a); y por otro lado, para ondas propagantes, se calculará el coeficiente de transmisión de la misma estructura insertada en un tubo largo abierto en ambos extremos (figura 1b).

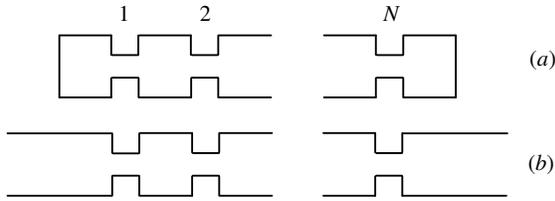


Figura 1. Sistema con N contracciones: (a) con extremos cerrados para estudiar modos normales y (b) abierto en los extremos, actuando como filtro.

Consideremos primero el caso de un tubo de longitud L y sección constante S , como el mostrado en figura 2. Las ecuaciones que describen a las ondas sonoras en el interior del tubo están dadas por:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathcal{B} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.1)$$

siendo p y v las variaciones (al primer orden) de la presión y la velocidad del gas producidas por la onda; \mathcal{B} es el módulo de compresibilidad y ρ_0 la densidad del gas. Se puede mostrar que las soluciones armónicas de estas ecuaciones son:

$$p(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}$$

$$v(x,t) = \frac{A}{Z_0} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B}{Z_0} e^{i(\omega t + kx)} \quad (2.2)$$

donde $Z_0 = \rho_0 c$ es la impedancia acústica característica, y $c = \sqrt{\mathcal{B}/\rho_0}$ la velocidad de propagación.

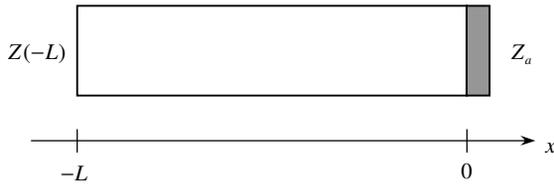


Figura 2. Tubo de longitud L y sección S , terminado en $x=0$ con la impedancia Z_a .

La impedancia acústica generalizada de la onda en cualquier punto x del tubo de sección S se define como $Z = p/U$, con $U = Sv$ el flujo de volumen:

$$Z(x) = \frac{p}{U} = Z_s \frac{e^{-ikx} + r e^{ikx}}{e^{-ikx} - r e^{ikx}} \quad (2.3)$$

siendo $Z_s = Z_0/S$ la impedancia acústica y $r = B/A$ el coeficiente de reflexión. Si el tubo está conectado en $x=0$ con un elemento de impedancia acústica Z_a , entonces la condición de contorno en $x=0$ es:

$$Z(0) = Z_s \frac{1+r}{1-r} = Z_a \Rightarrow r = \frac{Z_a - Z_s}{Z_a + Z_s} \quad (2.4)$$

De esta manera, reemplazando r en (2.3) resulta:

$$Z(x) = Z_s \frac{Z_a \cos(kx) - iZ_s \sin(kx)}{Z_s \cos(kx) - iZ_a \sin(kx)} \quad (2.5)$$

Entonces, en el otro extremo del tubo ($x=-L$), la impedancia generalizada asumirá el valor:

$$Z(-L) = Z_s \frac{Z_a + iZ_s \tan(kL)}{Z_s + iZ_a \tan(kL)} \quad (2.6)$$

Modos normales de un tubo con cambios en su sección

En el caso de un sistema con muchas contracciones de su sección, el cálculo de la impedancia generalizada se facilita si dividimos al sistema en partes, tal que cada una de ellas esté caracterizada por un valor de la sección S_i y de la longitud l_i (tal que $\sum l_i = L$) como se muestra en figura 3. Si consideramos n particiones del sistema, la impedancia generalizada Z_i de la sección i -ésima puede expresarse en función de la impedancia Z_{i-1} de las $i-1$ secciones anteriores:

$$Z_i = Z_s^i \frac{Z_{i-1} + iZ_s^i \tan(k_i l_i)}{Z_s^i + iZ_{i-1} \tan(k_i l_i)} \quad (2.7)$$

con Z_s^i la impedancia acústica del tramo i -ésimo, y k_i el número de onda correspondiente.

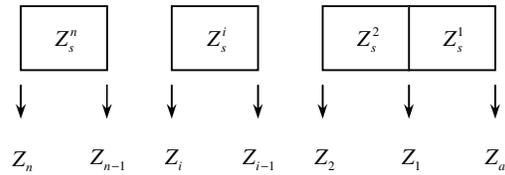


Figura 3. División del sistema en n tubos distintos.

Por lo tanto, para calcular la impedancia Z_n en $x=-L$, se aplica esta ecuación sucesivamente n veces¹². Si el sistema está cerrado en ambos extremos, entonces tanto Z_a como Z_n tienden a infinito. Las frecuencias que cumplan estas condiciones son las autofrecuencias del sistema. Es importante remarcar que si el sistema tuviera pérdidas, k tendría una pequeña componente imaginaria. La impedancia Z_n dejaría entonces de ser infinita, pero aún su módulo $|Z_n|$ tendría un máximo.

Este método no se basa en las ondas de Bloch, por lo cual puede aplicarse a sistemas con variaciones aleatorias en su impedancia o en la longitud de las secciones.

Puede mostrarse que este método, aplicado al caso más simple de una única contracción en el diámetro del tubo, reproduce los resultados que se obtienen resolviendo las ecuaciones de ondas¹³.

En el dispositivo mostrado en la figura 1a, se considera el caso particular en el que tubos de secciones S_a y S_b e impedancias acústicas Z_a y Z_b se alternan periódicamente. Si el tubo tiene muchas contracciones, es muy difícil encontrar analíticamente las ecuaciones que

determinan las autofrecuencias. Es mucho más simple hacer una gráfica de $|Z_n|$ en función de la frecuencia y buscar los valores para los cuales esta impedancia toma un valor muy grande. El cálculo de $|Z_n|$ se puede realizar mediante un programa sencillo.

Ondas Propagantes: Coeficiente de transmisión

En esta sección se calculará el coeficiente de transmisión para el dispositivo de la figura 4.

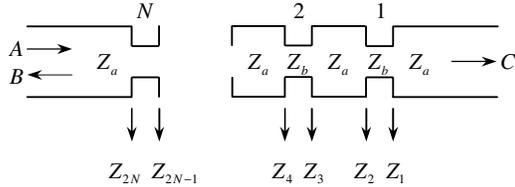


Figura 4. Dispositivo con N contracciones para ser utilizado como filtro. A , B y C representan las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.

La onda de amplitud A que se propaga de izquierda a derecha en el tubo de impedancia Z_a , se encuentra con la impedancia equivalente Z_{2N} , de toda la estructura que se encuentra a la derecha, y se refleja con una amplitud B . La onda que se propaga en el interior del tubo de la derecha, de impedancia Z_a tiene una amplitud C . Para calcular la impedancia Z_{2N} se procede como anteriormente:

$$Z_1 = Z_a, \quad Z_2 = Z_b \frac{Z_1 + iZ_b \tan kl}{Z_b + iZ_1 \tan kl}, \quad (2.8)$$

$$Z_3 = Z_a \frac{Z_2 + iZ_a \tan kL}{Z_a + iZ_2 \tan kL}$$

y continuando de esta manera, se obtiene:

$$Z_{2N} = Z_b \frac{Z_{2N-1} + iZ_b \tan kl}{Z_b + iZ_{2N-1} \tan kl} \quad (2.9)$$

Si I_i , I_r e I_t son las intensidades de las ondas incidente, reflejada y transmitida, se puede mostrar que:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_a - Z_{2N}}{Z_a + Z_{2N}} \right)^2 \quad (2.10)$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_a Z_{2N}}{Z_a + Z_{2N}} = 1 - R$$

donde R y T son los coeficientes de reflexión y transmisión para las intensidades, respectivamente.

III. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

En esta sección se presentan los dispositivos experimentales utilizados para el estudio de las vibraciones de los sistemas acústicos considerados en la figura 1.

Las cámaras se construyeron con tubos de PVC de longitud $L_a = 0,084$ m, de diámetro interno $2a = 0,1$ m y 1 cm de espesor. Estas cámaras se unieron entre sí a

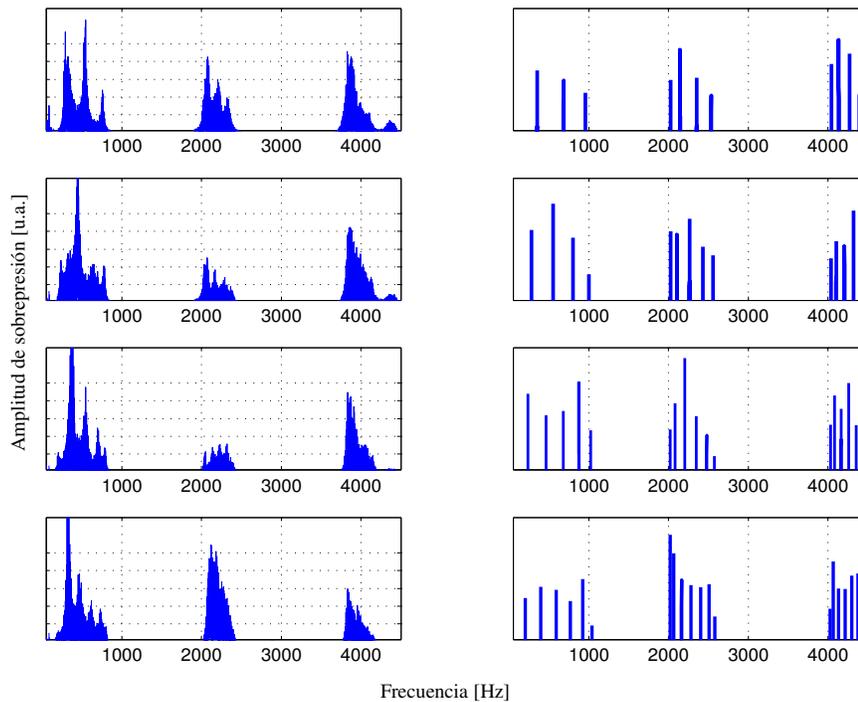


Figura 5. Amplitudes de sobreposición (en unidades arbitrarias) en función de la frecuencia para sistemas cerrados con 3, 4, 5 y 6 contracciones. Izq: mediciones experimentales. Der: cálculos teóricos.

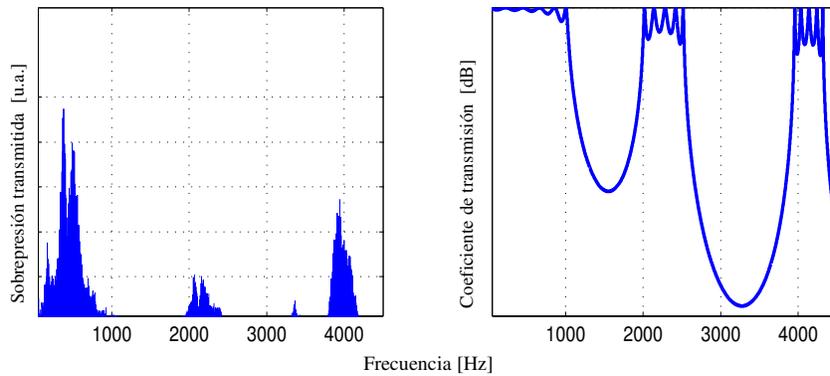


Figura 6. Coeficiente de transmisión para el sistema (abierto) compuesto por 6 contracciones. Izq: mediciones experimentales. Der: cálculos teóricos.

través de tubos de longitud $L_b = 0,01\text{m}$ y de diámetro interno $2b = 0,04\text{m}$.

Ambas configuraciones, tanto para las ondas estacionarias como para las propagantes, fueron excitadas mediante una señal de ruido blanco generada desde una PC. El sistema de detección constó de un micrófono de alta sensibilidad conectado a un grabador digital Mini-Disc Sony modelo MZ-R30.

Para determinar el espectro resonante (sistema cerrado), se realizaron distintas mediciones para diferentes posiciones del micrófono (Horn, 252-EM4530-44) y del parlante excitador (Kobitone, 253-5151) en el interior del sistema. Esto se debió a que la amplitud de la onda de presión medida depende de las posiciones del parlante y el micrófono. En particular, las posiciones de los nodos de sobrepresión cambian con los modos (aún para el mismo sistema), y en todo momento se trató de evitar que éstas coincidieran con la ubicación del micrófono. De esta manera, el parlante y el micrófono se ubicaron en forma conveniente para obtener las máximas respuestas para todos los modos excitados en cada caso.

Para el caso de ondas propagantes, al sistema abierto se le acopló en cada extremo caños de PVC del mismo diámetro y de 1,5 m de largo, colocando en uno de los extremos el parlante y en el otro el micrófono. Para evitar las ondas reflejadas en este último extremo, se introdujo un cono de pendiente suave construido con lana de acero.

Finalmente, se destaca que la señal sonora registrada en cada medición fue procesada mediante un algoritmo programado en el entorno de Octave con el que básicamente se realiza la transformada de Fourier de la señal. En el estudio se tuvo en cuenta que el sistema parlante-micrófono tiene un espectro en frecuencia donde se realzan algunos intervalos de frecuencia respecto de otros, lo que puede ocasionar alteraciones en los valores absolutos medidos.

IV. RESULTADOS Y CONSIDERACIONES FINALES

En la figura 5, panel izquierdo, se presentan los resultados experimentales para el caso de 3, 4, 5 y 6 contracciones. En la misma figura (panel derecho), se incluyen además las *curvas de resonancia* calculadas a través del método de las impedancias descrito

precedentemente. Se encuentra un muy buen acuerdo entre teoría y experiencia. Puede observarse que las autofrecuencias del sistema se distribuyen en grupos que están separados por intervalos de frecuencia relativamente grandes. El número de modos para el grupo de frecuencias más bajas coincide con el número N de contracciones, mientras que los modos de frecuencias superiores se agrupan en conjuntos de $N+1$ modos. Resultados análogos fueron previamente mostrados en el caso de una cuerda con masas concentradas¹⁴.

Para los valores particulares de nuestro sistema, el grupo de modos normales de más baja frecuencia se

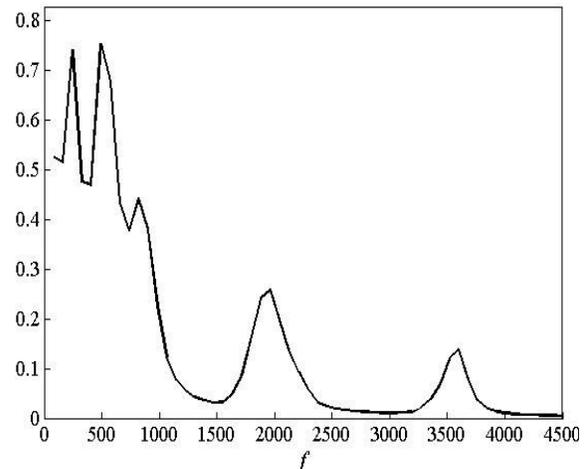


Figura 7. Coeficiente de transmisión del sistema abierto con 6 contracciones. Resultados obtenidos a partir de la simulación numérica descrita en Ref. 15.

encuentra en el entorno de 200 a 1000 Hz; el segundo grupo se encuentra en el intervalo que va de 2000 a 2500 Hz, mientras que el tercer grupo de modos se encuentra en el intervalo que va de 3900 a 4300 Hz. Se hace notar que los valores teóricos correspondientes a este último grupo de modos, se encuentran ligeramente desplazados hacia frecuencias por arriba de 4000Hz. Esto podría atribuirse a las variaciones bruscas de sección aquí consideradas que podrían dar lugar a la presencia de ondas transversales evanescentes. Por otro lado, los efectos de borde producidos en cada cambio de sección, podrían afectar de

manera diferente para las distintas frecuencias, siendo más importantes para frecuencias altas (menores longitudes de onda y comparables con las dimensiones de las contracciones). Este tipo de efectos no están contemplados en nuestro modelo.

En la figura 6 se muestran los resultados experimentales (panel derecho) y teóricos (panel izquierdo) para el coeficiente de transmisión T (ecuación (2.10)) para el caso de seis contracciones. Se observa que el filtro tiene intervalos de frecuencia donde la transmisión es prácticamente nula. Estas bandas prohibidas coinciden con los rangos de frecuencias entre grupos de modos normales del filtro cuando está tapado en ambos extremos (gráficas inferiores de figura 5). En consecuencia, el filtro solamente transmite en las frecuencias que coinciden con sus autofrecuencias. Este fenómeno es conocido como *transmisión resonante*.

Finalmente, en la figura 7 se incluyen resultados para el sistema abierto con 6 contracciones, obtenidos a partir de la simulación numérica recientemente presentada¹⁵. Claramente, los cálculos numéricos muestran la transmisión resonante, y predicen la existencia de las bandas prohibidas, en notable concordancia con los resultados experimentales. De esta manera, se podría concluir que este método numérico puede ser considerado como una buena herramienta complementaria en el estudio de la propagación de ondas.

Referencias

- 1 E. Yablonovitch. Phys. Rev. Lett. **58**, 2059–2062 (1987).
- 2 R. F. Cregan, B. J. Mangan, J. C. Knight, T. A. Birks, P. S. Russell, P. J. Roberts, D.C. Allan. Science **285**, 1537–1539 (1999).
- 3 M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani. Phys. Rev. Lett. **71**, 2022–2025 (1993).
- 4 Z. Ye, E. Hoskinson. Appl. Phys. Lett. **77**, 4428–4430 (2000).
- 5 W. M. Robertson and J. F. Rudy. J. Acoust. Soc. Am. **104**, 694–699 (1998).
- 6 M. S. Kushwaha, A. Akjouj, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, and J. O. Vasseur. Solid State Commun. **106**, 659–663 (1998).
- 7 W. P. Mason, “*Electromechanical Transducers and Wave Filters*” (Van Nostrand, Princeton, 1948), pp. 28–31.
- 8 C. E. Bradley. J. Acoust. Soc. Am. **96**, 1844–1853 (1994).
- 9 C. E. Bradley. J. Acoust. Soc. Am. **96**, 1854–1862 (1994).
- 10 R. S. Langley. J. Sound Vib. **188**, 717–743 (1995).
- 11 R. S. Langley. J. Acoust. Soc. Am. **100**, 304–311 (1996).
- 12 Auld B. A., “*Acoustic Fields and waves in solids*”, Vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., 1st edición, 1973.
- 13 B.J. Gómez, C.E. Repetto, C.R. Stia, R. Welti. Eur. J. Phys. **30**, 1107-1117 (2009).
- 14 B. Gómez, C. Repetto, C. Stia y R. Welti. Eur. J. Phys. **28**, 961-975 (2007).
- 15 A. E. Dolinko, Eur. J. Phys. **30**, 1217-1228 (2009).