

MODELO MATEMÁTICO DE FÍSTULAS ENTEROCUTÁNEAS

Cattoni D.I¹, Wainstein D.E², Rainone J.E², Fernández E.R³, Chara O^{4*}

1 Cátedra de Física, Departamento de Fisicomatemática, Facultad de Farmacia y Bioquímica (UBA)

2 División Cirugía General, Hospital General de Agudos Dr. Enrique Tornú

3 Unidad de Terapia Intensiva, Hospital Churruca-Vizca

4 Laboratorio de Biomembranas, Departamento de Fisiología y Biofísica, Facultad de Medicina (UBA)

e-mail: ochara@fmed.uba.ar

Las fístulas enterocutáneas son comunicaciones patológicas entre la luz intestinal y la superficie de la piel abdominal. En el Hospital Tornú se lleva a cabo un tratamiento destinado al cierre de estas fístulas basado en un sistema de aplicación de vacío y compactación (SIVACO). El objetivo del presente trabajo es mostrar el desarrollo de un modelo para intentar comprender el funcionamiento del mencionado tratamiento. El modelo desarrollado considera la fístula como un tubo flexible de largo constante y radio variable, y cuenta con dos supuestos: a) el caudal de la fístula se conserva, b) el número de Reynolds es lo suficientemente bajo como para asumir un régimen laminar, lo cual justifica el empleo de la ley de Poiseuille para modelar el movimiento de líquido fistuloso. Las condiciones de contorno son las siguientes: a) la presión del extremo de la fístula conectado a la bomba de vacío se ajusta a los valores medidos; y b) el extremo intestinal de la fístula se encuentra a presión atmosférica. El modelo aquí presentado logra reproducir el comportamiento observado en fístulas bajo compactación para determinados valores de los parámetros considerados. Esto permite una profundización en el esclarecimiento del mecanismo involucrado en el tratamiento, así como una orientación en la eventual mejora del mismo.

Enterocutaneous fistulae are pathological communications between the intestinal lumen and the abdominal skin. At the Tornú Hospital, we are carrying on a treatment to close these fistulae, based on a system applying vacuum and compaction (SIVACO). The objective of this article is to show the development of a model, in order to understand how this treatment works. The developed model considers the fistula as a flexible tube of a constant length and variable radius, and it has two suppositions: a) the volume flow in the fistula is conserved, b) the Reynolds number is low enough to assume a laminar regimen, which justifies the use of Poiseuille law to model the movement of the fistulous liquid. The boundary conditions are the following: a) the pressure at the end of the fistula, connected to the vacuum bomb, is set at the measured values, b) the intestinal end of the fistula is set at atmospheric pressure. The model simulates the behaviour of the fistulae under compaction at determined values of the considered parameters. Therefore, the mechanism involved in the treatment could be enlightened, and its eventual improvement achieved.

INTRODUCCIÓN

En el año 1992 Fernández y colaboradores⁽¹⁾ desarrollaron un tratamiento destinado al cierre de estas fístulas basado en un sistema de aplicación de vacío y compactación (SIVACO).

Esencialmente se conecta la fístula con un compartimiento de compresibilidad determinada, la Cámara de Compactación, y a través de ésta, con una bomba de vacío. A los pocos segundos se produce el cierre transitorio de las fístulas (figura 1). Eventualmente, algunas fístulas pueden cerrarse definitivamente. Este método se lleva a cabo actualmente en el Hospital Tornú con óptimos resultados⁽²⁾.

El objetivo del presente trabajo consiste en desarrollar un modelo destinado a comprender el funcionamiento del mencionado tratamiento.

El modelo está basado en nueve supuestos, que más abajo se detallan (ver Supuestos). El intestino, la fístula, la Cámara de Compactación y la conexión con la bomba de vacío se modelan como una sucesión de compartimientos conectados en serie.

Finalmente, se arribó a un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden: una de ellas no lineal y la otra lineal. El sistema fue resuelto numéricamente mediante el método de Euler. Con ese objeto se implementó un algoritmo en Visual-Basic, que permitió simular el comportamiento de las fístulas bajo SIVACO.

SUPUESTOS

1) La fístula (subíndice 1) es simulada como un tubo flexible de largo constante (L_1) y radio ($r_1(t)$) variable (Figura 2). Si bien las fístulas reales no se ajustan necesariamente a un cilindro, siempre es posible considerar un cilindro equivalente para describirlas.

2) El fluido que circula por todo el sistema se considera real y de densidad constante.

3) Las paredes de todo el sistema (catéteres, Cámara de Compactación, fístula) se suponen impermeables al líquido pero no rígidas. La aplicación del Teorema de Continuidad en tubos flexibles es inmediata: el caudal en el sistema se conserva.

4) El número de Reynolds del sistema es lo suficientemente bajo ($Re < 2000$), garantizando un

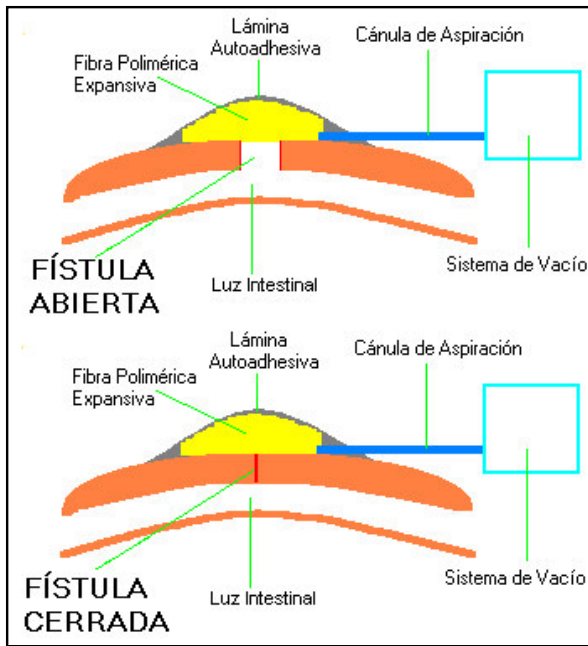


Figura 1. Esquema de una fístula enterocutánea en un instante previo (superior) y posterior (inferior) a la compactación.

régimen laminar. Por lo tanto, la ley de Poiseuille es válida para explicar caídas de presión debidas a disipaciones viscosas. A partir de la geometría descrita se modela, entonces, la resistencia hidráulica y se asume que la viscosidad del líquido fistuloso es similar a la de una solución acuosa (0,01 poise).

5) El extremo superficial de la fístula se halla conectado a la Cámara de Compactación (subíndice 0). Esta se encuentra unida a una bomba mediante un catéter (subíndice -1).

6) El otro extremo de la fístula se comunica con la luz del intestino (subíndice 2), el cual se asumirá a una presión invariable en el tiempo e igual a la presión atmosférica (P_a).

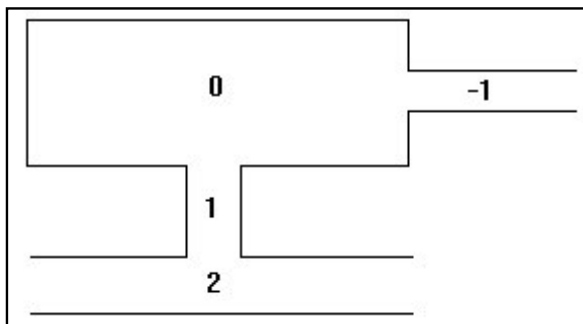


Figura 2. Esquema del modelo de una fístula enterocutánea (1), la Cámara de Compactación (0), el intestino (2) y la conexión con la bomba (-1). Los números se emplean como subíndices en las ecuaciones correspondientes.

7) Una ecuación fenomenológica sencilla vincula el volumen con la presión de la fístula: $dP_1/dV_1 = D_1$, donde D_1 es la compresibilidad de la fístula.

8) La misma ecuación fenomenológica empleada en el supuesto anterior relaciona el volumen con la presión de la Cámara de Compactación: $dP_0/dV_0 = D_0$, donde D_0 es la compresibilidad de la Cámara de Compactación.

9) La presión inicial dentro de la fístula y de la Cámara de Compactación se supone atmosférica (Pa). El radio inicial se ajusta a la media de los radios de las fístulas estudiadas ($\langle r_{10} \rangle$).

DESARROLLO DEL MODELO

La presión inicial dentro de todo el sistema se supone atmosférica (supuesto 9). La presión en el catéter más externo (P_{-1}) disminuye en el tiempo debido a la bomba (supuesto 5) y es modelada mediante una exponencial decreciente, ajustando dicha función a los puntos experimentales obtenidos. De acuerdo con la ley de Poiseuille (supuesto 4), la diferencia de presiones entre los extremos de la cámara es proporcional al flujo que circula a través de esta:

$$Q_{-10} = \frac{1}{R_{-10}} \Delta P_{-10} \quad (1)$$

donde R_{-10} es la resistencia entre el catéter (-1) y la Cámara de Compactación (0), y se asume función del largo (L_{-1}) y el radio (r_{-1}) del catéter como a continuación se especifica:

$$R_{-10} = \frac{8L_{-1}\eta}{\pi r_{-1}^4} \quad (2)$$

Se considera que la viscosidad (η) del fluido fistuloso es similar a la del agua (supuesto 4). Como consecuencia de la acción de la bomba sobre el catéter cae la presión en la Cámara de Compactación; esto crea un gradiente de presiones (entre la cámara y la fístula) y un caudal proporcional a este. Aplicando nuevamente Poiseuille:

$$Q_{01} = \frac{1}{R_{01}} \Delta P_{01} \quad (3)$$

Suponiendo la Cámara de Compactación como una estructura flexible, el Teorema de Continuidad se cumple según (supuesto 3):

$$Q_{-10} = Q_{01} - \frac{dV_0}{dt} \quad (4)$$

donde el último término del segundo miembro de la igualdad es el cambio de volumen por unidad de tiempo de la Cámara de Compactación. La ecuación fenomenológica que vincula la presión con el volumen dentro de la cámara es (supuesto 8) :

$$\frac{dP_0}{dV_0} = D_0 \quad (5)$$

de donde:

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{1}{D_0} \frac{dP_0}{dt} \quad (6)$$

Por lo tanto,

$$Q_{-10} = Q_{01} - \frac{1}{D_0} \frac{dP_0}{dt} \quad (7)$$

Reemplazando los caudales por lo visto arriba:

$$\frac{1}{R_{-10}} \Delta P_{-10} = \frac{1}{R_{01}} \Delta P_{01} - \frac{1}{D_0} \frac{dP_0}{dt} \quad (8)$$

$$\frac{\pi r_{-1}^4}{4L_{-1}\eta} (P_0 - P_{-1}) = \frac{\pi r_1^4}{4L_1\eta} (P_1 - P_0) - \frac{1}{D_0} \frac{dP_0}{dt} \quad (9)$$

con lo cual:

$$\frac{dP_0}{dt} = \frac{\pi D_0}{4\eta} \left[\frac{r_1^4}{L_1} P_1 + \frac{r_{-1}^4}{L_{-1}} P_{-1} - \left(\frac{r_1^4}{L_1} + \frac{r_{-1}^4}{L_{-1}} \right) P_0 \right] \quad (10)$$

donde:

$$P_{-1}(t) = P_a e^{-kt} \quad (11)$$

A su vez, si la presión de la fístula (P_1) disminuye respecto de la presión intestinal (P_2), se genera un caudal según:

$$Q_{12} = \left(\frac{1}{R_{12}} \right) \Delta P_{12} \quad (12)$$

Se supuso que la fístula es un cilindro (supuesto 1), definido por un volumen V_1 dado por:

$$V_1 = L_1 \pi r_1^2 \quad (13)$$

Como el Teorema de Continuidad se cumple y se modela la fístula como un tubo flexible (supuesto 3):

$$Q_{01} = Q_{12} - \frac{dV_1}{dt} \quad (14)$$

$$\frac{1}{R_{01}} \Delta P_{01} = \frac{1}{R_{12}} \Delta P_{12} - 2\pi L_1 r_1 \frac{dr_1}{dt} \quad (15)$$

Es decir:

$$\frac{\pi r_1^4}{4L_1\eta} (P_1 - P_0) = \frac{\pi r_1^4}{4L_1\eta} (P_2 - P_1) - 2\pi L_1 r_1 \frac{dr_1}{dt} \quad (16)$$

Reordenando:

$$\frac{dr_1}{dt} = \left(\frac{P_0 + P_2 - 2P_1}{8L_1^2\eta} \right) r_1^3 \quad (17)$$

Suponemos que el extremo intestinal de la fístula está a presión atmosférica (supuesto 6).

Queda un sistema de dos ecuaciones diferenciales con tres variables y las derivadas de dos de estas.

De modo semejante a lo visto con la Cámara de Compactación, la ecuación fenomenológica (supuesto 8) que vincula la presión dentro de la fístula con su volumen es:

$$\frac{dP_1}{dV_1} = D_1 \quad (18)$$

Esta expresión muestra que la presión necesaria para incrementar o disminuir un volumen determinado es precisamente proporcional a éste.

Integrando y considerando que la presión inicial es atmosférica (supuesto 9):

$$P_1(t) = D_1 [\pi L_1 r_1^2(t) - V_1(0)] + P_1(0) \quad (19)$$

Este supuesto establece un vínculo entre las variables P_1 y r_1 .

Reemplazando en las dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dr_1}{dt} = \left\{ \frac{P_0 + 2[P_a - D_1 [\pi L_1 r_1^2(t) - V_1(0)]]}{8L_1^2\eta} \right\} r_1^3 \quad (20)$$

$$\frac{dP_0}{dt} = \frac{\pi D_0}{4\eta} \left\{ \frac{r_1^4}{L_1} [D_1 [\pi L_1 r_1^2 - V_1(0)] + P_a] + \frac{r_{-1}^4}{L_{-1}} P_a e^{-kt} - \left(\frac{r_1^4}{L_1} + \frac{r_{-1}^4}{L_{-1}} \right) P_0 \right\} \quad (21)$$

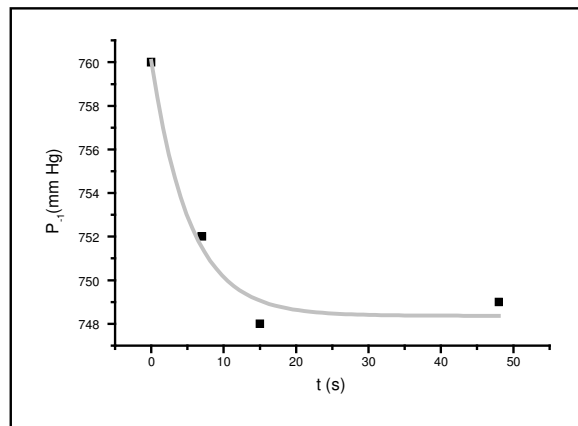


Figura 3. Ejemplo de una curva de presión en el catéter conectado a la bomba de vacío en función del tiempo obtenida en un paciente. Se observa el ajuste a una exponencial decreciente.

Queda conformado el modelo resumido en la Tabla 1 con los parámetros de la Tabla 2.

TABLA 1: MODELO MATEMÁTICO DE FÍSTULAS ENTEROCUTANEAS BAJO LA APLICACIÓN DE SIVACO.

Ecuaciones diferenciales (ecuaciones 20 y 21)	
$\frac{dr_1}{dt} = \left\{ \frac{P_0 + 2 \left[P_a - D_1 \left[\pi L_1 r_1^2(t) - V_1(0) \right] \right]}{8 L_1^2 \eta} \right\} r_1^3$	
$\frac{dP_0}{dt} = \frac{\pi D_0}{4 \eta} \left\{ \frac{r_1^4}{L_1} \left[D_1 \left[\pi L_1 r_1^2 - V_1(0) \right] + P_a \right] + \frac{r_{-1}^4}{L_{-1}} P_a e^{-kt} - \left(\frac{r_1^4}{L_1} + \frac{r_{-1}^4}{L_{-1}} \right) P_0 \right\}$	
Condiciones de contorno (Incluidas en las ecuaciones, conforman los supuestos 5 y 6)	
$P_{-1}(t) = P_a e^{-kt}$	
$P_2(t) = P_a$	
Condiciones iniciales (Conforman el supuesto 9)	
$P_1(0) = P_a$	
$P_0(0) = P_a$	
$P_{-1}(0) = P_a$	

TABLA 2: PARÁMETROS DEL MODELO.

η	Viscosidad del líquido fistuloso
K	Tasa de disminución de presión por medio de la bomba de vacío
D_0	Compresibilidad de la Cámara de Compactación
D_1	Compresibilidad de la Fístula
L_1	Largo (trayecto) de la Fístula
$V_1(0)$	Volumen inicial de la Fístula
L_{-1}	Largo del catéter que comunica la Cámara de Compactación con la bomba de vacío
r_{-1}	Radio del catéter que comunica la Cámara de Compactación con la bomba de vacío

RESULTADOS

Se efectuaron medidas de presión en el catéter conectado con la bomba en 10 pacientes (previa autorización de éstos). Los datos se ajustaron razonablemente a una exponencial decreciente (figura 3).

Se desarrolló un algoritmo para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. La ausencia de datos experimentales de radio, presión y tiempo intra-fístula (que obviamente no pueden obtenerse) redundó en una complejidad adicional del problema. El algoritmo resolvió el sistema explorando el espacio de los parámetros D_0 - D_1 satisfaciendo las siguientes cotas:

$$0 \leq P_0 \leq P_a \quad (22)$$

$$0 \leq r_1 \leq \langle r_1^0 \rangle \quad (23)$$

$$\frac{dr_1}{dt} \leq 0 \quad (24)$$

$$t \leq 60 \text{ seg} \quad (25)$$

Los resultados muestran que conforme D_0 se incrementa, la velocidad de decrecimiento de r_1 también crece (figura 4). Por el contrario, la simulación mostró que conforme D_1 se incrementa, la velocidad de decrecimiento de r_1 disminuye (figura 5). Es decir, $\partial |dr_1/dt| / \partial D_1 \leq 0$ y $\partial |dr_1/dt| / \partial D_0 \geq 0$.

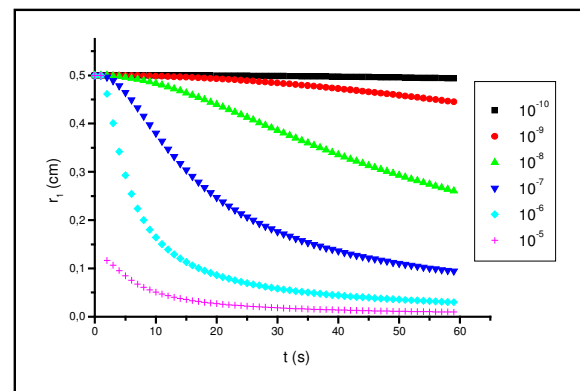


Figura 4. Radio de la fístula en función del tiempo para distintos valores del parámetro D_0 . En cada curva el parámetro D_1 se mantuvo constante (10^{-10} Baria cm^{-3})

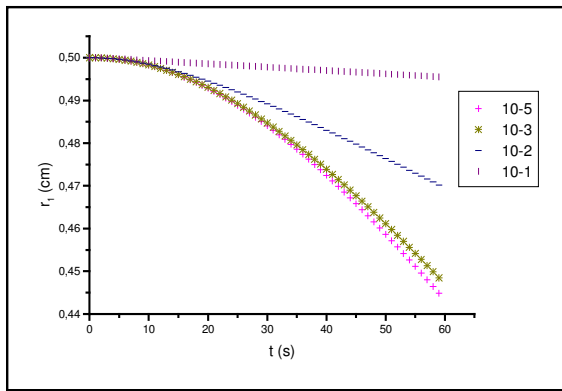


Figura 5. Radio de la fístula en función del tiempo para distintos valores del parámetro D_1 . En cada curva el parámetro D_0 se mantuvo constante (10^{-9} baria cm^{-3})

DISCUSIÓN

El modelo explica satisfactoriamente la oclusión transitoria de las fístulas enterocutáneas en términos de una acotada región del espacio de parámetros (figura 6). Los resultados muestran que un incremento en la compresibilidad de la fístula disminuye la velocidad de cerrado de esta. En efecto, las diferentes cinéticas de cerrado de fístulas observadas pueden interpretarse en términos de la diversidad en la compresibilidad de éstas, probablemente debido a la gran variedad de los tejidos que las conforman. Por el contrario, un aumento en la compresibilidad de la Cámara de Compactación acelera el cierre de la fístula. Si bien no es posible hasta ahora modificar la compresibilidad de ésta, se puede modular adecuadamente la compresibilidad de la cámara. Sería posible, a través de ésta modulación, acelerar el ritmo de cerrado de la fístula. Como se ve, el modelo permite la interpretación de los resultados obtenidos así como algunas predicciones eventualmente útiles en futuros tratamientos. Ulteriores estudios que tomen como base este modelo podrían contribuir a la completa elucidación del mecanismo de cierre de las fístulas y a una eventual mejora del tratamiento.

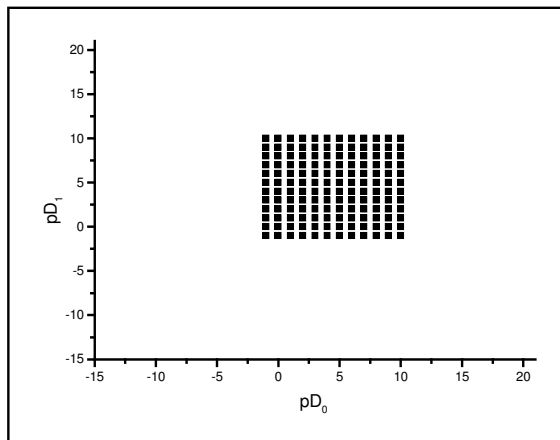


Figura 6. Se muestra el espacio de parámetros D_0 - D_1 . Por comodidad se muestra pD_0 vs. pD_1 (Se define $px = -\log(x)$)

Referencias

- 1-Fernández ER, Cornalo AO, González D, Vilella V. Rev Argent Cirug.. 62: 117-127 (1992).
- 2-Wainstein DE, Gild AI, Rainone PE, Marino DA, Delgado Marín DE, Rainone JE. Rev Argent Cirug. En prensa.

Agradecimientos

A Rafael Chara y Nélica M. Dezillio, por su valiosa colaboración.