

# OSCILACIONES DE UNA CUERDA CON MASAS CONCENTRADAS

B. Gómez<sup>†‡</sup>, C. Repetto<sup>†‡</sup>, C. Stia<sup>†‡</sup> y R. Welti<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Departamento de Física y Química de la Escuela de Formación Básica (FCEIA-UNR), Pellegrini 250, 2000 Rosario

<sup>‡</sup>Instituto de Física de Rosario (CONICET-UNR), 27 de Febrero 210 bis, 2000 Rosario  
e-mail: welti@fceia.unr.edu.ar

En este trabajo se estudian teórica y experimentalmente las oscilaciones de una cuerda homogénea, fija en sus dos extremos, sobre la que se han colocado un número finito de masas concentradas. A través de un dispositivo experimental sencillo, se analizan en detalle los casos representativos en los que la cuerda se carga con una y dos masas, respectivamente. Se observan los modos normales de oscilación y se miden las correspondientes frecuencias propias. Los resultados experimentales se comparan con las soluciones de la ecuación de ondas que satisfacen las correctas condiciones de contorno del problema considerado. Se encuentra un excelente acuerdo entre teoría y experiencia. Finalmente, se muestra la analogía de este problema mecánico con problemas de la teoría de antenas y de la mecánica cuántica.

Palabras clave: Cuerdas cargadas, Modos normales, Oscilaciones

In this work the oscillations of a homogeneous string fixed at both ends, that is loaded with a finite number of masses, are studied. Through a simple device, the cases with one and two concentrated masses are analysed in detail. The normal modes are observed and the corresponding frequencies are recorded. The experimental results and the solutions of the wave equation that satisfies suitable boundary conditions are compared. The theoretical and experimental results are in accord. Finally, analogies with this mechanical problem are shown.

Keywords: Loaded strings, Normal modes, Oscillations

## I. INTRODUCCIÓN

Las vibraciones en cuerdas han sido estudiadas desde el siglo diecinueve. A partir de trabajos de Euler, d'Alambert y Lagrange<sup>1</sup> se produjo un debate sobre la posibilidad de la discontinuidad en la tangente en una cuerda "punteada". Estas diferencias pueden tomarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que conlleva la definición del concepto de función.

Lagrange<sup>1</sup> también examinó las oscilaciones no armónicas de una cuerda con densidad de masa variable. Rayleigh<sup>2</sup> obtuvo las frecuencias y los modos normales de oscilación de la cuerda cargada con una masa puntual en un punto cualquiera de la misma.

En este trabajo se estudian las ecuaciones de Rayleigh para la cuerda cargada. Se analizan en detalle las formas de los modos normales de oscilación de una cuerda cargada por una y dos masas y se describe un dispositivo experimental que permite observar la forma de los modos normales de oscilación y medir sus frecuencias normales.

Bolwell<sup>3</sup> analizó las vibraciones libres de una cuerda cargada, pero la física sobre la cual está basada la descripción es incorrecta<sup>6</sup>. Por este motivo, en la sección VI de este trabajo, se estudia este problema minuciosamente.

## II. OSCILACIONES DE UNA CUERDA CARGADA

Se estudia el problema de una cuerda fija en sus dos extremos, en la cual se han colocado masas concentradas  $M_i$  en los puntos  $x = x_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Debido a la presencia de las masas concentradas la densidad de la cuerda puede considerarse como la

correspondiente a una cuerda no homogénea con una densidad de masa por unidad de longitud  $\mu(x)$  dada por

$$\mu(x) = \mu_0 + \sum_{i=1}^N M_i \delta(x - x_i) \quad (2.1)$$

donde  $\mu_0$  es la densidad de la cuerda, supuesta constante, que une las masas puntuales y  $\delta$  es la función delta de Dirac. La ecuación que describe las oscilaciones de la cuerda no homogénea es

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Integrando la ecuación (2.2) con respecto a  $x$ , desde  $x_i - \varepsilon$  hasta  $x_i + \varepsilon$ , y haciendo el paso al límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se obtiene la condición de empalme

$$\left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_i-0}^{x_i+0} = M_i \frac{\partial^2 u(x_i, t)}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

La otra condición de empalme en el punto  $x_i$  es la continuidad de los desplazamientos, esto es

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t) \quad (2.4)$$

El problema puede formularse ahora de la siguiente forma: encontrar las soluciones de la ecuación de ondas homogénea

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

que satisfaga las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(x_0, t) &= 0 \\ u(x_{N+1}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

y las condiciones de empalme (2.3) y (2.4) en los puntos  $x = x_i$ .

Para el análisis de las oscilaciones propias de la cuerda deben hallarse las soluciones del problema que se escriban en la forma del producto

$$u(x, t) = \Phi(x)e^{i\omega t} \quad (2.7)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.5) se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left( T \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \omega^2 \mu_0 \Phi = 0 \quad (2.8)$$

Las condiciones de contorno y las condiciones de empalme son, respectivamente

$$\Phi(x_0) = 0, \quad \Phi(x_{N+1}) = 0 \quad (2.9)$$

y

$$\begin{aligned} \Phi(x_i - 0) &= \Phi(x_i + 0) \\ \left( T \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x_i - 0}^{x_i + 0} &= -M_i \omega^2 \Phi(x_i) \end{aligned} \quad (2.10)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

La ecuación (2.8) y las condiciones (2.9) y (2.10) constituye un problema de autovalores. La particularidad del problema es que el parámetro  $\omega$  figura no sólo en la ecuación, sino también en las condiciones complementarias.

Las funciones propias  $\Phi_n$  del problema de contorno<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( T \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \omega^2 \mu(x) \Phi &= 0 \\ \Phi(0) &= 0, \quad \Phi(l) = 0 \end{aligned}$$

son ortogonales, con densidad  $\mu$ , en el intervalo  $(0, l)$ :

$$\int_0^l \Phi_m(x) \Phi_n(x) \mu(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (2.11)$$

Si se introduce la ecuación (2.1) en (2.11) se obtiene la condición de ortogonalidad con carga<sup>4</sup>

$$\int_0^l \Phi_m(x) \Phi_n(x) \mu_0 dx + \sum_{i=1}^N M_i \Phi_m(x_i) \Phi_n(x_i) = 0$$

siendo  $(m \neq n)$ . La norma de las funciones propias  $\Phi_n$  se determina por la fórmula

$$\|\Phi_n\|^2 = \int_0^l \Phi_n^2 \mu_0 dx + \sum_{i=1}^N M_i \Phi_n^2(x_i) \quad (2.12)$$

Para desarrollar una función  $f(x)$  en la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_n(x)$$

los coeficientes  $A_n$  deben determinarse por la fórmula

$$A_n = \frac{\int_0^l f(x) \Phi_n(x) \mu_0 dx + \sum_{i=1}^N M_i f(x_i) \Phi_n(x_i)}{\|\Phi_n\|^2} \quad (2.13)$$

### III. CUERDA CARGADA CON UNA MASA

Se considera el caso de una cuerda homogénea de masa  $\mu_0$  por unidad de longitud, con sus extremos  $x = 0$  y  $x = 2L$  fijos, y cargada con una masa puntual  $M$  en su punto medio  $x = L$  como se muestra en la figura 1. Se supone la tensión  $T$  en la cuerda constante.

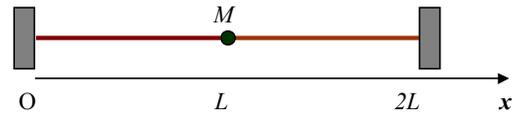


Figura 1. Cuerda cargada en su punto medio con una masa puntual  $M$ .

La solución de la ecuación (2.8), que satisface las condiciones de borde (2.9) en  $x = 0$  y  $x = 2L$  puede ser representada mediante las funciones

$$\Phi(x) = \begin{cases} A \sin kx & 0 \leq x \leq L \\ B \sin k(x-2L) & L \leq x \leq 2L \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $k = \omega/c$  y  $c = \sqrt{T/\mu_0}$  es la velocidad de las ondas transversales sobre la cuerda.

Las condiciones de empalme (2.10) se satisfacen siempre que

$$F_1(kL) F_2(kL) = 0 \quad (3.2)$$

donde

$$F_1 = \sin(kL), \quad F_2 = p \sin(kL) - 2 \cos(kL) \quad (3.3)$$

donde  $p = M\omega^2/Tk = (M/m)kL$  y  $m = \mu_0 L$  es la masa de cada uno de los tramos de cuerda.

Los autovalores y autofunciones asociados con cada uno de estos factores son física y matemáticamente muy diferentes.

Los autovalores asociados al primer factor son

$$kL = n\pi \quad (3.4)$$

donde  $n$  es un número natural. Para estos autovalores se verifica que  $B = A$ . Reemplazando estas amplitudes en (3.1) y teniendo en cuenta (3.4) se encuentra que las autofunciones en este caso vienen dadas por

$$\Phi(x) = A \sin kx \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (3.5)$$

Las autofunciones (3.5) coinciden con los modos de índice par de una cuerda de longitud  $2L$  sin carga. Como estos modos tienen un nodo en  $x = L$  la presencia de la masa concentrada en ese punto no los afecta. Estos *modos de pendiente continua* en  $x = L$ , son *antisimétricos* respecto de este punto.

Los autovalores relacionados con el segundo factor se pueden determinar gráficamente como se muestra en la figura 2. Para estos autovalores, se encuentra que  $B = -A$ . Como las autofunciones correspondientes tienen

un salto en la pendiente en  $x = L$ , se llamarán de aquí en adelante *modos de pendiente discontinua*. Estos modos son *simétricos* respecto de  $x = L$ .

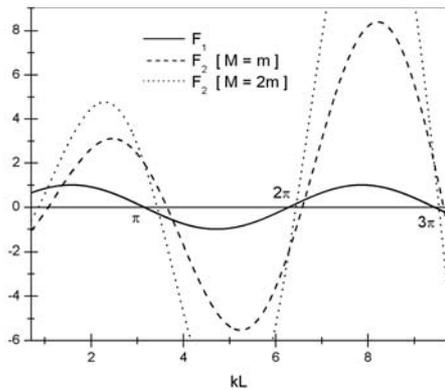


Figura 2. Factores  $F_1$  y  $F_2$  para distintos valores de masa  $M$ .

TABLA 1. AUTOVALORES DE LOS FACTORES  $F_1$  Y  $F_2$

	$F_1$	$F_2 [M = 2m]$	$F_2 [M = m]$
$kL_1$	0	0.860	1.077
$kL_2$	$\pi = 3.141$	3.425	3.643
$kL_3$	$2\pi = 6.283$	6.437	6.578
$kL_4$	$3\pi = 9.425$	9.529	9.629

La razón entre la frecuencia del segundo modo  $f_2$  y la del primer modo  $f_1$  depende fuertemente de la razón  $M/m$ . Si  $M/m = 1$ :  $f_2/f_1 = 2.917$  y si  $M/m = 2$ :  $f_2/f_1 = 3.653$ . A partir de la figura 2 puede deducirse que para  $n$  grande los autovalores de los dos tipos de modos se hacen idénticos.

Cuando  $M \gg m$ ,  $p = M/m$  es muy grande, y a partir de (3.3) se encuentran únicamente los modos de índice par de una cuerda homogénea de longitud  $2L$ . Ahora, si  $M \ll m$ ,  $p$  es muy pequeño, y se encuentran todos los modos de la cuerda homogénea.

#### IV. CUERDA CARGADA CON DOS MASAS

Se considera ahora el caso de una cuerda homogénea de masa  $\mu_0$  por unidad de longitud, con sus extremos  $x = 0$  y  $x = 3L$  fijos y cargada con una masa puntual  $M$  en  $x = L$  y  $x = 2L$ , como se muestra en la figura 3.

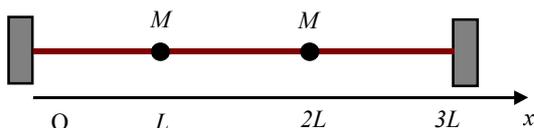


Figura 3. Cuerda cargada con una masa puntual  $M$  en  $x = 2L$  y  $x = 3L$ .

La solución de la ecuación (2.8), que satisface las condiciones de borde (2.9) en  $x = 0$  y  $x = 3L$ , puede ser representada mediante las funciones

$$\Phi(x) = \begin{cases} A \sin kx & 0 \leq x \leq L \\ B \sin k(x-L) + C \cos k(x-L) & L \leq x \leq 2L \\ D \sin k(x-3L) & 2L \leq x \leq 3L \end{cases} \quad (4.1)$$

La solución en el intervalo  $L \leq x \leq 2L$  se elige de esta manera para simplificar las ecuaciones que surgen a partir de las condiciones de empalme. Dichas condiciones de empalme (2.10) en  $x = L$  y  $x = 2L$  se satisfacen siempre que:

$$F_1(kL)F_2(kL)F_3(kL) = 0 \quad (4.2)$$

donde

$$\begin{aligned} F_1 &= \sin(kL), & F_2 &= p \sin(kL) - 2 \cos(kL) - 1 \\ F_3 &= p \sin(kL) - 2 \cos(kL) + 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Los autovalores relacionados con el primer factor son

$$kL = n\pi \quad (4.4)$$

donde  $n$  es un número natural. Reemplazando (4.4) en las condiciones de empalme se encuentran las siguientes relaciones

$$B = (-1)^n A, \quad C = 0, \quad D = (-1)^n A \quad (4.5)$$

Reemplazando en (4.1) se tiene que

$$\Phi(x) = A \sin kx \quad 0 \leq x \leq 3L \quad (4.6)$$

Los autovalores (4.4) y las autofunciones (4.6) coinciden con los modos y frecuencias propias múltiplos de 3 ( $3n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) de una cuerda sin carga de longitud  $3L$ . Como estos modos tienen un nodo en  $x = L$  y  $x = 2L$ , la presencia de la masa concentrada no los afecta. Al igual que en el caso anterior, estos modos tienen *pendiente continua* en  $x = L$  y  $x = 2L$ .

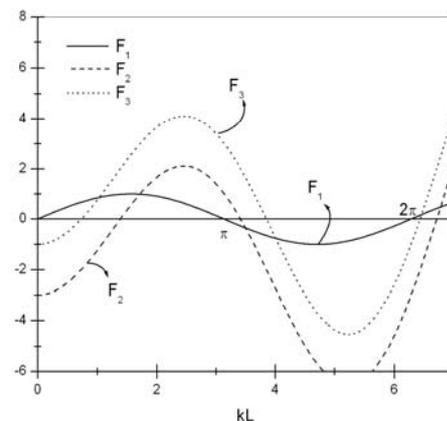


Figura 4. Gráfica de los factores  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  para  $M = m$ .

Los autovalores relacionados con el segundo y tercer factor se pueden determinar gráficamente como se muestra en la figura 4. En esa misma figura se grafica también  $F_1$  en función de  $kL$  para comparar los autovalores relacionados con los tres factores.

Para los autovalores asociados con el segundo factor se encuentra que  $B = -A(1 - \cos kL)$ ,  $C = A \sin kL$  y  $D = A$ , y las autofunciones correspondientes resultan *antisimétricas* con respecto al punto medio  $x = 3L/2$ .

Para los autovalores asociados con el tercer factor se encuentra que  $B = A(1 - \cos kL)$ ,  $C = A \sin kL$  y  $D = -A$ , y las autofunciones resultan *simétricas* con respecto al punto medio.

Como las autofunciones en estos dos últimos casos tienen un salto de pendiente en  $x = L$  y  $x = 2L$ , se llamarán *modos de pendiente discontinua*.

## V. DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO UTILIZADO. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El dispositivo experimental se armó para poder visualizar los distintos modos tanto para el caso de una masa concentrada como para el de dos. Se trabajó con un impulsor de ondas mecánicas Pasco (WA-9753). El mismo se conectó a una PC a través de una interfase también PASCO 750, y utilizando el software Science Workshop es posible manejar un generador de funciones, y variar los valores de amplitudes y frecuencias de las distintas señales.

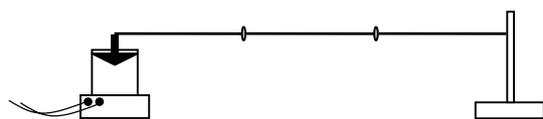


Figura 5. Dispositivo experimental utilizado.

Como masas concentradas se utilizaron masas en forma de arandela, uniéndose en ambas caras resortes idénticos, con la misma masa  $m = M$ . Para el caso de una masa concentrada se utilizó una masa  $M = 6.9$  g, y en el caso de 2 masas  $M = 4.2$  g. En ambos casos, uno de los extremos libres se fijó a un soporte, comportándose en consecuencia como un extremo fijo, y el otro extremo se conectó al vástago del impulsor, de tal manera que el sistema resortes-masas y el parlante vibraran a la misma frecuencia.

Se trabajó aplicando una tensión de 3 V al impulsor, traduciéndose en un desplazamiento máximo pico a pico

del vástago de 5 mm, el cual es mucho menor que las amplitudes de oscilación de los vientres, razón por la cual puede considerarse también a ese punto como un punto fijo.

Los valores de las masas y el largo de los resortes (o lo que es lo mismo la tensión a la que está sometido el sistema) fueron elegidos de forma que los modos vibracionales fueran observados con claridad. Por la misma razón se eligieron las oscilaciones transversales en desmedro de las longitudinales, ya que estas últimas también pueden observarse.

En consecuencia, se procedió a barrer en frecuencias para obtener los distintos modos vibracionales para las dos configuraciones. A continuación se muestran los resultados obtenidos; es importante remarcar que se tomó como frecuencia de cada modo aquel valor que hacía máxima la amplitud de oscilación (resonancia).

### 1º Caso: una masa concentrada

Para una masa concentrada, se tiene:

TABLA 2

Frecuencias	Cociente experimental	Cociente teórico
$f_1 = 6.1$ Hz		
$f_2 = 17.7$ Hz	$f_2 / f_1 = 2.902$	$f_2 / f_1 = 2.917$
$f_3 = 21.0$ Hz	$f_3 / f_1 = 3.443$	$f_3 / f_1 = 3.383$
$f_4 = 35.5$ Hz	$f_4 / f_1 = 5.820$	$f_4 / f_1 = 5.835$
$f_5 = 38.0$ Hz	$f_5 / f_1 = 6.229$	$f_5 / f_1 = 6.109$
$f_6 = 53.2$ Hz	$f_6 / f_1 = 8.721$	$f_6 / f_1 = 8.752$
$f_7 = 55.71$ Hz	$f_7 / f_1 = 9.133$	$f_7 / f_1 = 8.942$

En la figura 6 se muestran las fotos de los siete primeros modos normales de una cuerda cargada con una masa en su punto medio y fija en sus dos extremos, y se las compara con las gráficas analíticas que resultan de las autofunciones (3.1), siendo los autovalores los obtenidos de (3.2) y (3.3).

Los modos de pendiente continua y discontinua se alternan, siendo el modo de frecuencia más baja uno de pendiente discontinua.

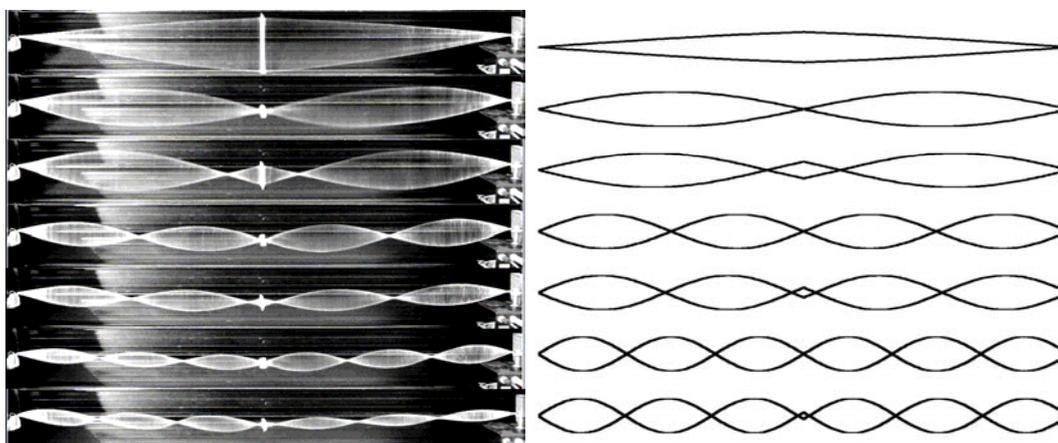


Figura 6. Fotos de los 7 primeros modos de oscilación de una cuerda homogénea con una masa concentrada en su punto medio. Comparación con las gráficas analíticas de los mismos modos.

## 2º Caso: dos masas concentradas

En este caso, se encuentra que:

TABLA 3

Frecuencias	Cociente experimental	Cociente teórico
$f_1 = 3.76 \text{ Hz}$		
$f_2 = 7.09 \text{ Hz}$	$f_2 / f_1 = 1.886$	$f_2 / f_1 = 1.897$
$f_3 = 15.80 \text{ Hz}$	$f_3 / f_1 = 4.202$	$f_3 / f_1 = 4.295$
$f_4 = 17.52 \text{ Hz}$	$f_4 / f_1 = 4.660$	$f_4 / f_1 = 4.670$
$f_5 = 19.98 \text{ Hz}$	$f_5 / f_1 = 5.316$	$f_5 / f_1 = 5.268$
$f_6 = 31.60 \text{ Hz}$	$f_6 / f_1 = 8.404$	$f_6 / f_1 = 8.590$
$f_7 = 33.11 \text{ Hz}$	$f_7 / f_1 = 8.806$	$f_7 / f_1 = 8.799$
$f_8 = 34.80 \text{ Hz}$	$f_8 / f_1 = 9.255$	$f_8 / f_1 = 9.182$
$f_9 = 46.73 \text{ Hz}$	$f_9 / f_1 = 12.428$	$f_9 / f_1 = 12.886$

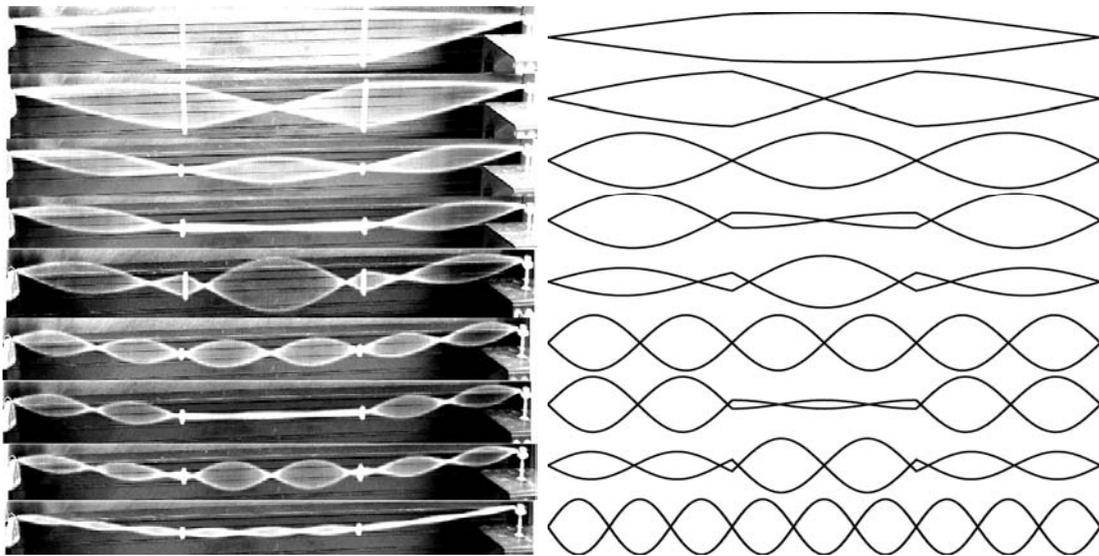


Figura 7. Fotos de los 9 primeros modos de oscilación de una cuerda homogénea con dos masas concentradas. Comparación con las gráficas analíticas de los modos correspondientes.

Pero el movimiento no es para nada sencillo puesto que se excitan los dos modos próximos, pero con una particularidad: el movimiento del modo de frecuencia menor está en oposición de fase con respecto al movimiento del vástago, mientras que el movimiento del modo de frecuencia mayor está en fase con el mismo. Además, como se mencionó anteriormente, las funciones que describen modos consecutivos se alternan en pares e impares con respecto al punto medio.

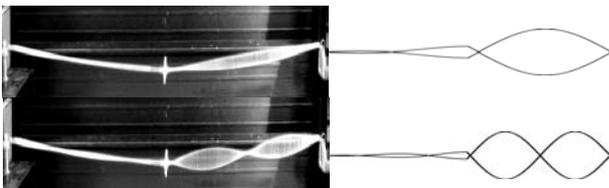


Figura 8. Excitación del sistema con frecuencias intermedias entre modos consecutivos.

Entonces, si por ejemplo se excita al sistema con una masa concentrada a una frecuencia de 19.3 Hz, se excitarán simultáneamente los modos 2º y 3º. Según la discusión anterior, en la primer mitad el resorte deberá estar prácticamente horizontal, puesto que se cancelan las

En la figura 7 se muestra la forma que adquiere la cuerda cuando oscila en sus diferentes modos, y se realiza la comparación con las gráficas analíticas que se obtienen a partir de las autofunciones (4.1), cuyos autovalores se obtuvieron a partir de (4.2) y (4.3).

Se observa que los modos de pendiente discontinua y continua se alternan de modo que después de dos de pendiente discontinua viene uno de pendiente continua.

Como puede notarse a partir de la Tabla 2, existen modos consecutivos con frecuencias próximas. ¿Qué sucede si se excita al sistema con una frecuencia externa intermedia entre esas dos frecuencias consecutivas? Es bien sabido a partir de las oscilaciones forzadas que el sistema, luego de un transitorio, oscilará con la frecuencia de excitación externa.

contribuciones de los dos modos, mientras que en la segunda mitad esas contribuciones se refuerzan, tal como se ve en la figura 8. Algo similar sucede si se excita el sistema con una frecuencia de 36.4 Hz: en este caso se excitan simultáneamente el 4º y el 5º modo.

## VI. OSCILACIONES LIBRES

Ahora se estudian las oscilaciones libres de una cuerda de densidad de masa  $\mu(x)$  y longitud  $2L$ , fija en sus extremos y cargada en su punto medio con una masa  $M$ . En este caso, las funciones propias  $\Phi_n$  del problema de autovalores asociado vienen dadas por las ecuaciones (3.1) mientras que los correspondientes autovalores  $k_n$  se determinan a partir de la relación de dispersión (3.2). La solución general del problema de autovalores es una combinación lineal de las funciones propias  $\Phi_n$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_n(x) \cos(ck_n t + \phi_n) \quad (6.1)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de las oscilaciones transversales. Así, la ecuación (6.1) representa el estado de movimiento más general de una cuerda cargada en su punto medio y con ambos extremos fijos.

Las fases  $\phi_n$  y las amplitudes  $A_n$  en (6.1) se determinan a partir de las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (6.2)$$

$$\dot{u}(x, 0) = g(x) \quad (6.3)$$

donde  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones bien comportadas que describen la posición y la velocidad iniciales de la cuerda. Si se considera que la cuerda posee velocidad inicial nula ( $g(x) \equiv 0$ ), se puede mostrar que  $\phi_n = 0$ , para todo valor de  $n$ . Con este resultado, la condición (6.2) conduce a la siguiente relación:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_n(x) \quad (6.4)$$

La ecuación (6.4) representa el desarrollo en serie de la función  $f(x)$  en términos de las autofunciones  $\Phi_n$ , por lo tanto, los coeficientes  $A_n$  pueden determinarse a través de la fórmula (2.13).

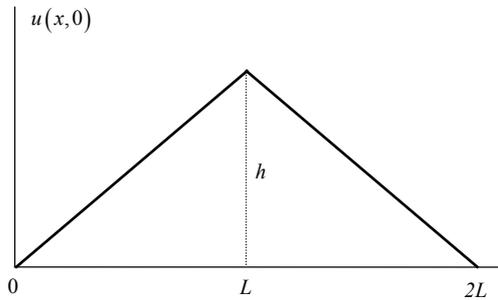


Figura 9. Condiciones iniciales para la cuerda vibrante fija en sus dos extremos.

Si en el instante  $t = 0$  la masa  $M$  se separa una distancia  $h$  de su posición de equilibrio, como se muestra en la figura 9, la función  $f(x)$  toma la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{L}x & x \in [0, L] \\ -\frac{h}{L}x + 2h & x \in [L, 2L] \end{cases} \quad (6.5)$$

Utilizando la ecuación (2.13) se obtiene para los coeficientes  $A_n$  del desarrollo (6.4) la siguiente expresión:

$$A_n = \begin{cases} \frac{2h \sin(k_n L)}{(k_n L)^2 \left[ 1 + \frac{M}{2m} \sin^2(k_n L) \right]} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (6.6)$$

El resultado (6.6) indica que solamente los modos impares contribuyen al movimiento general de la cuerda pulsada en su punto medio. Este resultado puede entenderse si se observa que la forma inicial de la cuerda  $f(x)$  es una función simétrica respecto de  $x = L$ . Los modos normales asociados a un índice  $n$  impar, que intervienen en (6.6) son también funciones simétricas respecto de  $x = L$ .

La velocidad transversal  $v_y$  de un punto  $x_0$  arbitrario de la cuerda, como una función del tiempo, resulta:

$$v_y(x_0, t) = \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial t} \quad (6.7)$$

En particular, eligiendo  $x_0 = L$  y utilizando las ecuaciones (6.1)-(6.7) junto a  $\Phi_n(L) = A \sin(k_n L)$ , se tiene que:

$$v_y(L, t) = -\frac{2hc}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k_n L)}{k_n \left[ 1 + \frac{M}{2m} \sin^2(k_n L) \right]} \sin(ck_n t) \quad (6.8)$$

con  $n$  impar.

Si  $M = 0$  se cumple la relación  $k_n L = n\pi/2$  para todo  $n$  natural, lo que implica que  $\sin^2(k_n L) = 1$  y por lo tanto (6.8) puede ponerse bajo la forma más compacta que se muestra a continuación:

$$v_y^{(h)}(L, t) = -\frac{4ch}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nck_1 t)}{n} \quad (6.9)$$

donde el superíndice  $(h)$  indica que se trata de una cuerda homogénea sin masa concentrada. La fórmula (6.9) coincide con el desarrollo en serie de Fourier de un tren de ondas cuadradas de alturas  $\pm(4h/\pi L)c$ .

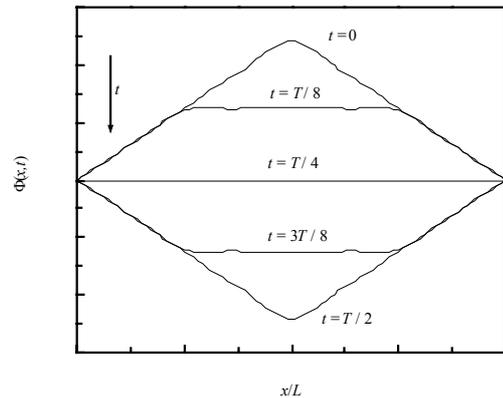


Figura 10. Instantáneas de una cuerda homogénea sin masa concentrada.

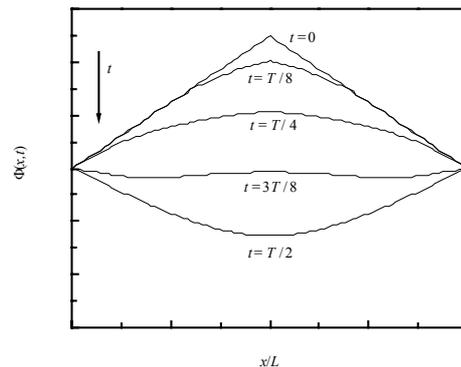


Figura 11. Instantáneas de la cuerda con una masa concentrada  $M = m$  en su punto medio.

En la figura 10 se muestran diversas instantáneas de una cuerda homogénea sin masa concentrada en los instantes  $t = 0, T/8, T/4, 3T/8$  y  $T/2$ , donde  $T$  es el periodo de oscilación de la cuerda sin masa concentrada. En la figura 11 se muestran instantáneas de la cuerda con una masa  $M = m$  concentrada en su punto medio para los

mismos instantes de tiempo. Para el cálculo de las oscilaciones libres de la cuerda homogénea se consideraron los primeros 10 armónicos impares del desarrollo, mientras que para el caso de la masa concentrada, se utilizaron los 7 primeros términos de (6.1). La inclusión de armónicos superiores no modifican los resultados aquí discutidos.

En la figura 10 se observa que los puntos de la cuerda, cuando entran en movimiento, se mueven con una velocidad constante, que coincide con la velocidad del punto medio que viene dado por (6.9). Este comportamiento puede ser explicado como sigue: en el caso de la cuerda homogénea, el elemento de cuerda de masa infinitesimal que está en el punto medio está sometido en  $t = 0$ , a una fuerza transversal neta dirigida hacia abajo. En ese instante dicho elemento de cuerda experimenta una aceleración instantánea infinita, que hace que su velocidad salte de 0 a  $-(4h/\pi L)c$ . En un instante infinitesimal posterior la fuerza neta sobre este elemento de cuerda se hace cero y, por lo tanto, se mueve con una velocidad uniforme  $-(4h/\pi L)c$  hasta llegar, en  $t = T/2$ , al extremo inferior, donde otra vez actúa una fuerza neta sobre el elemento de cuerda, esta vez dirigida hacia arriba, que produce una inversión de su velocidad sin cambiar su módulo. La velocidad transversal del punto medio de la cuerda en función del tiempo asume la forma de una onda cuadrada de período  $T$ . En cambio, en el caso de la cuerda cargada y debido a la presencia de la masa  $M$ , el movimiento ya no es periódico: la forma triangular inicial no se recupera en ningún instante de tiempo posterior. Por otro lado, el movimiento está retrasado respecto al movimiento correspondiente al caso de la cuerda homogénea, siendo este retardo mayor a medida que el valor de  $M$  aumenta. Por ejemplo, para el caso  $M = m$  que se muestra en la figura 11, la relación entre el período  $T$  de las oscilaciones de la cuerda homogénea y el *pseudoperíodo* para la cuerda cargada es 1/1.5, aproximadamente.

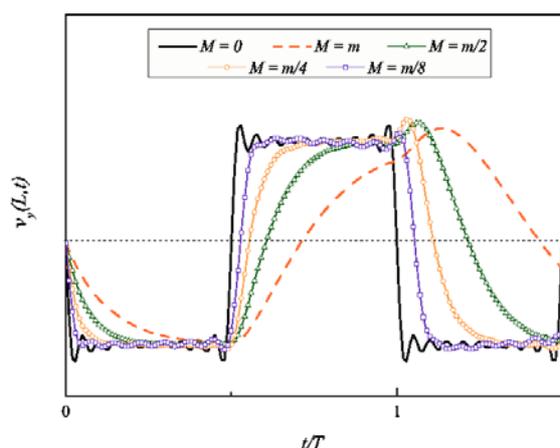


Figura 12. Velocidad transversal del punto medio de la cuerda cargada en función del tiempo, para diferentes valores de la masa  $M$  concentrada.

En la figura 12, se representa la velocidad transversal del punto  $x = L$  para diferentes valores de la masa  $M$  concentrada. Se incluye además el caso  $M = 0$  que corresponde a la cuerda homogénea. Puede observar-

se que la velocidad transversal para el caso de la cuerda cargada tiende al caso de la cuerda homogénea a medida que  $M$  disminuye, recuperándose la onda cuadrada que caracteriza la velocidad transversal para  $M = 0$ . Como la aceleración de la masa concentrada es siempre finita, su velocidad no tiene discontinuidades.

## VII. ANALOGÍAS CON OTROS SISTEMAS

### Mecánica cuántica: ejemplo de estados casi degenerados de paridad opuesta (molécula amoniaco).

La molécula de amoniaco  $\text{NH}_3$ , está compuesta por un átomo de Nitrógeno N y tres átomos de hidrógeno H que están en el vértice de un triángulo equilátero formando un plano. El átomo de N presenta dos posiciones posibles respecto de ese plano. Una de las posiciones (1) está situado a la izquierda de este plano y el otro está a la derecha (2). El átomo N no puede pasar fácilmente de una región a otra, debido a la existencia de una barrera de energía potencial entre estas regiones. Para simplificar el problema se puede considerar que en  $x = -L$  y  $x = L$  se tienen dos paredes infinitas, y que en  $x = 0$  se tiene una barrera delta  $V_0 a \delta(x)$ . Esta barrera delta se comporta aproximadamente como una barrera finita de altura  $V_0$  y ancho  $a$ .

El problema de autovalores que da lugar este problema es idéntico al de la cuerda cargada en su punto medio que se analizó en la sección 3. Los autovalores se agrupan de a pares dando lugar a estados casi degenerados, mientras que las autofunciones son simétricas y antisimétricas en la variable  $x$ .

### Antenas dipolares cargadas en su punto medio

A bajas frecuencias y, por consiguiente, longitudes de ondas largas, las limitaciones de espacio no permiten que una antena dipolar tenga una media longitud de onda. Pero, si la longitud física de la antena es menor que la media longitud de onda, su resistencia de radiación se reduce considerablemente y su impedancia de entrada presenta una reactancia capacitiva grande. La solución para estos casos es colocar en cada rama de la antena inductancias "concentradas". Esta inductancia concentrada permite que la antena entre en resonancia, en su modo más bajo, con una longitud física menor que la media longitud de onda. El efecto de la inductancia concentrada es similar a la masa concentrada que se ubica en el punto medio de una cuerda homogénea, problema que fue analizado en la sección 3.

### Referencias

- 1 J.-L. Lagrange, "Évres", Gauthiers-Villiers, Paris (1867).
- 2 J.W.S. Rayleigh, "The Theory of Sound", NY: Dover (2<sup>nd</sup>.edn. of 1894, reprinted 1945).
- 3 A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii, "Equations of Mathematical Physics", NY: Dover (1996).
- 4 R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics", Vol 1, Interscience Publishers, NY (1955).
- 5 J.E. Bolwell, Eur. J. Phys. **20**, 305-312 (1999).
- 6 C.E. Gough, Eur. J. Phys. **21**, L11-L14 (2000).