

# Transmisión a través de barreras fluctuantes

## Transmission through fluctuating barriers

Miguel A. Ré

Facultad de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba  
 Ciudad Universitaria - (5010) - Córdoba - Argentina  
*e-mail: re@famaf.unc.edu.ar*

En esta comunicación se considera el movimiento estocástico de una partícula entre dos barreras fluctuantes. Las barreras fluctúan entre un estado abierto que permite el paso de la partícula y un estado cerrado que devuelve la partícula a la región delimitada por las barreras.

El movimiento de partículas a través de medios desordenados se ha estudiado generalmente en dos aproximaciones: las fluctuaciones son muy rápidas o muy lentas cuando se comparan con la escala de tiempos del movimiento de la partícula. En el primer caso se obtiene el límite Markoviano: la partícula encuentra un medio sin memoria. En el segundo caso encontramos un desorden congelado.

Consideramos aquí la situación intermedia en la que la frecuencia de las fluctuaciones es comparable con la frecuencia de las transiciones en el desplazamiento. Consideramos en particular la probabilidad de atravesar la región delimitada por las barreras: la probabilidad de que una partícula que ingresa por la izquierda abandone la región por la derecha. Investigamos la resonancia de la probabilidad de escape con la frecuencia de fluctuaciones.

It is considered in this communication the stochastic displacement between two fluctuating barriers of a particle. The barriers fluctuate between two possible states: an open state that allows the particle to pass and a closed state that returns the particle to the region delimited by the barriers.

Particle displacements through disordered media has been generally studied in two approximations: very fast or very slow fluctuations as compared with the time scale of particle movement. The first situation is the Markovian limit: the particle moves in a disordered medium without memory. The second situation corresponds to a quenched disorder.

We consider here an intermediate situation when the fluctuation frequency is of the same order as the transitions frequency of the particle. It is calculated the probability of passing through the region between the barriers, *i.e.* the probability that a particle entering at left to the region leaves this region at the right extreme. It is found an increasing traversing probability with the fluctuation frequency.

Pacs N<sup>0</sup> 05.40+j; 05.40.-d

## 1 Introducción

Diversos procesos como la difusión en vidrios o la difusión de un sustrato en reacciones enzimáticas<sup>(1)</sup> concebido como la superación de varios cuellos de botella contenidos en la estructura enzimática pueden describirse a partir de modelos de difusión a través de barreras fluctuantes (en particular con fluctuaciones entre dos estados)<sup>(2)</sup>.

El movimiento de partículas en un medio desordenado fluctuante se ha estudiado frecuentemente en una de dos situaciones extremas: asumiendo que las fluctuaciones temporales son extremadamente rápidas cuando se las compara con la escala de tiempos del desplazamiento de las partículas que difunden o por el contrario suponiendo que las fluctuaciones son extremadamente lentas comparando con la misma es-

cala. En el primer caso puede usarse una aproximación markoviana en la que el sistema no guarda memoria de las fluctuaciones. El otro caso límite corresponde a un desorden congelado en el medio.

Más recientemente se han comenzado a estudiar procesos en la situación intermedia, en la que las escalas de tiempo de la difusión y de las fluctuaciones son comparables<sup>(3,4)</sup>, lo que ha dado lugar al estudio del fenómeno de resonancia en sistemas fluctuantes<sup>(5)</sup>.

En particular se ha planteado el estudio del proceso de transporte en un sistema de barreras fluctuantes<sup>(1)</sup>, encontrándose, en forma asintótica, una mayor probabilidad de transmisión a través del sistema que en ausencia de las barreras. Este resultado que podría considerarse inesperado, puede interpretarse considerando que aún cuando la presencia de barreras en el extremo final del intervalo de transmisión puede

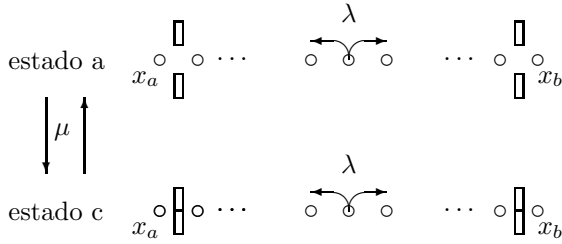


Figura 1: Esquema del modelo unidimensional formulado. La frecuencia de transiciones del caminante sobre la red es  $\lambda$  en tanto que la correspondiente a los cambios de estado es  $\mu$ . En el estado a (barreras abiertas) el caminante puede pasar al sitio trampa en  $x_a$ , considerándose finalizado el proceso sin transmisión. Similarmente, en el otro extremo el caminante puede pasar al sitio trampa  $x_b$ , considerándose finalizado el proceso habiéndose efectuado la transmisión. En el estado c (barreras cerradas) las trampas en  $x_a$  y  $x_b$  están inaccesibles y el caminante no puede abandonar la red.

dificultar el proceso, en el tramo inicial la presencia de las barreras evita que la partícula vuelva a la región de salida. Los resultados hasta aquí conocidos se han obtenido para límites asintóticos de los parámetros que regulan el proceso de fluctuaciones.

En esta comunicación se presenta un cálculo exacto para la transmisión en un sistema de dos barreras fluctuantes. El modelo propuesto corresponde a una caminata aleatoria de tiempo continuo sobre una red unidimensional finita. En cada extremo de la red se incluye una barrera fluctuante. Se calcula la probabilidad de que un caminante que ingresa en la red por el extremo izquierdo abandone la misma por el extremo opuesto, denominándose a esta cantidad la probabilidad de transmisión. La comparación con la misma cantidad en un medio equivalente sin la presencia de barreras nos permite determinar el aumento debido a la presencia de barreras.

## 2 Descripción del modelo

Se formula el modelo de transmisión a través de la región de barreras como un problema de doble atrapamiento dinámico<sup>(6)</sup> en una caminata aleatoria de tiempo continuo sobre una red unidimensional, ilustrado en la figura 1. Cada sitio en la red se identifica por un número entero  $x$ . En cada extremo de la red suponemos la presencia de una trampa dinámica que fluctúa entre un estado abierto o activo y un estado cerrado o inactivo, identificándose con los estados abierto y cerrado de las barreras respectivamente. Una partícula que ingresa a la red en el sitio  $x_a + 1$  realiza una caminata aleatoria de tiempo continuo sobre esta red. La partícula no puede abandonar la red cuando las barreras están cerradas, en tanto que cuando las

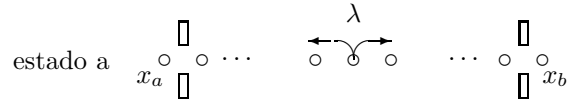


Figura 2: Modelo de transmisión en ausencia de cambios de estado de las barreras. Este problema resulta equivalente a suponer que en el esquema de la figura 1 las barreras permanecen abiertas para todo  $t$ .

barreras están abiertas la partícula puede ser atrapada en una cualquiera de las trampas en los extremos de la red. La transmisión a través de la región se asocia con el atrapamiento del caminante por la trampa ubicada en  $x_b$ . Por el contrario, si la partícula es atrapada por la trampa en  $x_a$ , no se produjo transmisión. La magnitud a calcular para el proceso de transmisión es la probabilidad de que una partícula, que comenzó en  $x_a + 1$  en el tiempo  $t = 0$ , sea atrapada en  $x_b$ . Para la consideración del proceso de transmisión el estado inicial de las barreras debe ser abierto.

Se supone que la partícula realiza una caminata aleatoria simétrica de tiempo continuo con transiciones a primeros vecinos y dinámica de transiciones de primer orden con frecuencia de transiciones  $\lambda$  descrita por la densidad de probabilidad para el tiempo entre transiciones

$$\psi_0(x - x'; t) = \frac{1}{2} [\delta_{x, x'-1} + \delta_{x, x'+1}] \lambda e^{-\lambda t} \quad (1)$$

y por lo tanto  $\psi_0(x - x'; t) dt$  es la probabilidad de que el caminante concluya su estadía en el sitio  $x'$  luego de un tiempo  $t$  de permanencia mediante una transición  $x' \rightarrow x$ .

La fluctuación de las barreras, a su vez, también se supone descrita por una dinámica de primer orden simétrica con densidad de probabilidad para el tiempo de permanencia en un estado particular (cerrado o abierto)  $f(t) = \mu \exp(-\mu t)$ . El parámetro  $\mu$  es la frecuencia de transiciones para el ruido dicotómico que describe el cambio de estado de las barreras. Nótese que en el modelo aquí propuesto las barreras cambian de estado sincronizadamente.

Se supone además que los procesos de cambio de posición del caminante y de cambio de estado de las barreras son estadísticamente independientes.

## 3 Transmisión sin barreras

En esta sección se calcula la probabilidad de transmisión en ausencia de barreras (o con las barreras siempre abiertas) como se ilustra en la figura 2. El resultado que se obtiene permitirá establecer la influencia de la presencia de las barreras fluctuantes en la probabilidad de transmisión.

Se considera en primer término el problema de una caminata aleatoria homogénea (en ausencia de tram-

pas) con la densidad de probabilidad para el tiempo de pausa dado por (1). Se incluye este problema, con resultados conocidos, a fin de presentar la notación a utilizar y por completitud en la presentación.

Sea  $G^{(0)}(x; t | x_0)$  la densidad de probabilidad condicional para el tiempo de arribo del caminante a una posición  $x$  en la red, condicionado a que el caminante comience en la posición  $x_0$ . La densidad  $G^{(0)}(x; t | x_0)$  debe cumplir con la relación de recurrencia

$$G^{(0)}(x; t | x_0) = \delta_{x, x_0} \delta(t - 0^+) + \sum_{x'} \psi_0(x - x'; t) \star G^{(0)}(x'; t | x_0) \quad (2)$$

con el símbolo  $\star$  se representa el producto de convolución temporal entre dos funciones

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t dt' f(t - t') g(t')$$

La relación de recurrencia en (2) puede resolverse calculando la transformada de Laplace en la variable temporal y la de Fourier en la espacial obteniéndose en la representación de Laplace

$$G^{(0)}(x; u | x') = \frac{\zeta^{|x-x_0|}}{\psi_0(u) R} \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_0(u) &= \sum_x \psi_0(x - x'; u) \\ R &= \sqrt{\frac{1}{\psi_0(u)^2} - 1} \\ \zeta &= \frac{1}{\psi_0(u)} - R \end{aligned} \quad (4)$$

De aquí en más se indica la transformada de Laplace de una función del tiempo mediante la sustitución  $t \rightarrow u$ :  $f(u) = \int_0^\infty dt e^{-ut} f(t)$ . En la expresión anterior  $\psi_0(u)$  corresponde a la densidad de probabilidad para el tiempo de pausa, que en el caso particular en consideración (1) resulta  $\psi_0(u) = \lambda / (u + \lambda)$ .

Se considera a continuación el problema de transmisión en ausencia de barreras que, en el esquema propuesto, puede plantearse como un problema de doble atrapamiento: se supone un caminante que comienza su caminata en el sitio  $x_0 = x_a + 1$  y la presencia de dos trampas perfectas en las posiciones  $x_a$  y  $x_b > x_a$  respectivamente. El problema así planteado equivale a suponer en el esquema general que las barreras no se cierran nunca y por lo tanto que las trampas en  $x_a$  y  $x_b$  están siempre accesibles. El comportamiento de las trampas es tal que cuando el caminante llega a alguna de estas posiciones es transferido inmediatamente a un estado de limbo del cual no puede

regresar. El atrapamiento del caminante en el sitio  $x_b$  se asocia con la transmisión del caminante a través de la red, en tanto que el atrapamiento en  $x_a$  significa que el caminante no pudo atravesar la red volviendo a la región de partida. Ambos eventos, atrapamiento en  $x_a$  y atrapamiento en  $x_b$  son mutuamente excluyentes. Se calcula por lo tanto la densidad de probabilidad para el tiempo de arribo del caminante a la posición  $x_b$ , condicionado a que no haya visitado previamente el sitio  $x_a$  *i.e.* la densidad de probabilidad para el tiempo de atrapamiento en  $x_b$ .

Se denota a la densidad de probabilidad para el tiempo de arribo a un sitio genérico  $x$  de la red por  $G^{(t)}(x; t | x_0)$  para un caminante que arranca en la posición  $x_0$  en  $t = 0$ . El supraíndice  $(t)$  indica que la densidad corresponde al problema de doble atrapamiento. En particular resultarán de interés los valores  $x_a < x_0 < x_b$ .

La densidad  $G^{(t)}(x; t | x_0)$  puede calcularse mediante una generalización del método de inhomogeneidad local planteado en<sup>(6)</sup>, suponiendo una densidad de probabilidad para el tiempo entre transiciones

$$\psi(x - x'; t) = \begin{cases} \psi_0(x - x'; t) & x_b \neq x' \neq x_a \\ 0 & x' = x_a \text{ o } x' = x_b \end{cases} \quad (5)$$

La definición refleja el comportamiento supuesto en los sitios trampa: una vez llegado a alguno de ellos la partícula es transferida a alguno de los estados limbo y no puede regresar a la red. En los demás sitios suponemos que la densidad de probabilidad para el tiempo de transiciones coincide con la del problema homogéneo (1).

La densidad de probabilidad para el tiempo de arribo deberá satisfacer una ecuación de recurrencia similar a la establecida en (2), con la sustitución de la nueva densidad para el tiempo entre transiciones definida en (5)

$$\begin{aligned} G^{(t)}(x; t | x_0) &= \delta_{x, x_0} \delta(t - 0^+) + \\ &+ \sum_{x'} \psi_0(x - x'; t) \star G^{(t)}(x'; t | x_0) - \\ &- \psi_0(x - x_a; t) \star G^{(0)}(x_a; t | x_0) - \\ &- \psi_0(x - x_b; t) \star G^{(0)}(x_b; t | x_0) \end{aligned} \quad (6)$$

Pasando a la representación de Laplace y calculando la suma  $\sum_{x'} G^{(0)}(x; u | x') G^{(t)}(x'; u | x_0)$  obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} G^{(t)}(x; u | x_0) &= G^{(0)}(x; u | x_0) - \\ &- [G^{(0)}(x; u | x_a) - \delta_{x, x_a}] G^{(t)}(x_a; u | x_0) - \\ &- [G^{(0)}(x; u | x_b) - \delta_{x, x_b}] G^{(t)}(x_b; u | x_0) \end{aligned} \quad (7)$$

Evaluando esta ecuación alternativamente en  $x = x_a$  y  $x = x_b$  se obtiene un sistema de dos ecuaciones

que permiten calcular

$$G^{(t)}(x_b; u | x_0) = \frac{\zeta^{|x_b-x_0|} - \zeta^{|x_b-x_a|}\zeta^{|x_a-x_0|}}{1 - \zeta^{2|x_b-x_a|}} \quad (8)$$

Haciendo uso del resultado (3). Tomando en cuenta que el rango de interés para la solución es  $x_a < x_0 < x_b$ , el resultado puede reescribirse como

$$G^{(t)}(x_b; u | x_0) = \zeta^{|x_b-x_a|} \frac{1 - \zeta^{2|x_a-x_0|}}{1 - \zeta^{2|x_b-x_a|}} \quad (9)$$

Se evalúa este resultado en  $x_0 = x_a + 1$ , dado que  $G^{(t)}(x; t | x_0)$  coincide con la densidad de probabilidad para el tiempo de transmisión sin barreras. La función obtenida en (9) es la transformada de Laplace de esta magnitud, por lo que, evaluada en  $u = 0$  resulta

$$G^{(t)}(x_b; u = 0 | x_0) = \int_0^\infty dt G^{(t)}(x_b; t | x_0) \quad (10)$$

la probabilidad de transmisión, que se denota por  $E_0$ . Suponiendo  $n$  sitios en la red ( $x_b - x_a = n + 1$ ), esta probabilidad resulta

$$E_0 = \frac{1}{n+1} \quad (11)$$

Con este valor deberá compararse la probabilidad para el sistema con barreras fluctuantes, a fin de determinar si las mismas favorecen la transmisión.

#### 4 Modelo de caminata aleatoria multiestado

En esta sección se presenta un modelo de caminata aleatoria multiestado sobre una red unidimensional infinita y homogénea. Los resultados a obtener se utilizarán en la sección siguiente para expresar la probabilidad de transmisión a través del sistema de barreras fluctuantes. El modelo en consideración puede representarse como una caminata aleatoria en el espacio  $\Omega = x \otimes i$ , con  $x$  la posición del caminante en la red e  $i$  el estado interno del mismo, caracterizado por la matriz de transición con elementos en la diagonal

$$H_{i,i}^{(0)}(x - x'; t) = \psi_0(x - x'; t) e^{-\mu t} \quad (12)$$

y elementos fuera de la diagonal

$$H_{i,j}^{(0)}(x - x'; t) = \mu e^{-(\mu+\lambda)t} \delta_{x,x'} \quad (13)$$

Nótese que en el esquema propuesto, correspondiente a una caminata en ausencia de barreras, se han descartado las transiciones simultáneas de posición y estado interno por ser de segundo orden en  $dt$ .

El esquema aquí propuesto corresponde por lo tanto al esquema general de la figura 1, en ausencia de barreras y trampas. Dada la suposición de dinámica markoviana para ambos procesos, esta matriz no presenta los problemas de regeneración del sistema<sup>(7)</sup>, que surgen en la construcción de una matriz de transiciones más general.

Se introduce a continuación la densidad de probabilidad para el tiempo de llegada al sitio  $(x, i)$  para un caminante que arranca en  $t = 0$  en  $(x_0, i_0)$ , denotada como  $G_{i,i_0}^{(m)}(x; t | x_0)$ . Esta densidad de probabilidad debe satisfacer la relación de recurrencia

$$G_{i,i_0}^{(m)}(x; t | x_0) = \delta_{x,x_0} \delta_{i,i_0} \delta(t - 0^+) + \sum_{x',j} H_{i,j}^{(0)}(x - x'; t) \star G_{j,i_0}^{(m)}(x'; t | x_0) \quad (14)$$

La ecuación puede resolverse pasando a la representación de Fourier - Laplace. La solución que se obtiene en la representación de Laplace, expresada en términos de la densidad monoestado (3), es

$$G^{(m)}(x; u | x_0) = \frac{1}{2\Phi_0} \begin{bmatrix} g_+(x - x_0)g_-(x - x_0) \\ g_-(x - x_0)g_+(x - x_0) \end{bmatrix} \quad (15)$$

siendo  $\zeta$  y  $R$  los símbolos introducidos en (4) y con las definiciones

$$\begin{aligned} \Phi_0^{-1} &= u + \lambda + \mu \\ g_{\pm}(x - x_0) &= \frac{\zeta^{|x-x_0|}}{\lambda R} \pm \frac{\zeta_{\pm}^{|x-x_0|}}{\lambda R_{\pm}} \\ R_{\pm} &= \sqrt{\left(\frac{u + 2\mu + \lambda}{\lambda}\right)^2 - 1} \\ \zeta_{\pm} &= \frac{u + \lambda + 2\mu}{\lambda} - R_{\pm} \end{aligned} \quad (16)$$

La simetría de la solución hallada refleja la simetría supuesta tanto para el proceso de difusión del caminante como para el de fluctuaciones de las barreras.

#### 5 Transmisión con barreras fluctuantes

En esta sección se considera la transmisión a través de un sistema de dos barreras fluctuantes mediante un modelo de caminata aleatoria multiestado. La caminata tiene lugar sobre una red inidimensional como se ilustra en la figura 1 y se discutió en la sección 2.

La matriz de transición para un sitio regular de red es la descrita en (12) y (13). Para los sitios trampa será

$$H_{c,c}(x - x_t; t) = \delta_{x,x_t \pm 1} \delta(t - 0^+) \quad (17)$$

para los estados inicial y final de las barreras cerradas, con el signo “+” para  $x_t = x_a$  y el signo “-” para  $x_t = x_b$ . Este elemento de matriz corresponde a una condición reflectante: cuando el caminante intenta una transición a los sitios trampa, con las barreras cerradas, es devuelto al sitio de partida. Los demás elementos de matriz para los sitios trampa son idénticamente nulos, correspondiendo al hecho de que el caminante no puede permanecer en las trampas ni abandonar la posición con las barreras abiertas. Para este estado de las barreras la transición del caminante

a la posición de las trampas implica su inmediato atrapamiento.

Se denota por  $G_{i,i_0}^{(f)}(x; t | x_0)$  la densidad de probabilidad para el tiempo de arribo del caminante al estado  $(x, i)$  suponiendo que partió del estado  $(x_0, i_0)$ . Esta matriz debe satisfacer la relación de recurrencia

$$G_{i,i_0}^{(f)}(x; t | x_0) = \delta_{x,x_0} \delta_{i,i_0} \delta(t - 0^+) + \sum_{x',j} H_{i,j}(x - x'; t) * G_{j,i_0}^{(f)}(x'; t | x_0) \quad (18)$$

Para resolver esta ecuación la reescribimos en la representación de Laplace como

$$G_{i,i_0}^{(f)}(x; u | x_0) = \delta_{x,x_0} \delta_{i,i_0} + \sum_{x',j} H_{i,j}^{(0)}(x - x'; u) G_{j,i_0}^{(f)}(x'; u | x_0, i_0) - \sum_j \Delta_{ij}(x - x_a) G_{j,i_0}^{(f)}(x_a; u | x_0) - \sum_j \Delta_{ij}(x - x_b) G_{j,i_0}^{(f)}(x_b; u | x_0) \quad (19)$$

donde se han introducido por comodidad los símbolos

$$\Delta_{i,j}(x - x') = [H_{i,j}(x - x'; u) - H_{i,j}^{(0)}(x - x'; u)]$$

Calculando

$$\sum_{x',j} G_{i,j}^{(m)}(x; u | x') G_{j,i_0}^{(f)}(x'; u | x_0)$$

y haciendo uso de la relación de recurrencia (14) obtenemos la ecuación

$$G_{i,i_0}^{(f)}(x; u | x_0) = G_{i,i_0}^{(m)}(x; u | x_0) - \sum_j [\chi_{i,j}(x; u | x_a) - \delta_{i,j} \delta_{x,x_a}] G_{j,i_0}^{(f)}(x_a; u | x_0) - \sum_j [\chi_{i,j}(x; u | x_b) - \delta_{i,j} \delta_{x,x_b}] G_{j,i_0}^{(f)}(x_b; u | x_0) \quad (20)$$

donde hemos definido

$$\chi_{i,j}(x; u | x') = G_{i,j}^{(m)}(x; u | x') - \sum_{l,x_i} G_{i,l}^{(m)}(x; u | x_i) H_{l,j}(x_i - x'; u) \quad (21)$$

Nótese que si  $x'$  es un sitio regular de red  $\chi_{i,j}(x; u | x') = \delta_{i,j} \delta_{x,x'}$  de acuerdo con la ecuación (14). Evaluando en  $x = x_a$  y  $x = x_b$  obtenemos un sistema de dos ecuaciones matriciales que nos permiten resolver

$$G_{i,i_0}^{(f)}(x_b; u | x_0) = \sum_l [V_\beta^{-1}]_{i,l} [G_\beta]_{l,j} \quad (22)$$

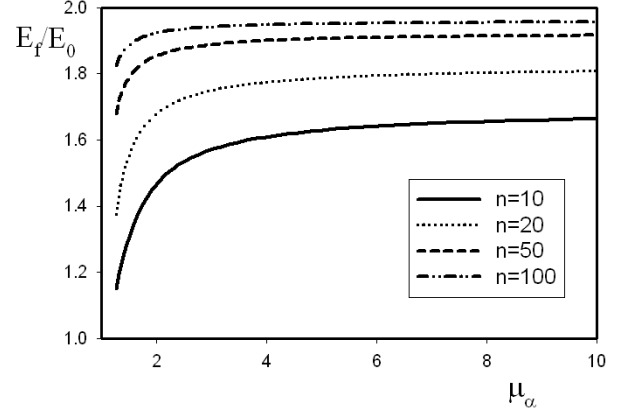


Figura 3: ganancia en la probabilidad de transmisión para el sistema de barreras fluctuantes.  $E_f$  es la probabilidad de transmisión para el sistema de barreras fluctuantes,  $E_0$  la correspondiente al sistema sin barreras y  $\mu_\alpha$  es el parámetro definido en (24). Se ilustran los resultados para distintos valores de  $n$  (número de sitios en la red). Nótese el aumento de “ganancia” para redes más largas.

con las definiciones de las matrices auxiliares

$$V_\beta = \chi^{-1}(x_b; u | x_a) \chi(x_b; u | x_b) - \chi^{-1}(x_a; u | x_a) \chi(x_a; u | x_b) \quad (23)$$

$$G_\beta = \chi^{-1}(x_b; u | x_a) G^{(m)}(x_b; u | x_0) - \chi^{-1}(x_a; u | x_a) G^{(m)}(x_a; u | x_0)$$

Aún cuando la estructura de la solución (22) es algo complicada, conviene señalar que es un resultado exacto en la representación de Laplace. En particular el elemento de matriz  $G_{a,a}^{(f)}(x_b; t | x_a + 1)$  es la función que da la probabilidad para el tiempo de transmisión a través del sistema de barreras fluctuantes, dado que tanto para el ingreso como para el egreso de la región de difusión, las barreras deben estar abiertas.

Evaluando en  $u = 0$  el resultado obtenemos la probabilidad de transmisión

$$E_f = \left[ \frac{1 - \mu_\alpha^{n+1}}{(1 - \mu_\alpha)(1 - \mu_\alpha^n)} + \frac{n+1}{2} \right]^{-1} \quad (24)$$

con

$$\mu_\alpha = 2 \frac{\mu}{\lambda} + 1 - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{\mu}{\lambda} + 1 \right)} \quad (25)$$

Este resultado se compara con  $E_0$  en (11) para evaluar si la fluctuación de las barreras favorece la transmisión. Encontramos así que el cociente

$$\frac{E_f}{E_0} = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1 - \mu_\alpha^{n+1}}{(1 - \mu_\alpha)(1 - \mu_\alpha^n)} \frac{1}{n+1} \right]^{-1} \quad (26)$$

resulta  $\geq 1$  en todo el rango de valores de  $\mu_\alpha$ , dado que  $\mu_\alpha \geq 1$ . Los valores obtenidos se ilustran en la figura 3. Obsérvese que a valores mayores de  $n$  mayor es la ganancia en el proceso de transmisión, alcanzándose para valores menores de  $\mu_\alpha$  el límite asintótico  $E_f/E_0 = 2$ .