

SIMULACIÓN ÓPTICA DEL ALGORITMO CUÁNTICO DE DEUTSCH

D.Francisco, C.Iemmi y S.Ledesma

Laboratorio de Procesado de Imágenes (LPI). Departamento de Física - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires - Pabellón I, Ciudad Universitaria (1428) - Buenos Aires - Argentina

e-mail: ledesma@df.uba.ar

(Dated: Octubre de 2006)

Es sabido que ciertos aspectos de la óptica clásica, nos permiten representar distintos algoritmos cuánticos. Por ejemplo, se han realizado recientes trabajos donde se muestra la simulación óptica de los algoritmos de Deutsch-Jozsa y de Grover. La idea central consiste en representar los estados cuánticos como imágenes espacialmente separadas a la entrada de un sistema óptico. Mediante este sistema se realizan ciertas operaciones sobre la imagen o sobre su figura de difracción. Finalmente, se obtiene una imagen que representa el estado cuántico resultante al terminar el proceso. En este trabajo utilizamos una arquitectura propuesta recientemente para la simulación óptica de la transformada de Hadamard sobre un qubit para resolver ópticamente el problema de Deutsch. Dicho problema consiste en decidir si una función cuyo dominio e imagen es el conjunto $\{0, 1\}$ es constante o balanceada. La solución clásica de este problema requiere evaluar la función dos veces mientras que cuánticamente, solo se requiere evaluarla una vez. El operador unitario que evalúa la función es simulado mediante la aplicación de fases selectivas a los estados de entrada usando una pantalla de cristal líquido que funciona como modulador espacial del frente de onda luminoso. La transformación de Hadamard consiste esencialmente en generar la superposición de los estados por medio de una red de fase en el plano de Fourier. Se muestran resultados de las imágenes obtenidas para todas las configuraciones posibles para verificar que nuestro sistema es capaz de resolver el problema en todos los casos.

Palabras Clave: Procesamiento óptico de la información, algoritmos cuánticos.

It is well known that certain aspects of classical optics allows us to represent many quantum algorithms. For example, in recent works several optical simulations of Deutsch-Jozsa and Grover Search algorithm are shown. The main idea is to represent the quantum states as spatially separated objects in the input scene of some optical system. By means of this system certain operations on the image or on its diffraction figure are performed. Finally, we obtain an output image that represents the quantum state at the end of the process. In this work we use a recently proposed architecture for simulating the Hadamard operation acting on one qubit state for optically solve the Deutsch problem. This problem consist in to decide if some function whose domain and image is the set $\{0, 1\}$ is either constant or balanced. The classical solution of this problem requires to evaluate this function two times while by means of quantum mechanics we can solve it with only one evaluation. The unitary operation that evaluates the function is simulated by means of selective phase shifts to the input states by using a liquid crystal display as spatial light modulator. Hadamard transform consist in superposing the states by means of a phase grating in the Fourier plane. In order to demonstrate the capability of the system for solving the problem we show the obtained images for all possible configurations.

Key Word: Optical information processing, quantum algorithms.

I. INTRODUCCIÓN

Dado el interés actual en áreas como la información y la computación cuántica, el desarrollo de métodos de procesamiento óptico de la información cuántica ha recibido una atención creciente. La idea básica que sustenta este tipo de simulaciones es que tanto el campo electromagnético de la óptica clásica como los estados cuánticos de un sistema físico evolucionan siguiendo una ecuación de ondas y además satisfacen el principio de superposición [1]. Es de esperar entonces que ciertos experimentos de óptica clásica puedan ser útiles a la hora de simular el comportamiento de ordenadores cuánticos [2-7]. Más allá de su innegable interés académico, tales simulaciones pueden ayudarnos a entender algunas de las propiedades básicas de estos algoritmos. En este sentido, es importante el desarrollo de nuevas arquitecturas que puedan ser llevadas a cabo en el laboratorio y que permitan

obtener resultados precisos con relativamente poca dificultad y a bajo costo. En este trabajo presentamos un sistema óptico basado en una arquitectura propuesta recientemente para la implementación del operador de Hadamard actuando sobre un qbit [8] y mostramos que dicho sistema permite simular ópticamente la solución al problema de Deutsch. En las secciones siguientes, veremos como representar a partir de la óptica clásica los estados cuánticos y las evoluciones unitarias, describiremos brevemente el algoritmo de Deutsch y mostraremos las imágenes y perfiles de intensidad correspondientes a los resultados experimentales obtenidos.

II. GENERALIDADES

En esta sección se revisarán los aspectos esenciales del problema que nos ocupa. Por un lado haremos una referencia

muy breve a las nociones básicas necesarias de información cuántica y describiremos en forma sucinta el algoritmo de Deustch. Por otro lado, nos ocuparemos de la cuestión de la representación óptica de los estados cuánticos y de las evoluciones unitarias que se requieren para resolver el problema.

Así como una computadora clásica opera sobre bits clásicos (cbits) una computadora cuántica opera sobre bits cuánticos (qbits). El espacio de estados de un qbit suele representarse en la llamada base computacional, que es el conjunto $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Así, el estado más general para un qbit es una combinación lineal de la forma $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ donde α y β son coeficientes complejos que satisfacen la condición de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. El estado más general de n qbits requiere para su representación la consideración del espacio de Hilbert 2^n dimensional.

A. Breve descripción del problema de Deustch

Consideremos una función $f: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$. Existen cuatro de tales funciones de las cuales dos son constantes ($f(0) = f(1)$) y otras dos balanceadas ($f(0) \neq f(1)$). El objetivo del problema es el de determinar a cual de las dos clases pertenece una función dada. Clásicamente, es evidente que para resolver el problema debemos evaluar a esta función dos veces. Veremos que un ordenador cuántico, al menos en teoría, es capaz de resolver el problema "evaluando" la función una sola vez. El circuito que evalúa la función (el oráculo) representa al operador unitario sobre el espacio de Hilbert de dos qbits definido de la manera siguiente: $U_f|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle$ con $x, y \in \{0, 1\}$ y donde el símbolo \oplus denota la suma binaria. El algoritmo (que ha sido dividido en dos módulos por simplicidad) funciona como sigue: comenzamos preparando como estado inicial la combinación siguiente $(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$ (donde se han omitido por simplicidad las constantes de normalización). Aplicando U_f a este estado inicial, resulta:

$$U_f \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

U_f puede interpretarse entonces como la aplicación de una fase selectiva a cada término en la expansión del estado del primer qbit. Dicho corrimiento en la fase dependerá del valor de la función f en el valor lógico correspondiente al término afectado. El segundo módulo es la aplicación del operador de Hadamard sobre el estado del primer qbit. Su representación matricial en la base computacional y su acción sobre los estados de la base son como sigue:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \quad (3)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \quad (4)$$

Si aplicamos la transformación de Hadamard (definida por las Ecs. 3 y 4) al estado del primer qbit y seguidamente medimos el estado resultante, puede probarse que la probabilidad de detectar el estado $|x = 0\rangle$ es:

$$P(|x = 0\rangle) = \left(\frac{(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}}{2} \right)^2 \quad (5)$$

Esta probabilidad es entonces igual a cero si la función es balanceada o bien igual a uno si la función es constante. Luego, simplemente detectando el estado final del proceso, podemos determinar con certeza a cual de las dos clases pertenece la función codificada en el oráculo. La resolución del problema se resume en el siguiente circuito:

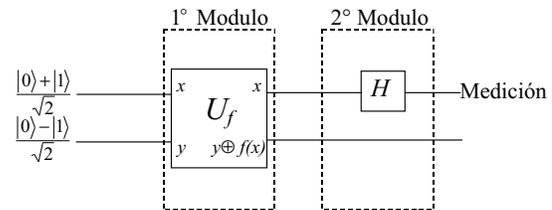


Figura 1: Circuito cuántico que resuelve el problema de Deutsch

En el esquema anterior la línea horizontal superior representa el estado del primer qbit mientras que la línea inferior representa el estado del segundo. El estado inicial aparece a la izquierda. Operadores sobre el espacio de dos qbits (como U_f) se representan como rectángulos que incluyen a las dos líneas mientras que los operadores que actúan sobre un qbit (como el de Hadamard) afectan solamente a una línea. La evolución temporal de los estados se interpreta leyendo el circuito de derecha a izquierda.

B. Representación óptica de los estados

Como ya hemos adelantado, la idea es representar a los estados computacionales como imágenes espacialmente organizadas a la entrada (o salida) de un cierto sistema óptico. Asumiendo que el plano de la escena está limitado por una región rectangular, identificaremos a la zona superior del rectángulo como uno de los estados de la base computacional y a la zona inferior como el estado restante. Seleccionaremos convencionalmente a la zona contenida en la región superior como representación del estado lógico $|0\rangle$. El estado $|1\rangle$ corresponderá entonces a la zona inferior. El procedimiento puede

generalizarse para la representación de estados de más de un qbit mediante la asignación de 2^n regiones rectangulares. De este modo, el estado de un qbit de valor lógico bien definido, corresponderá a una escena de entrada donde la amplitud compleja del campo electromagnético es nula en todo el plano salvo en la región rectangular asignada a dicho valor lógico (Fig. 2a). En la Fig. 2b se muestra la distribución de campo asociada a un estado arbitrario de un qbit y en la Fig. 2c se muestra una posible organización espacial de la escena de entrada para la representación de estados de dos qbits.

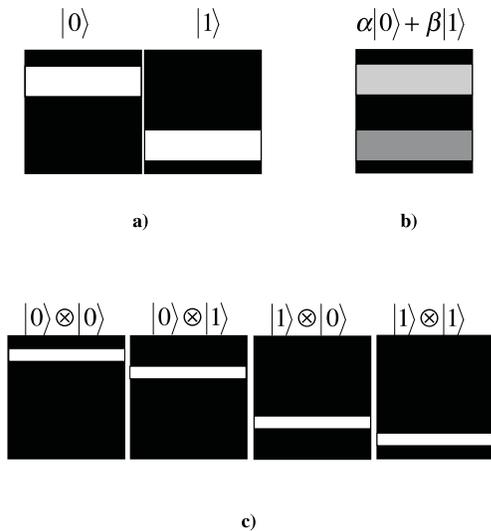


Figura 2: Ejemplos para la transmitancia de entrada del sistema en los casos siguientes: (a) estados de un qbit de valor lógico bien definido, (b) estado más general de un qbit, (c) los cuatro estados de valor lógico bien definido para el espacio de estados de dos qbits.

C. Representación óptica de las evoluciones unitarias

Ya hemos mencionado que dividimos el proceso completo en dos módulos para su representación óptica. El primer módulo consiste en la simulación óptica del operador U_f . Para representar ópticamente la aplicación del oráculo, usamos un modulador espacial de luz programable (SLM) trabajando en modo de fase. Aplicar el oráculo es simplemente introducir un corrimiento de fase π al estado $|x\rangle$ del primer qbit cada vez que $f(x)=1$ conforme a la ecuación (1). El operador de Hadamard es simulado mediante una placa de fase (PP) y una red de fase (PG) en el plano de Fourier de la escena de entrada [8]. La frecuencia espacial de la red se selecciona de modo que disperse la luz incidente en órdenes separados en una distancia igual a los estados del primer qbit. La amplitud de la modulación en fase es tal que los tres órdenes centrales difractados por la red (-1,0 y 1) tienen la misma amplitud. La placa de fase se dispone de modo que los órdenes capturados en la imagen final interfieran conforme a la descripción dada en las ecuaciones (3) y (4). El dispositivo experimental completo se muestra en la Fig. 3. Un laser es expandido, fil-

trado y colimado por la lente L_0 . El haz colimado incide sobre la escena de entrada que es representada junto con el operador U_f en una única pantalla de cristal líquido programable (SLM) trabajando en modo de fase. Se ha demostrado [9] que cualquier función compleja puede representarse en un medio de este tipo.

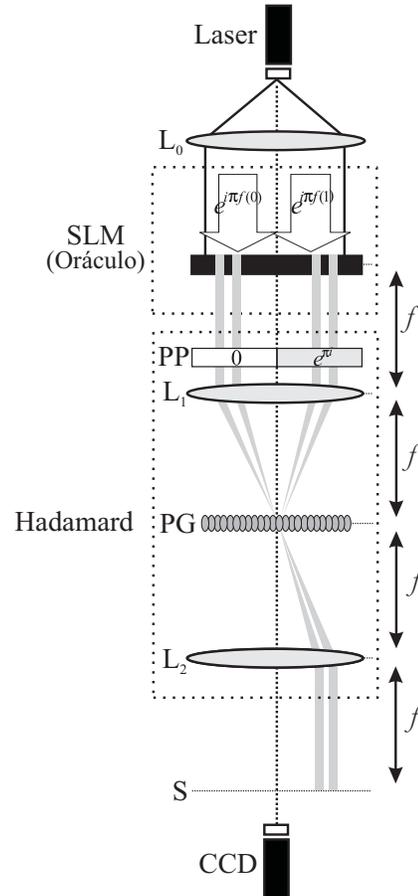


Figura 3: Dispositivo experimental que simula ópticamente el algoritmo de Deutsch.

El modulador espacial de luz consiste en una pantalla de cristal líquido Sony TV (LCTV) que combinada con dos polarizadores y dos láminas retardadoras, actúan como un modulador espacial en modo de fase. La LCTV (modelo LCX0112BL) fue extraída de un videoprojector comercial y es un panel VGA cuya resolución es de 640x480 pixels. Los pixeles son cuadrados de $34\mu\text{m}$ de lado y están separados por una distancia de $41,3\mu\text{m}$. La placa de fase fue construida por deposición de un film transparente sobre la mitad de una placa de vidrio que introduce un desfase π en la onda plana incidente respecto de la otra mitad. La lente L_1 (distancia focal 45cm) permite obtener la transformada de Fourier de la escena de entrada. En el plano de Fourier se coloca la red de transmisión de fase. Una tercera lente L_2 es usada para obtener la transformada inversa de Fourier que es proyectada en la pantalla S y registrada mediante una cámara (CCD).

III. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los resultados experimentales son las imágenes obtenidas a la salida de nuestro dispositivo y se resumen en la Fig. 4. En la parte superior se muestra la representación óptica del estado cuántico de entrada definido en la Ec. 1. Abajo, en la primera columna, describimos la función codificada en el oráculo. En la segunda columna, se muestra la representación óptica de la aplicación del oráculo que, como ya se ha discutido, consiste en la aplicación de corrimientos de fase realizados en forma selectiva. La tercera columna, presenta las imágenes capturadas por la CCD del estado a la salida del dispositivo luego de la aplicación del oráculo seguida de la transformación de Hadamard sobre el primer qbit. En la cuarta columna pueden verse los perfiles de intensidad extraídos de las imágenes a lo largo de la línea blanca punteada.

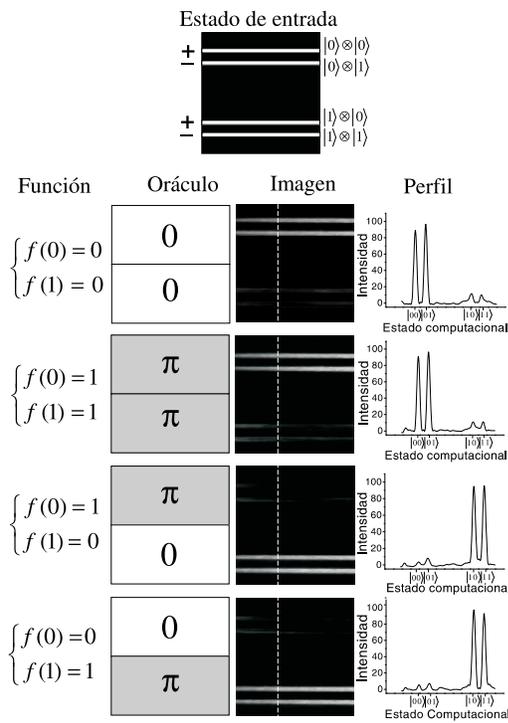


Figura 4: Resultados experimentales.

Notar que en el caso de funciones constantes se obtiene una

imagen donde solo está iluminada la región asociada al estado $|0\rangle$ del primer qbit (arriba en la imagen, a la izquierda en el perfil) conforme al resultado dado por la Ec. 5. Las funciones balanceadas dan contrariamente intensidad no nula asociada a la mitad inferior (derecha). Este resultado está en muy buen acuerdo con la distribución de probabilidad predicha.

IV. CONCLUSIONES

Se ha presentado un dispositivo óptico de implementación relativamente sencilla capaz de simular la solución al problema de Deutsch desde la perspectiva de la óptica clásica. Este algoritmo constituye un ejemplo simple pero no trivial que ilustra las ventajas potenciales de los ordenadores cuánticos frente a los análogos clásicos. El dispositivo está basado en una arquitectura que permite simular ópticamente la transformación de Hadamard sobre un qbit a partir de técnicas de procesamiento de imágenes. Los resultados experimentales han sido satisfactorios y permiten inferir la factibilidad de dichas técnicas para la construcción de analogías clásicas de algoritmos de computación e información cuántica. En general hay una serie de limitaciones que conciernen a la cantidad de información que puede ser procesada por este tipo de sistemas. Esta limitación está fundamentalmente asociada al número de estados que puedan acomodarse en la escena de entrada. Por un lado, dicho número depende de las dimensiones del sistema óptico y por otro lado de la resolución del medio donde los estados sean representados. Otra cuestión a considerar es que la alta coherencia de la fuente luminosa genera ruido de speckle y las aberraciones de los elementos ópticos utilizados para simular los operadores pueden introducir fases no deseadas. No obstante, el sistema es capaz de reproducir satisfactoriamente los resultados predichos.

V. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen sinceramente los comentarios y sugerencias hechos por los profesores Juan Pablo Paz y Lucila Cescato. La placa de fase fue manufacturada en el Laboratorio de Óptica Difractiva (Unicamp, Campinas, Sao Paulo, Brasil) bajo la supervisión de Lucila. Este proyecto fue financiado por ANPCYT PICT 12333 y UBA X215S. S. Ledesma y C. Iemmi son miembros del CONICET.

[1] M. Nielsen, I. Chuang, *Quantum Computation and Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
 [2] N.J. Cerf, C. Adami, P.G. Kwiat, *Phys. Rev. A* 57, (1998) R1477.
 [3] R.J.C. Spreeuw, *Found. Phys.* 28, (1998) 361.
 [4] R.J.C. Spreeuw, *Phys. Rev. A* 63, (2001) 062302
 [5] N. Bhattacharya, H. B. van Linden van den Heuvell and R.J.C. Spreeuw, *Phys. Rev. Lett.* 88, (2002) 137901.
 [6] G. Puentes, C. La Mela, S. Ledesma, C. Iemmi, J. P. Paz and M.

Saraceno, *Phys. Rev. A* 69, (2004) 042319
 [7] P. Kwait, J. Mitchell, P. Schwindt and A. White, *J. Mod. Opt.* 47, (2000) 257.
 [8] D. Francisco, C. Iemmi, J.P.Paz, S. Ledesma *Optics Communications*, In Press (2006)
 [9] A. Marquez, C. Iemmi, I. Moreno, J. A. Davis, J. Campos, and M. J. Yzuel, *Opt. Eng.* 40,(2001)2558.