

CAMINATA CUÁNTICA AL AZAR SIMULADA ÓPTICAMENTE

D.Francisco, C.Iemmi y S.Ledesma

Laboratorio de Procesado de Imágenes (LPI). Departamento de Física - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires - Pabellón I, Ciudad Universitaria (1428) - Buenos Aires - Argentina

e-mail: ledesma@df.uba.ar

(Dated: Octubre de 2006)

Los algoritmos cuánticos son, en general, mucho más eficientes que los clásicos lo que los vuelve particularmente interesantes para ser usados en computación. La llamada caminata clásica al azar ha sido usada tradicionalmente para modelar procesos de difusión. En el caso unidimensional se considera una partícula que está obligada a moverse sobre una línea. Se supone además que la partícula se mueve siempre a la misma velocidad y que puede desplazarse hacia a la derecha o la izquierda en pasos discretos con igual probabilidad. Al cabo de varias iteraciones, la distribución de probabilidad sobre las posibles posiciones de la partícula sigue una función Gaussiana centrada en el origen. La contrapartida cuántica consta de estados descriptos por una función de ondas que es una combinación de los estados de la base computacional con coeficientes complejos. Una vez establecido el estado de partida se aplica un operador de Hadamard y un operador de traslación condicional. Al cabo de varias iteraciones del proceso, se obtienen distribuciones que no aproximan a una Gaussiana y que pueden ser incluso no simétricas para algunas condiciones iniciales. Esta propiedad podría ser muy útil en un algoritmo de búsqueda. En este trabajo se muestra como puede ser simulada ópticamente una caminata cuántica al azar utilizando elementos ópticos convencionales y representando espacialmente los q-bits como imágenes en un procesador óptico. Se presentan resultados experimentales en los que se muestra la viabilidad del proceso.

Palabras Clave: Procesamiento óptico de la información, algoritmos cuánticos.

Quantum algorithms are, generally, more efficient than their classical counterparts and they are particularly interesting in computation. The usually called classical random walk, has been traditionally used for modeling diffusive stochastic process. In the unidimensional case we consider a single particle that moves on a line. In addition, we suppose that the particle moves always with the same velocity and that it has the possibility of moving to the left or to the right in discrete steps with the same probability. After several iterations, the probability of finding the particle in a certain position on the line is a Gaussian distribution centered at the initial position. In the quantum counterpart the state of the particle is described by a wave function that is a complex linear combination of the computational basis states. Given a initial state we apply a Hadamard operator and then a conditional displacement operator. After several iterations of the process, we obtain distributions that are different than the Gaussian distribution and even could be nonsymmetric for some initial conditions. This property could be very useful in a search algorithm. In this work we show a classical optical simulation of the quantum random walk by using conventional optical devices and by representing the quantum states (qbits) as images in an optical processor. We present experimental results where we show the viability of the process

Key Word: Optical information processing, quantum algorithms.

I. INTRODUCCIÓN

La posibilidad de procesar información usando métodos cuánticos no solo es interesante a los fines prácticos sino también desde el punto de vista fundamental y conceptual. De hecho, las computadoras cuánticas [1] han recibido atención no solo porque podrían ser exponencialmente más eficientes que las clásicas sino también porque ellas hacen uso de los aspectos menos intuitivos de la mecánica cuántica. Las caminatas cuánticas han sido recientemente propuestas como subrutinas [2] muy útiles a la hora de desarrollar nuevos algoritmos. Ejecutando estas subrutinas, el ordenador tiene la ventaja de utilizar su naturaleza cuántica para recorrer un cierto grafo más eficientemente que con cualquier otra rutina basada en procesos estocásticos clásicos. La posibilidad de simular computadoras cuánticas usando sistemas ópticos clásicos ya ha sido explorada [3-11]. La idea principal es

utilizar la naturaleza ondulatoria del campo electromagnético para representar un estado cuántico. De este modo, si dividimos el frente de onda plano proveniente de un láser en $2N$ haces, la amplitud del campo electromagnético en cada haz puede ser asociada a la amplitud de probabilidad de un cierto estado de la base de un sistema cuántico cuyo espacio de Hilbert es $2N$ -dimensional. La distribución espacial de intensidad es asociada en este esquema con la probabilidad de detectar cada uno de los estados computacionales. La evolución temporal de los estados también puede ser simulada. De hecho, dicha evolución corresponde a la modificación de la distribución espacial de la amplitud compleja del campo cuando éste se propaga a través de un cierto sistema óptico. La posibilidad de simular caminatas al azar cuánticas usando óptica clásica ya ha sido establecida tanto teórica como experimentalmente [8,9]. Presentamos aquí un nuevo esquema de simulación óptica basado en una arquitectura

de procesamiento de imágenes cuya ventaja es la de hacer que el sistema completo sea más robusto frente a ruidos e inestabilidades mecánicas. El trabajo está organizado como sigue: En la Sec. II describimos brevemente la caminata al azar cuántica. En la Sec. III sugerimos el esquema para la simulación óptica (clásica) de un paso del algoritmo. En la sección IV describimos el dispositivo óptico utilizado y presentamos los resultados experimentales. Finalmente, en la sección V discutimos acerca de los alcances y el significado del trabajo.

II. LA CAMINATA AL AZAR CUÁNTICA

La caminata al azar clásica (unidimensional) consiste en un caminante que puede moverse sobre sitios dispuestos en un arreglo lineal. Supongamos que cada sitio tiene asignado un número entero $n \in \mathbb{Z}$. A cada paso, el caminante arroja una moneda al aire y dependiendo del resultado de dicha operación se desplaza hacia alguno de sus dos sitios vecinos. Es fácil mostrar que luego de t iteraciones de este proceso la distribución de probabilidad de ocupación de sitios es binomial (básicamente Gaussiana para t grande) y centrada en la posición inicial. La caminata cuántica (QRW) puede pensarse como una generalización directa de la versión clásica. La moneda clásica es reemplazada por una moneda cuántica que no es otra cosa que un sistema de dos niveles (un qbit). El estado del caminante estará asociado a un espacio de Hilbert N -dimensional. La evolución del sistema, consiste en la aplicación iterada de los dos operadores siguientes: Primero, se aplica el equivalente cuántico del proceso de lanzar una moneda al aire que es el llamado operador de Hadamard. Luego el caminante se mueve a la derecha o a la izquierda dependiendo de cual sea el estado de la moneda cuántica que tiene asociado (luego de este último paso la moneda y el caminante estarán entrelazados). Llamaremos traslación condicional a esta última operación. Denotando a los dos estados ortonormales que forman la base del espacio de los qbits $|0\rangle$ y $|1\rangle$ y $|n_0\rangle$ al estado inicial de la posición del caminante, el operador de Hadamard definido según $H|j\rangle = 1/\sqrt{2} \sum_{k=0,1} (-1)^k |k\rangle$, ($j = 0, 1$); transforma el estado inicial producto $|\Psi_0\rangle = |n_0\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ en:

$$H|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |n_0\rangle \otimes [(\alpha + \beta)|0\rangle + (\alpha - \beta)|1\rangle] \quad (1)$$

El segundo paso del algoritmo es aplicar el operador de traslación condicional D. Luego de esta operación el estado es

$$|\Psi_1\rangle = DH|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\alpha + \beta)|n_0 + 1\rangle \otimes |0\rangle + (\alpha - \beta)|n_0 - 1\rangle \otimes |1\rangle] \quad (2)$$

Luego de t iteraciones el estado es $|\Psi_t\rangle = (DH)^t |\Psi_0\rangle$. La

probabilidad de detectar al caminante en la posición n luego de t iteraciones puede calcularse como:

$$P_t(n) = |(\langle 0| \otimes \langle n|) |\Psi_t\rangle|^2 + |(\langle 1| \otimes \langle n|) |\Psi_t\rangle|^2 \quad (3)$$

En la Fig.1 puede verse la evolución comparada de las probabilidades de ocupación de sitios para los caminantes clásico y cuántico (este último con la condición inicial $\alpha = -i\beta = 1/\sqrt{2}$) cuando la posición inicial de ambos es $|n_0\rangle = 0$. Las discrepancias entre los casos clásico y cuántico, aparecen recién en la cuarta iteración.

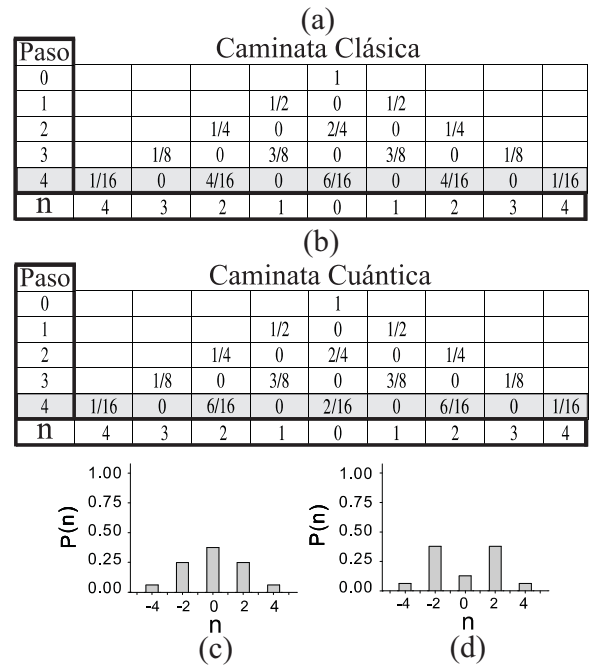


Figura 1: Evolución temporal comparada de las distribuciones de probabilidad de ocupación de sitios para los caminantes clásico (a) y cuántico (b) en las primeras cuatro iteraciones de cada proceso. En (c) y (d) se muestran las distribuciones clásica y cuántica respectivamente a la salida del cuarto paso.

La ventaja del caminante cuántico frente al clásico es evidente cuando se estudia el crecimiento de la dispersión en las distribuciones de probabilidad para ambos modelos. Mientras el caminante clásico sigue un proceso de tipo difusivo (dispersión creciente linealmente en el tiempo), el caminante cuántico sigue un proceso de tipo balístico (dispersión creciente cuadráticamente en el tiempo). Por lo tanto, el caminante cuántico explora todas las configuraciones posibles del espacio de estados más eficientemente que el clásico. En la Fig.2 se muestran las distribuciones en el paso $t=100$ a partir de las simulaciones numéricas de ambos procesos.

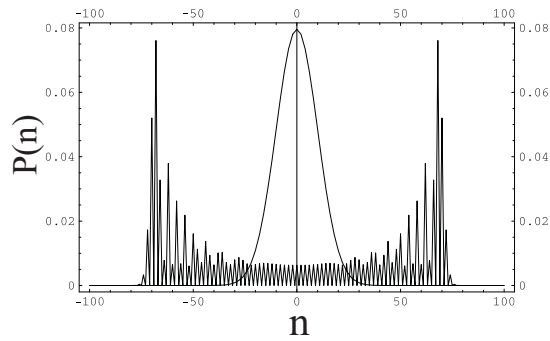


Figura 2: Distribuciones comparadas para la iteración $t=100$. La distribución fuertemente oscilante corresponde al caminante cuántico que muestra mayor probabilidad de estar lejos del origen que el caminante clásico.

III. SIMULACIÓN ÓPTICA

A. Representación óptica de los estados

Supongamos que el plano de entrada de nuestro sistema óptico es una región rectangular dividida en dos mitades. Las mitades derecha e izquierda corresponderán a los dos estados computacionales del qbit: Convencionalmente, diremos que el estado $|0\rangle$ corresponderá al lado izquierdo y el estado $|1\rangle$ al lado derecho. A su vez, cada una de estas regiones será subdividida en regiones rectangulares más pequeñas, que identificaremos con un número entero k . De este modo tendremos al plano de entrada organizado espacialmente de modo que cada estado del conjunto $\{|0\rangle, |1\rangle\} \times \{|k\rangle, k \in Z\}$ esté representado por una escena donde la amplitud del campo electromagnético sea nula en todo el plano salvo en un único rectángulo. En la Fig.3 se muestran algunas de estas representaciones para los estados computacionales. Estados más generales (es decir, combinaciones lineales complejas de los anteriores) requerirán para su representación del uso de dispositivos capaces de controlar tanto la amplitud como la fase del campo electromagnético. Las pantallas de cristal líquido programables, cuyo uso discutiremos en breve, son muy útiles para este propósito.

B. Representación óptica de las evoluciones unitarias

Como hemos visto, la evolución temporal de las probabilidades de ocupación de sitios está definida por la aplicación iterada de dos operaciones unitarias: El operador de Hadamard (contrapartida cuántica del proceso de lanzar una moneda al aire) seguido de un operador de traslación condicional. Cada una de estas operaciones se interpreta en este esquema de simulación como la modificación de la distribución de amplitud y fase del campo electromagnético a la salida de cierto dispositivo óptico. El operador de Hadamard, cuya implementación ha sido presentada recientemente [7], es simulado mediante una placa de fase (PP) y una red de fase (PG) en el plano de Fourier de la escena de entrada. La frecuencia espacial de la red se selecciona de modo que disperse la luz

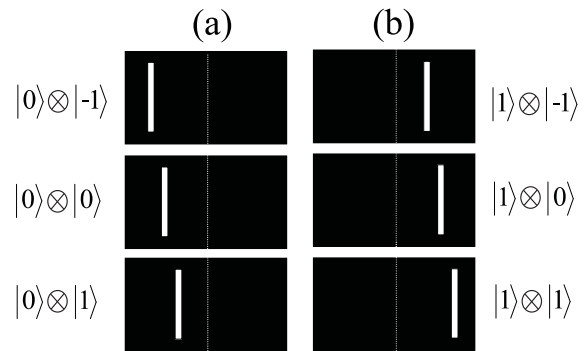


Figura 3: Representación de los estados de la base computacional como escenas de entrada de un sistema óptico.

incidente en órdenes separados en una distancia igual a los estados del primer qbit. La red se confecciona de modo que los tres órdenes centrales difractados (-1,0 y 1) tengan la misma amplitud. Para realizar una iteración completa del proceso, es necesario contar con la representación óptica de la traslación condicional. Para realizar esta operación proponemos el uso de las dos mitades separadas de una lente esférica cortada según su diámetro. La mitad izquierda de la lente es desplazada a la izquierda mientras que la mitad derecha es desplazada a la derecha. Controlando la separación entre las dos mitades es posible obtener en el plano final un desplazamiento igual al requerido por el algoritmo (es decir, desde un rectángulo dado hacia uno de sus dos rectángulos contiguos, dependiendo de la mitad considerada). Las fases lineales adicionales originadas en los desplazamientos de los centros de cada mitad de la lente, son corregidos mediante un biprisma de Fresnel.

El dispositivo óptico completo se muestra en la Fig.4. Un laser de He-Ne ($\lambda=633$ nm) es expandido, filtrado y colimado por la lente L_0 . El haz colimado incide sobre el plano P_1 donde se representa el estado cuántico como escena de entrada. La placa de fase (PP) introduce un retraso de la fase en π en la porción del campo que emerge desde la mitad izquierda. La lente L_1 (de 30 cm de distancia focal) permite obtener la transformada de Fourier del plano de entrada. La distribución de campo transformado se hace coincidir con la red de fase (G) que es usada para realizar la transformación de Hadamard óptica. En nuestro caso, se utilizó una red de transmisión sintetizada holográficamente de frecuencia espacial 75mm^{-1} . Una tercera lente L_2 dividida en dos mitades realiza tanto la transformada inversa de Fourier como la operación de traslación condicional. El biprisma de Fresnel (FBP) corrige las fases lineales adicionales producidas por la lente dividida. La imagen resultante, que es un registro de intensidad de la distribución de campo correspondiente al estado cuántico a la salida del proceso, es proyectada en una pantalla P_2 y recogida por una cámara digital (CCD). Como ejemplo del funcionamiento del dispositivo, se muestra la marcha de rayos para la información proveniente del estado $1/\sqrt{2}(|0\rangle \otimes |n\rangle + |1\rangle \otimes |n\rangle)$. En la interpretación de la imagen final, habrá de tenerse en

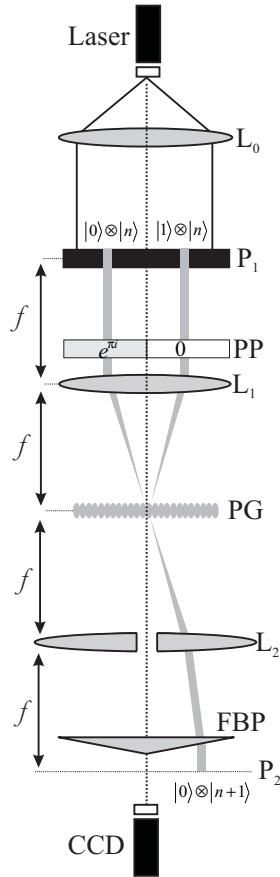


Figura 4: Dispositivo experimental que simula ópticamente el algoritmo QRW.

cuenta la inversión del sistema de coordenadas provocada por el dispositivo en cada iteración.

IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En principio, cualquiera sea la condición inicial, podemos realizar t iteraciones del proceso QRW por medio de t dispositivos idénticos al descrito en la sección anterior. Sin embargo, aún podemos obtener resultados experimentales que muestren la naturaleza cuántica de la simulación utilizando solamente uno. En efecto, supongamos que alimentamos a nuestro dispositivo con la escena de entrada correspondiente a la distribución de campo electromagnético a la salida del tercer paso (si pretendemos usar solamente un módulo, esto deberá hacerse artificialmente). Luego obtendremos como imagen final la salida del cuarto paso que es justamente la que muestra discrepancias entre los casos clásico y cuántico. Es decir, considerando la condición inicial $|\Psi_0\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ luego de tres iteraciones el estado es

$$(DH)^3 |\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(7\pi/4)} |-1\rangle + e^{i(\pi/2)} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/4)} |3\rangle \right) + |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(3\pi/4)} |-3\rangle + e^{i\pi} |-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/4)} |1\rangle \right) \quad (4)$$

Para configurar este estado, donde es necesaria la representación de amplitudes complejas, usamos un modulador espacial de luz (SLM). Dicho dispositivo consiste en una pantalla de cristal líquido Sony TV (LCTV) que combinada con dos polarizadores y dos láminas retardadoras, actúan como un modulador espacial en modo de fase. La LCTV (modelo LCX0112BL) fue extraída de un videoprojector comercial y es un panel VGA cuya resolución es de 640x480 pixels. Los pixeles son cuadrados de $34\mu\text{m}$ de lado y están separados por una distancia de $41,3\mu\text{m}$. Se ha demostrado que cualquier función compleja es representable en un medio de este tipo [12].

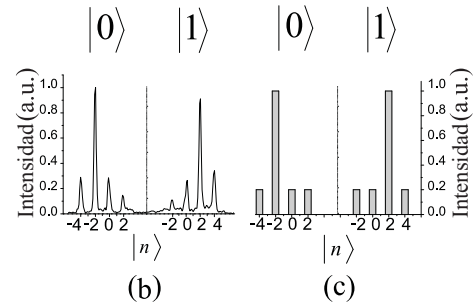


Figura 5: Resultados experimentales correspondientes a la simulación óptica de una iteración del algoritmo QRW desde el tercer hasta el cuarto paso

En la Fig.5(a) se muestra la imagen de salida producida por el dispositivo cuando la escena de entrada corresponde a la representación óptica del estado de la Ec.(4). Más abajo en la Fig.5(b) se muestran el perfil (horizontal) de intensidades medias y finalmente en la Fig.5(c) el perfil teórico esperado. Puede notarse que la imagen está parcialmente contaminada por ruido de speckle debido a la alta coherencia de la fuente. Más aún, las aberraciones de los elementos ópticos también contribuyen a la corrupción de la imagen final. No obstante, el sistema es capaz de reproducir los resultados que se esperan.

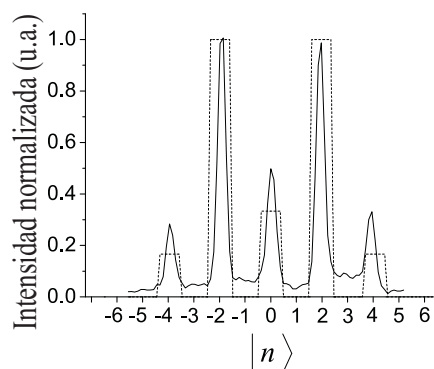


Figura 6: Distribución de probabilidad de ocupación de sitios en el cuarto paso de QRW obtenida ópticamente (línea llena) y distribución teórica esperada (línea punteada)

Por último, se suman los perfiles de intensidad correspondientes a los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ de la Fig.4(b). Conforme a la Ec.(3) dicha adición normalizada deberá ser la distribución de probabilidad de ocupación de sitios al cuarto paso del algoritmo QRW. El resultado se expone en la Fig.6. Como puede observarse, aunque las probabilidades de ocupación de sitios difieren significativamente de las predichas teóricamente, se obtiene un buen acuerdo, al menos cualitativamente.

Se ha mencionado que para simular la evolución de cualquier condición inicial aplicando t iteraciones del proceso, es necesario disponer de t dispositivos ópticos idénticos al estudiado. No obstante hay algunas limitaciones fundamentales en este sentido. De hecho, el número de recursos necesarios para implementar un cierto número de iteraciones crece linealmente con ese número de modo que cada iteración duplica la dimensión del espacio de Hilbert. En nuestro caso esta limitación está principalmente asociada al número de estados que puedan ser representados como escena de entrada. Esto depende tanto de las dimensiones del sistema óptico utilizado (diámetro de las lentes) como de la resolución del medio donde dichos estados son representados.

V. CONCLUSIONES

Se ha estudiado un dispositivo óptico capaz de simular una iteración del algoritmo QRW. Se ha mostrado como realizar esta simulación con herramientas de la óptica clásica usando un par de lentes esféricas (una de ellas seccionada según su diámetro), una placa de fase, una red de fase y un biprisma de Fresnel en una configuración típica de procesamiento de imágenes. La implementación consiste en representar los estados cuánticos como imágenes espacialmente organizadas a la entrada de un sistema óptico. Por su parte dicho sistema representa las operaciones unitarias que realizan una iteración del proceso. Una vez construido, el dispositivo fue puesto a prueba con la finalidad de comprobar su capacidad para reproducir los resultados esperados para el caso de la caminata cuántica. Para ello, se representó en una pantalla de cristal líquido la distribución de campo electromagnético a la salida del tercer paso del algoritmo QRW. Como hemos enfatizado, las distribuciones esperadas para los caminantes clásico y cuántico difieren recién a la salida del cuarto paso. Luego del procesamiento a través del dispositivo se obtuvo una distribución de probabilidad de ocupación de sitios muy similar a la de la Fig.1(d). Dicho resultado, ilustra claramente como la naturaleza ondulatoria de la evolución puede ser representada clásicamente de manera pintoresca en el contexto de la óptica clásica para obtener resultados relativamente precisos y con bajo costo de equipamiento.

VI. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen sinceramente los comentarios y sugerencias hechos por los profesores Juan Pablo Paz y Lucila Cescato. La placa de fase fue manufacturada en el Laboratorio de Óptica Difractiva (Unicamp, Campinas, Sao Paulo, Brasil) bajo la supervisión de Lucila. Este proyecto fue financiado por ANPCYT PICT 12333 y UBA X215. S. Ledesma y C. Iemmi son miembros del CONICET.

-
- [1] M. Nielsen, I. Chuang, *Quantum Computation and Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [2] J. Kempe, *Contemp. Phys.* 44, 307 (2003)
- [3] R.J.C. Spreeuw, *Found. Phys.* 28, (1998) 361.
- [4] R.J.C. Spreeuw, *Phys. Rev. A* 63, (2001) 062302
- [5] N. Bhattacharya, H. B. van Linden van den Heuvell and R.J.C. Spreeuw, *Phys. Rev. Lett.* 88, (2002) 137901.
- [6] G. Puentes, C. La Mela, S. Ledesma, C. Iemmi, J. P. Paz and M. Saraceno, *Phys. Rev. A* 69, (2004) 042319
- [7] D. Francisco, C. Iemmi, J.P.Paz, S. Ledesma *Optics Communications*, In Press (2006)
- [8] H. Jeong, M. Paternostro, M.S. Kim, *Phys. Rev. A* 69 012310 (2004)
- [9] B. Do, M. Stohler, S. Balasubramanian, D. Elliott, C. Eash, E. Fischbach, M. Fischbach, A. Mills, B Zwicki, *J. Opt. Soc. Am. B* 22, 499 (2004)
- [10] N.J. Cerf, C. Adami, P.G. Kwiat, *Phys. Rev. A* 57, (1998) R1477.
- [11] P. Kwait, J. Mitchell, P. Schwindt and A. White, *J. Mod. Opt.* 47, (2000)
- [12] A. Marquez, C. Iemmi, I. Moreno, J. A. Davis, J. Campos, and M. J. Yzuel, *Opt. Eng.* 40,(2001)2558.