

VENTILACIÓN NATURAL ENTRE DOS HABITACIONES: MODELADO TEÓRICO

L. P. Thomas¹, B. M. Marino¹, P. F. Linden²

¹ IFAS, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Pinto 399, 7000 Tandil, Argentina

² Department of Mechanical & Aerospace Engineering, University of California
San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla, CA, 92093-0411, USA
lthomas@exa.unicen.edu.ar

Estudiamos el flujo entre dos habitaciones interconectadas generado por una fuente puntual de calor y conducido por diferencias de densidad. Analizamos teóricamente las características del flujo convectivo transitorio para diferentes posiciones y áreas de dos aberturas localizadas en la pared vertical compartida. Proponemos un modelo que describe la evolución de la estratificación producida en las habitaciones desde el momento en que la fuente es encendida, y que generaliza los resultados reportados previamente por otros autores. El concepto de capa “equivalente” de un fluido de densidad no-uniforme, muy útil en otros contextos, es incluido en el análisis para mejorar la comprensión física y encontrar la solución matemática del problema planteado.

We study the flow between two interconnected rooms generated by a single heat source and driven by density differences. We theoretically analyze the features of the transient convective flow for different positions and areas of the two openings located on the shared vertical wall. An analytical model is proposed to describe the evolution of the stratification in the rooms providing quantitative results since the moment in which the heat source is turn on, generalizing findings reported previously. The concept of “equivalent layer” of a non-uniform density fluid, very useful in others contexts, is included in the theory to improve the physical understanding and find the mathematical solution of the problem.

1 INTRODUCCIÓN

La ventilación natural de edificios aprovecha el viento y la energía térmica resultante del calentamiento solar, recursos naturales pero difíciles de controlar. El criterio de diseño arquitectónico para incorporar la ventilación natural se basa tanto en la necesidad de remover el exceso de calor en los espacios interiores como en proveer aire respirable adecuado a los ocupantes. Un individuo requiere 7.5 l/s de aire para respirar, mientras que para alcanzar el confort térmico se necesitan cambios de aire que implican al menos diez veces esa cantidad. Por lo tanto, los edificios con ventilación natural pobremente diseñados son incómodos para vivir y trabajar, lo que conduce a la disminución de la calidad de vida y productividad. Por otro lado, el uso creciente del aire acondicionado para optimizar la calidad de los interiores tiene implicaciones energéticas indeseables y contribuyen indirectamente al aumento de las emisiones de dióxido de carbono a la atmósfera.

La ventilación es esencialmente el flujo de aire entre el interior y el exterior de un recinto a través de aberturas, las que usualmente tienen formas bien definidas y presentan pocos problemas *per se* excepto cuando el aire debe entrar y salir de una habitación por el mismo lugar. El problema principal para lograr el diseño óptimo radica en determinar la estructura del flujo de aire dentro del edificio el que, la mayoría de las veces, consiste de múltiples espacios interconectados.

Dado el carácter reciente del interés sobre los flujos de aire inducidos en espacios ventilados naturalmente, los que pueden resultar muy complejos, el conocimiento

científico sobre este tema puede considerarse en su etapa inicial de desarrollo. Hasta el presente, la mayoría de los trabajos conocidos trata el caso más sencillo del flujo de aire en el interior de un único ambiente, no habiéndose reportado aún modelos analíticos o una caracterización de los posibles flujos desarrollados en estructuras edilicias más complejas.

Linden, Lane-Serff & Smeed ⁽¹⁾ investigaron el flujo en una habitación conectada a un ambiente homogéneo infinito vía dos aberturas situadas una en el cielo raso y otra en el piso, generado por una fuente puntual de calor, B, como ilustra la Figura 1. Mostraron la formación de una estratificación muy sencilla consistente de dos capas separadas por una interfase horizontal. La capa inferior y la superior están a temperaturas uniformes pero diferentes dependientes del flujo desde la fuente de calor. La temperatura de la capa superior es igual a la de la pluma en la interfase. Usando el concepto de nivel de presión neutral y la conservación del volumen y del *momentum*, desarrollaron un modelo matemático en el cual la fuente de calor produce una pluma turbulenta, y que predice la evolución de la altura de la interfase y de la gravedad reducida de la capa cálida en el estado estacionario. Encuentran además que la altura de la interfase depende del tamaño de las aberturas y la altura de la habitación pero es independiente de la intensidad de la fuente de calor. Este modelo fue validado con resultados experimentales y en trabajos posteriores por Hunt & Linden ^(2,3).

Más tarde la aproximación de Linden *et al.* ⁽¹⁾ fue extendida para estudiar la influencia de múltiples fuentes de calor con diferentes intensidades. Para analizar esta

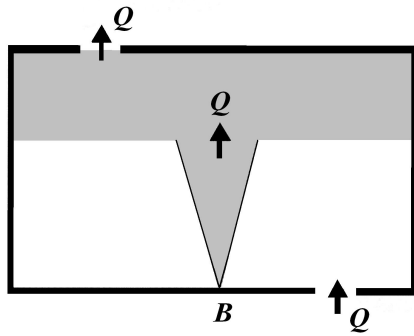


Figura 1: Ventilación por desplazamiento en una habitación con una fuente de calor. ⁽¹⁾

situación Cooper & Linden ⁽⁴⁾ comenzaron por determinar el flujo producido por dos fuentes de calor en un espacio cerrado, asumiendo el desarrollo de una estratificación de tres capas. Presentan un modelo teórico que predice la evolución de las profundidades y densidades de estas capas, y la dependencia de las posiciones de las interfases con el área efectiva de las aberturas, la altura de la habitación y la relación entre las intensidades de las fuentes. Una solución exacta fue encontrada y comparada exitosamente con los resultados de experimentos. Linden & Cooper ⁽⁵⁾ extendieron este análisis al caso de múltiples fuentes y propusieron un método aproximado de solución que simplifica considerablemente el tratamiento. Hunt & Linden ^(2,3) examinaron los efectos del viento sobre estos flujos.

El caso de una fuente de calor en una habitación aislada fue estudiado primero por Baines & Turner ⁽⁶⁾. Ellos mostraron la formación de una estratificación estable fuera de la pluma, la cual tenía una forma autosimilar para tiempos grandes tal que todo el fluido en la habitación se calienta a la misma velocidad. Esta forma de estratificación hoy se conoce como “*filling-box*”. Diferentes disposiciones de las aberturas pueden causar cualitativamente diferentes estructuras de flujo como mostraron Wong & Griffiths ⁽⁷⁾ quienes también estudiaron los flujos producidos por plumas en dos regiones conectadas.

Como los edificios raramente están constituidos de espacios sencillos, la siguiente etapa consistió en estudiar los efectos de la geometría interior sobre un flujo de ventilación. En primera aproximación, Lin & Linden ⁽⁸⁾ estudiaron los efectos del cambio de las dimensiones de dos habitaciones interconectadas y de diferentes tamaños, sin conexiones al exterior, con una fuente de calor en una de ellas. Ambos espacios están separados por una pared vertical con dos aberturas localizadas una bien arriba y otra bien abajo de modo de inducir ventilación por desplazamiento. Cuando la habitación no-calefactada es muy grande en comparación con la habitación calefactada, el sistema actúa como una habitación calentada conectada al exterior y el estado estacionario descrito por Linden *et al.* ⁽¹⁾ se aplica en el límite de una habitación no-calefactada infinita. En el otro extremo, no hay habitación no-calefactada adyacente a la calefactada y el clásico caso *filling-box* ⁽⁶⁾ es válido. Cuando la cámara no-calefactada es finita el flujo es

siempre no estacionario y dependiente de los tamaños relativos de las dos cámaras.

En muchas situaciones reales hay también un flujo de masa asociado con la fuente de calor. Woods, Caulfield & Phillips ⁽⁹⁾ examinaron el caso de una habitación conectada al exterior a través de dos aberturas y mostraron que tal flujo de masa puede afectar fuertemente el mezclado y la evolución de la densidad. Encontraron que, si hay un flujo másico suficiente, entonces el aire en la habitación se mezcla bien, con un flujo hacia el exterior a través de ambas aberturas (Fig. 2a). Esto corresponde a un régimen de ventilación puramente mecánico. Sin embargo, si la fuente de calor tiene un flujo de masa suficientemente pequeño, se desarrolla una estratificación estacionaria de dos capas con un flujo al exterior a través de la abertura más baja y un flujo hacia adentro a través de la abertura más alta (Fig. 2b, cf. Ref. 1).

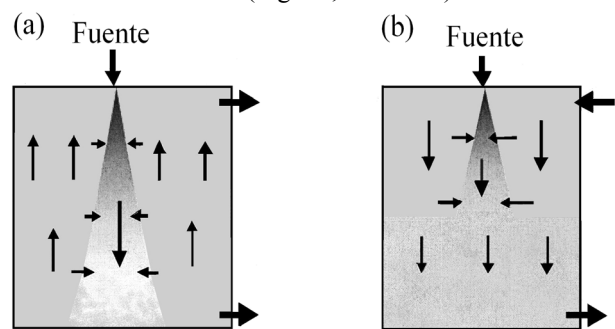


Figura 2: Esquema del flujo en una habitación ventilada a través de dos aberturas y con una fuente de masa y calor: (a) flujo bloqueado, (b) ventilación natural ⁽⁹⁾.

Con el propósito de profundizar la comprensión de los procesos fluido-dinámicos presentes en los sistemas ventilados naturalmente, presentamos un modelo matemático que describe la evolución temporal del flujo generado por una diferencia de temperatura entre dos habitaciones de igual tamaño y separadas por una pared con dos aberturas cuyas dimensiones y posiciones varían. La diferencia de flotación es generada por una fuente de calor situada en el piso de la habitación que llamamos “calefactada”. Como resultado obtenemos una generalización novedosa del trabajo de Linden *et al.* ⁽¹⁾.

2 MODELADO TEÓRICO DEL FLUJO

2.1 Llenado inicial de la habitación calefactada

Consideremos dos habitaciones de altura H y áreas transversales S_f y S_u , como las mostradas en la Figura 3, conectadas por medio de dos aberturas 1 y 2 localizadas a las alturas h_1 y h_2 desde el piso, respectivamente ($h_2 < h_1 < H$). Ambas habitaciones contienen inicialmente aire de densidad ρ (o fluido ambiente) y el conjunto está aislado del exterior.

En el espacio que denominamos “calefactado”, una fuente de calor de pequeñas dimensiones situada a nivel del piso produce una pluma turbulenta de aire caliente que se eleva y, al alcanzar el cielo raso, se expande horizontalmente cubriendo toda la superficie S_f de la habitación calefactada dando lugar a la formación de un estrato superior cálido. El ingreso de aire en la pluma

disminuye la densidad del fluido que la forma desde su valor ρ_s en proximidad de la fuente. El aumento de volumen del estrato cálido genera entonces el movimiento descendente de la interfase entre esta capa y el fluido ambiente. El intercambio de aire caliente entre ambas habitaciones no se produce mientras la interfase no alcance la abertura 1.

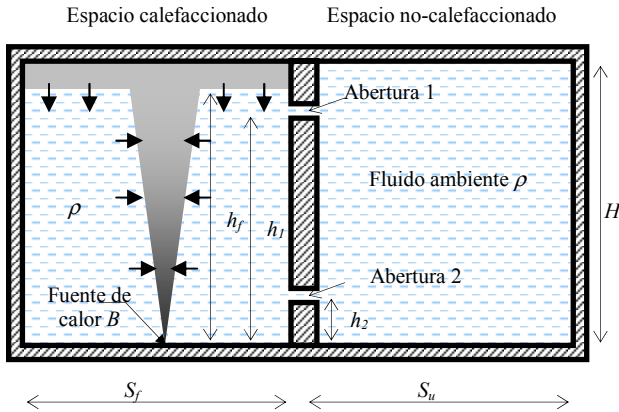


Figura 3. Situación estudiada mientras sólo la habitación calefaccionada es afectada por la emisión desde la fuente.

Supongamos que la fuente no aporta aire desde el exterior y calienta por convección, es decir no tiene un ventilador asociado. Supongamos además que las variaciones de densidad generadas son pequeñas de modo que la aproximación de Boussinesq es válida. En estas condiciones las variaciones de densidad tienen un efecto significativo sólo sobre la flotación del aire caliente, y la fuente no produce una cantidad importante de masa y *momentum*. En tal caso, el clásico modelo “*filling box*”⁽⁶⁾ permite describir la dinámica del flujo.

La gravedad reducida $g' = g\Delta\rho/\rho = g\Delta T/T$ y el caudal Q_s (constante) a una dada altura h_f desde la fuente se relacionan por medio del flujo

$$B = g'(h_f) Q_s(h_f) = \text{constante}, \quad (1)$$

que está relacionada con el transporte de empuje o de flotación. En el caso de una fuente puntual que genera una pluma turbulenta autosimilar con variaciones pequeñas de densidad, se tiene

$$Q_s = c(Bh_f^5)^{1/3}, \quad (2)$$

$$g' = \frac{1}{c}(B^2 h_f^{-5})^{1/3}, \quad (3)$$

donde $c \approx 0.09$ es una constante adimensional relacionada con un coeficiente de arrastre α empíricamente determinado y asociado con la sección transversal de la pluma; por ejemplo $c = \frac{6}{5}\alpha\left(\frac{9\alpha}{10}\right)^{1/3} \pi$ para perfiles “*top hat*”^(10,11). El radio r de la pluma y la componente vertical w de la velocidad son dados por

$$r = \frac{6\alpha}{5} h_f, \quad (4)$$

$$w = \frac{5}{6\alpha}\left(\frac{9\alpha}{10}B\right)^{1/3} h_f^{-1/3}, \quad (5)$$

por lo que $Q_s = \pi r^2 w$.

Baines & Turner⁽⁶⁾ estudiaron la evolución de la interfase, o “primer frente”, desarrollada por el fluido liviano que alcanza el cielo raso en primer lugar e indicaron que todo el fluido adicionado a la región ubicada por encima del frente procede del fluido localizado debajo a través de su ingreso en la pluma. Por lo tanto la recirculación o mezclado del fluido liviano no afecta la evolución del frente que es determinada por un balance local de volumen en la interfase

$$S_f \frac{dh_f}{dt} = -Q_s. \quad (6)$$

Reemplazando (2) en (6) y resolviendo la ecuación diferencial, sigue que

$$\xi_f = \left(1 + \frac{2c}{3}\tau\right)^{-3/2}, \quad (7)$$

con $\xi_f = h_f/H$ y $\tau = t/(S_f B^{-1/3} H^{2/3})$. El tiempo adimensional τ_1 empleado por la interfase en alcanzar la abertura superior 1 localizada en $\xi_1 = h_1/H$ es

$$\tau_1 = \frac{3(\xi_1^{-2/3} - 1)}{2c}. \quad (8)$$

En consecuencia, τ_1 depende de la posición de la abertura superior y de las características de la pluma, pero es independiente de la distribución de la gravedad reducida en el estrato cálido.

Baines & Turner⁽⁶⁾ y Worster & Huppert⁽¹²⁾ usaron aproximaciones para describir la evolución del perfil de densidad de la capa cálida, que es intermedio entre los perfiles correspondientes a los dos casos extremos: sin mezclado y con mezclado total en el interior de la capa cálida. La consideración de estas dos situaciones extremas contribuye a encontrar la ecuación para la evolución del frente en base a la conservación de la masa, a diferencia de otros autores que parten de la conservación del volumen como veremos a continuación.

♣ Si no hay mezclado, el perfil de densidad existente arriba del primer frente es dado por (3). Entonces, un valor de la flotación total en la capa cálida resulta

$$\int_{h_f}^H S_f g' dh_f = \frac{3}{2c} \frac{S_f B^{2/3}}{H^{2/3}} (\xi_f^{-2/3} - 1), \quad (9)$$

que es igual a Bt si $\xi_f(\tau)$ es dado por (7). Luego, la flotación total en la capa cálida es una función lineal del tiempo para una fuente de flujo B constante como se esperaba.

♣ En el caso de mezclado total en la capa cálida, la gravedad reducida $g'(t)$ es uniforme pero no estacionaria y satisface

$$S_f g'_f (H - h_f) = \int_{h_f}^H S_f g' dh_f. \quad (10)$$

Reemplazando (9) en (10), sigue que

$$g'_f = \frac{3}{2c} \frac{B^{2/3}}{H^{5/3}} \frac{(\xi_f^{-2/3} - 1)}{(1 - \xi_f)}. \quad (11)$$

Notar que g'_f puede ser bastante diferente de la gravedad reducida del fluido que atraviesa el frente definida por (3). El cociente entre (3) y (11) aumenta desde la unidad a medida que la posición del frente disminuye; alcanza 2 para $\xi_f \approx 0.5$ y 4 para $\xi_f \approx 0.2$.

Es importante mencionar aquí que este análisis es equivalente a requerir “la conservación de la flotación total” en la capa cálida, es decir

$$\frac{d(S_f g'_f (H - h_f))}{dt} = B, \quad (12)$$

en lugar de imponer la conservación del volumen (6). De hecho, por (12) la evolución del frente es obtenida de

$$\frac{d\xi_f}{d\tau} = \frac{B^{2/3}}{H^{5/3}} \frac{1}{(1 - \xi_f) \frac{dg'_f}{d\xi_f} - g'_f}. \quad (13)$$

Considerando $g'_f(\xi_f)$ dada por (11), la solución de la ecuación diferencial (13) es otra vez (7), pero ahora calculada usando una gravedad reducida uniforme g'_f .

2.2 Ventilando la habitación calefaccionada

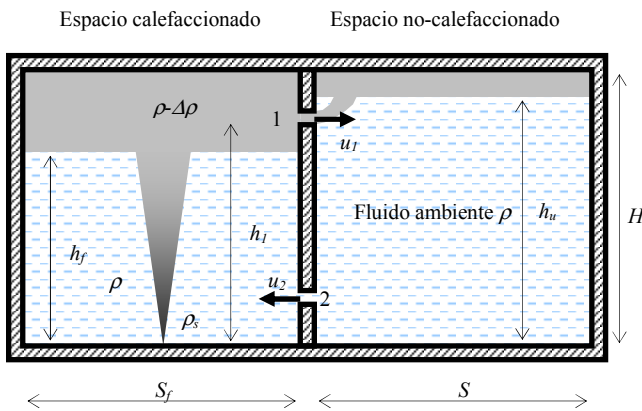


Figura 4. Situación estudiada cuando el aire caliente comienza a fluir hacia la habitación no-calefaccionada.

Transcurrido el tiempo τ_1 , el aire caliente fluye a través de la abertura 1 hacia la habitación no-calefaccionada. Consecuentemente, el fluido ambiente contenido en esta última fluye hacia la otra cámara a través de la abertura 2 como se ilustra en la Figura 4. Para $\xi_1 < \xi_u < 1$ el aire caliente se mueve hacia arriba en la habitación no-calefaccionada donde se acumula, mientras la otra habitación incorpora más fluido ambiente desde la habitación no-calefaccionada. Esta situación es análoga a la contemplada en el modelo “emptying filling box” usado por Linden *et al.* ⁽¹⁾, el cual describe la ventilación de una habitación calefaccionada en función de la densidad promedio $\rho - \Delta\rho$ de la capa cálida como se resume a continuación.

Los respectivos flujos volumétricos a través de las aberturas son

$$Q_1 = a_1 u_1, \quad Q_2 = a_2 u_2 \quad (14)$$

donde u_1, u_2 son las velocidades medias y a_1, a_2 son las áreas de las aberturas superior e inferior respectivamente. Por simplicidad, los correspondientes coeficientes de descarga que toman en cuenta la contracción de las líneas

de corriente se incluyen en a_1 y a_2 . Luego los valores de a_i ($i = 1, 2$) varían entre 0.6 (orificios de canto abrupto) y 0.98 (toberas especialmente construidas) veces las áreas geométricas reales de las aberturas, de acuerdo con el caso examinado. El coeficiente de descarga para una ranura rectangular varía entre 0.611 (flujo potencial) y 0.687 (número de Reynolds elevado ⁽¹³⁾).

Si el volumen del fluido introducido por la fuente desde el exterior es despreciable, la conservación del volumen total implica que

$$Q_1 = Q_2 = Q. \quad (15)$$

Adaptando ahora el resultado de Linden *et al.* ⁽¹⁾ al presente caso con $h_1 \neq H$, resulta

$$Q = A \sqrt{g'_f (h_1 - h_f)}, \quad (16)$$

donde $g'_f = g'_f(t)$ es la gravedad reducida promedio en la habitación calefaccionada definida en (10) y

$$A = \frac{a_1 a_2}{\sqrt{\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)}}, \quad (17)$$

es el área efectiva total de las aberturas.

Como g'_f varía con el tiempo, la conservación de la flotación permite encontrar la altura de la interfase en la habitación calefaccionada:

$$\frac{d(S_f g'_f (H - h_f))}{dt} = B - g'_f Q. \quad (18)$$

Notar que (18) es diferente de la ecuación que resulta de plantear la conservación del volumen usada por Lin & Linden ⁽⁸⁾:

$$S_f \frac{dh_f}{dt} = -Q_s + Q. \quad (19)$$

Como aproximación de g'_f usamos

$$g'_f = \theta g' \quad (20)$$

donde g' es definida por (3) y θ es una constante del orden de la unidad. Introduciendo (16) y (20) en (18) obtenemos

$$\frac{d\xi_f}{d\tau} = \frac{A}{H^2} \frac{\sqrt{\frac{\theta}{c} \xi_f^{-5/3} (\xi_1 - \xi_f)} - \frac{c}{\theta} \xi_f^{5/3}}{\frac{5}{3} \xi_f^{-1} - \frac{2}{3}}, \quad (21)$$

donde $\xi_1 = h_1/H$. Como era de esperar, en esta etapa un valor de $\theta \neq 1$ produce un efecto equivalente a elegir un valor diferente de la constante c relacionada con la entrada de aire a la pluma.

La Ec. (21) no tiene parámetros asociados con el flujo en la habitación no-calefaccionada porque ésta no afecta al flujo en la habitación calefaccionada, y entonces la escala temporal es la misma que en la etapa previa ($S_f B^{-1/3} H^{2/3}$). La evolución de ξ_f depende de la constante de entrada c igual que antes, eventualmente modificada por el mezclado en la capa cálida por medio de θ , y de los parámetros geométricos adimensionales como la altura ξ_1 de la abertura superior y el área de la vena cava A/H^2 .

Una relación para el régimen estacionario, si es alcanzado, se obtiene de (20) cuando $d\xi_f/dt = 0$. La posición ξ_{ss} de la interfase es así dada por:

$$\frac{A}{H^2} = c^{3/2} \left(\frac{\xi_{ss}^5}{\xi_1 - \xi_{ss}} \right)^{1/2} \quad (22)$$

con $\theta = 1$. Esta ecuación es una relación más general que la obtenida por Linden *et al.* ⁽¹⁾ (su Ec. 2.11a) para el caso particular $h_1 = H$. La Figura 5 muestra la variación de la posición ξ_{ss} calculada usando (22). Como se observa, la distancia entre la abertura y el frente en el estado estacionario se reduce significativamente cuando ξ_1 disminuye; en particular $\xi_{ss} \approx \xi_1$ para $\xi_1 \leq 0.4$.

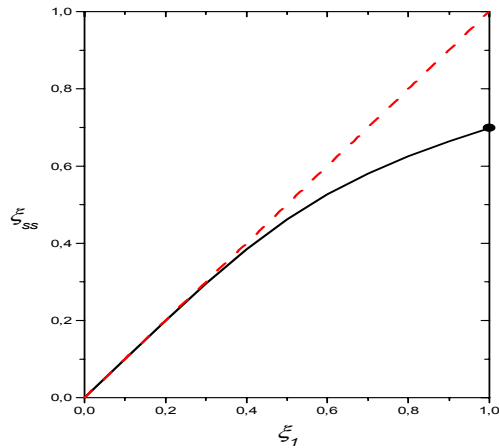


Figura 5. Posición de la interfase en la habitación calefaccionada en el estado estacionario (línea continua) y $\xi_{ss} \approx \xi_1$ (línea de trazos). El punto en $\xi_1 = 1$ corresponde al resultado de Linden *et al.* ⁽¹⁾.

Regresando al flujo transitorio, el fluido en la cámara calefaccionada tiene una densidad que aumenta a medida que la interfase se aproxima a la fuente (ver Ec. (3)). Debido a este efecto y al mezclado adicional generado después de atravesar la abertura 1, la densidad del aire de la capa cálida de la cámara no-calefaccionada aumenta con el tiempo.

La presión hidrostática en la capa estratificada se obtiene integrando el perfil de densidad vertical $\rho_u(z)$ en su interior. Para simplificar la solución, definimos una altura equivalente h_u para la cual una capa cálida uniforme con densidad g'_f genera la misma diferencia de presión en la habitación no-calefaccionada, esto es

$$h_u g'_f = g \int_0^H \frac{(\rho_u - \rho)}{\rho} dz. \quad (23)$$

En general h_u no coincide con la altura de la interfase. Más adelante regresaremos a la estratificación de la habitación no-calefaccionada.

La evolución de ambas capas debe mantener la flotación total que es dada por

$$S_f g'_f (H - h_f) + S_u g'_f (H - h_u) = Bt, \quad (24)$$

donde g'_f es definida por (20) para $\tau \geq \tau_1$. Notar que (24) también es diferente de la relación (proveniente de la conservación del volumen) usada por Lin & Linden ⁽⁸⁾ para calcular h_u

$$S_u \frac{dh_u}{dt} = -Q. \quad (25)$$

Reemplazando (20) en (24), sigue que

$$\xi_u = \frac{h_u}{H} = 1 - R \left(\frac{c}{\theta} \xi_f^{5/3} \tau - (1 - \xi_f) \right), \quad (26)$$

donde $\tau = t/(S_f B^{-1/3} H^{2/3})$ como antes, y $R = S_f/S_u$ es la relación de aspecto de las áreas de las cámaras.

Esta etapa finaliza cuando el frente en la habitación no-calefaccionada alcanza la posición de la abertura 1. El tiempo τ_2 al cual esto ocurre depende de la solución de (20) y (26) que involucra los parámetros del problema: c/θ , A/H^2 , ξ_1 y R .

2.3 Flujos entre dos habitaciones acopladas

Para $\xi_1 > \xi_u > \xi_2$ la situación en la habitación no-calefaccionada afecta al flujo en la habitación calefaccionada (Figura 6). La presión hidrostática en ambas habitaciones es la misma a una dada altura h_N que constituye el nivel neutral que define la dirección del flujo a través de las aberturas para una estratificación estable. El fluido pasa desde la cámara calefaccionada a la no-calefaccionada a través de la abertura superior ubicada por encima de este nivel, y en dirección opuesta por la inferior.

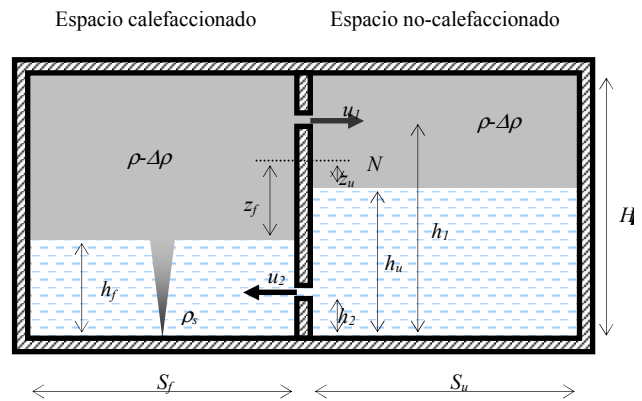


Figura 6. Situación estudiada cuando el fluido mezclado en la habitación no-calefaccionada supera la abertura 1.

Introduzcamos ahora z_f y z_u como las distancias verticales entre el nivel neutral y las alturas h_f y h_u en las habitaciones calefaccionada y no-calefaccionada, respectivamente. Usando el teorema de Bernoulli, las velocidades del fluido a través de las aberturas son

$$u_1^2 = 2g'_f (h_1 - h_f - z_f) - 2g'_f (h_1 - h_u - z_u), \quad (27)$$

y

$$u_2^2 = 2g'_f z_f - 2g'_f z_u, \quad (28)$$

para $h_2 \leq (h_u, h_f) \leq h_1$.

Despejando h_1 de Ec. (27) y llamando $z = z_f - z_u$, (27) y (28) se convierten, respectivamente, en

$$u_1^2 = 2g'_f ((h_1 - h_f) - z), \quad (29)$$

y

$$u_2^2 = 2g'_f z, \quad (30)$$

Por lo tanto el flujo en esta etapa es independiente de la altura de ambas aberturas y del nivel neutral, y depende de las diferencias entre los valores de las variables h y z a

cada lado de la pared compartida. Notar también que los valores de z_f y z_u pueden ser positivos o negativos, y entonces (28) y (29) representan las situaciones en las que h_f y h_u son mayores o menores que h_N .

Las ecuaciones (29) y (30) son las mismas que aquellas que describen la ventilación de una habitación a través de dos aberturas hacia un espacio infinitamente grande de acuerdo al modelo desarrollado por Linden *et al.*⁽¹⁾ (sus Ecs. 2.2a y 2.2b, respectivamente), definiendo apropiadamente las distancias desde los frentes al nivel neutral y al piso. Luego el problema del flujo en el interior de dos habitaciones acopladas se reduce al de una única "habitación equivalente" ventilada al exterior.

Usando la conservación del volumen total (15), sigue:

$$Q = A\sqrt{g'_{\text{f}}(h_u - h_f)}, \quad (31)$$

donde A se obtiene de (17). La evolución de las interfases en las cámaras calefaccionada y no-calefaccionada es dada por (18) y (26), respectivamente. Sustituyendo ξ_1 por ξ_u en (21), se obtienen las ecuaciones adimensionales para el flujo en las dos cámaras conectadas:

$$\frac{d\xi_f}{d\tau} = \frac{\frac{A}{H^2} \sqrt{\frac{\theta}{c} \xi_f^{-5/3} (\xi_u - \xi_f) - \frac{c}{\theta} \xi_f^{5/3}}}{\frac{5}{3} \xi_f^{-1} - \frac{2}{3}}, \quad (32)$$

y (26), las que constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que pueden ser integradas fácilmente. La condición inicial para la integración se toma de los valores de las variables obtenidas al final de la etapa previa.

Tres parámetros rigen las ecuaciones (32) y (26): la constante c/θ relacionada con la entrada de aire a la pluma, el área adimensional de la abertura A/H^2 , y la relación de aspecto R . En esta etapa el flujo es independiente de las alturas de ambas aberturas y, como en las etapas anteriores, el flujo de calor desde la fuente afecta el flujo entre las habitaciones y la escala temporal pero no la evolución de las espesores de las capas.

Comparando los dos términos del numerador del miembro derecho de (32), se encuentra que el flujo entre las dos habitaciones es importante cuando

$$\frac{A}{H^2} > \left(\frac{c}{\theta}\right)^{3/2} \approx 0.027. \quad (33)$$

El flujo en la cámara calefaccionada evoluciona como en una habitación cerrada si $A/H^2 \ll (c/\theta)^{3/2}$ y entonces la posición del frente puede aproximarse por (7). Por el contrario, el calor suministrado por la fuente en la habitación calefaccionada es fuertemente ventilado a la otra habitación para $A/H^2 \gg (c/\theta)^{3/2}$. En tal caso la relación de aspecto R afecta la evolución del flujo en ambas habitaciones.

3 RESULTADOS

La influencia de los diferentes parámetros sobre la solución es analizada en lo que sigue con un valor de $c/\theta = 0.09$. La Figura 7 muestra los resultados correspondientes a las posiciones de las interfases en las cámaras para el caso en el cual las aberturas 1 y 2 están en contacto con el cielo raso y con el piso respectivamente

($\xi_1 = 1, \xi_2 = 0$). Como es de esperar, las posiciones de ambos frentes tienden a ser las mismas para tiempos grandes. La evolución del frente en la habitación calefaccionada está cerca de aquella predicha por Lin & Linden⁽⁸⁾ (línea de trazos) aun cuando ellos usaron la conservación del volumen (ver Ec. (19)). Por otro lado, la evolución de la posición del frente equivalente en la habitación no-calefaccionada calculada del modelo de Lin & Linden⁽⁸⁾ usando (23) muestra un comportamiento bastante diferente. Esta diferencia puede estar causada por el uso de la conservación del volumen en su modelo en lugar de la conservación de la flotación empleada aquí para calcular el progreso de esta interfase.

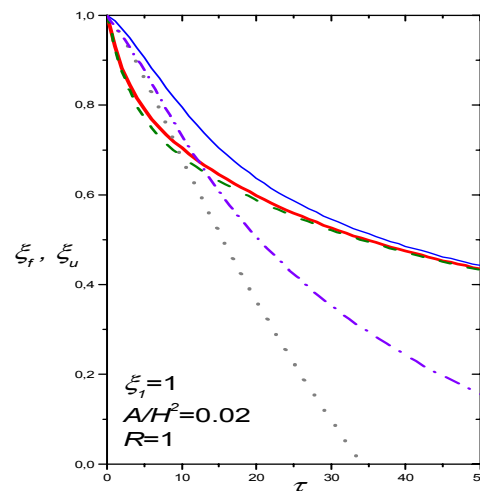


Figura 7. Evolución de la posición adimensionalizada del frente en las habitaciones calefaccionada (línea gruesa) y no-calefaccionada (línea delgada) de igual tamaño. Las líneas de trazos, trazos y puntos y puntos corresponden a ξ_f , ξ_u y h^*/H , respectivamente, calculadas con el modelo de Lin & Linden⁽⁸⁾.

La Figura 8a muestra la evolución de las posiciones adimensionalizadas de las interfases en función del tiempo para diferentes valores de A/H^2 con las aberturas superior e inferior localizadas a 90% y 10% de la altura total, respectivamente. En la habitación calefaccionada el frente evoluciona como lo haría en una habitación cerrada durante la etapa inicial como se explicó en Sección 2.1. En la habitación no-calefaccionada el frente se forma después de transcurrido un tiempo τ_1 a partir del cual comienza a descender como se describe en la Sección 2.2; después de un tiempo τ_2 se aplica la solución encontrada en Sección 2.3. Para $A/H^2 = 0.1$ ambos frentes tienden a evolucionar muy cerca uno del otro sugiriendo la evolución de un frente en un solo ambiente. Las aberturas son relativamente grandes en este caso como para que la presencia de la pared divisoria no afecte la evolución de los frentes en modo significativo. Para valores pequeños de A/H^2 , la condición (32) sugiere que el frente en la habitación calefaccionada avanza más rápido que aquel en la habitación no-calefaccionada. Así para $A/H^2 = 0.02$ las evoluciones de los frentes están claramente separadas en los primeros momentos. La diferencia entre las alturas de los frentes aumenta al disminuir el valor de A/H^2 en tal forma que para $A/H^2 = 0.005$ el flujo en la habitación calefaccionada muestra un comportamiento cercano al de

una habitación cerrada ($A/H^2 = 0$) durante la primera parte de su evolución.

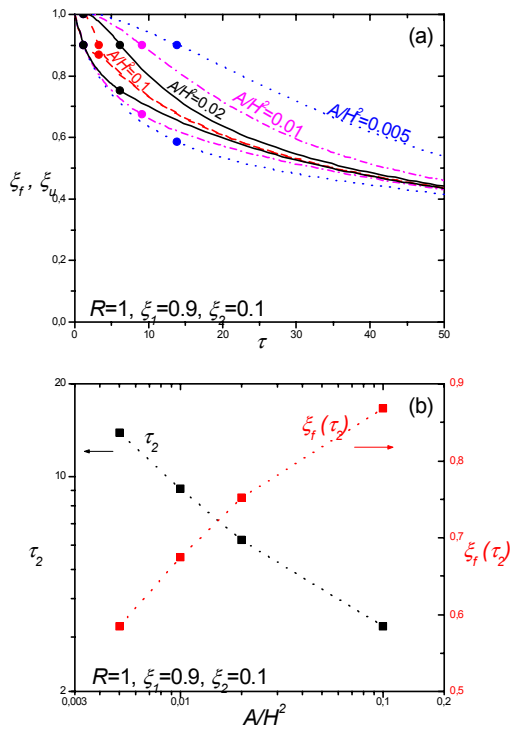


Figura 8. (a) Evolución de ξ_f , $\xi_u > \xi_2$ en las habitaciones calefaccionada (líneas gruesas) y no-calefaccionada (líneas delgadas): $A/H^2 = 0.1$ (línea de trazos), 0.02 (línea continua), 0.01 (línea de puntos) y 0.005 (líneas de trazos y puntos). Los círculos indican las posiciones de los frentes a τ_1 y τ_2 . (b) Tiempo τ_2 al cual el frente en la habitación no-calefaccionada alcanza la abertura 1 y la correspondiente posición $\xi_f(\tau_2)$ del frente en la habitación calefaccionada para los casos mostrados en (a).

La Figura 8b muestra τ_2 y $\xi_f(\tau_2)$ obtenidos en los casos estudiados; $\xi_u(\tau_2)$ y $\xi_i(\tau_2)$ están también indicados con círculos llenos sobre las curvas de la Figura 8a. Como era de esperar, $\xi_f(\tau_2) \approx \xi_1 = 0.9$ y τ_2 es $O(1)$ para $A/H^2 = 0.1$. Valores más pequeños de A/H^2 aumentan τ_2 y reducen $\xi_f(\tau_2)$ significativamente.

Por otro lado, una disminución de la altura de la abertura 1 retrasa la ventilación de la habitación calefaccionada debido al aumento de τ . Sin embargo, la evolución de la posición adimensional del frente en la habitación calefaccionada cambia ligeramente después de τ_2 (Figura 9a) en todas las etapas principalmente porque un flujo mayor entre las dos habitaciones parcialmente compensa *a posteriori* el retraso inicial. Cambios más importantes se observan en la evolución del frente en la habitación no-calefaccionada al disminuir ξ_1 (Figura 9b).

Un cambio en la relación de las áreas de las habitaciones produce una variación aún más evidente. Como muestra la Figura 10a, un aumento de R reduce la influencia del flujo en la habitación no-calefaccionada sobre la calefaccionada. En el límite $R \rightarrow \infty$ la situación se asemeja a aquella de una única habitación calefaccionada cerrada. Por el contrario, una disminución de R retrasa τ_2 en casi la misma proporción y la respectiva evolución de

la posición del frente cambia consistentemente; si $R \rightarrow 0$ la situación en la habitación calefaccionada se asemeja a aquella en una ventilada a un espacio ilimitado y el estado estacionario (22) se alcanza eventualmente para tiempos grandes.

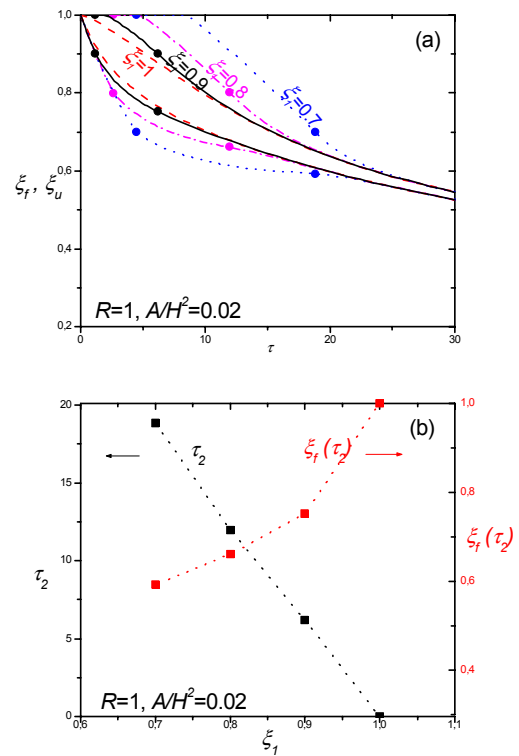


Figura 9. (a) Evolución de ξ_f , $\xi_u > \xi_2$ en las habitaciones calefaccionada (líneas gruesas) y no-calefaccionada (líneas delgadas): $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$ (línea de trazos); $\xi_1 = 0.9$, $\xi_2 = 0.1$ (línea continua); $\xi_1 = 0.8$, $\xi_2 = 0.2$ (línea de puntos); $\xi_1 = 0.7$, $\xi_2 = 0.3$ (línea de trazos puntos). Las posiciones de los frentes a los tiempos τ_1 y τ_2 son indicadas por círculos. (b) Valores de τ_2 y $\xi_f(\tau_2)$ para los casos de (a).

4. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Desarrollamos un modelo teórico para describir la convección generada por una fuente de calor en un sistema de dos habitaciones interconectadas, aislado del exterior. Obtenemos la evolución del flujo entre ambas habitaciones para diferentes ubicaciones y áreas de dos aberturas sobre la pared compartida, y resultados cuantitativos desde el momento que se enciende la fuente, generalizando los modelos y resultados previamente reportados. En particular, eliminamos las restricciones sobre h_f y h_u , de modo que estas variables pueden ser más grandes o más pequeños que h_N , situaciones adecuadas para enfrentar configuraciones y regímenes más complejos. Extendemos el análisis a los casos en los que las aberturas se localizan a alturas diferentes desde el cielo raso y el piso sobre la pared compartida. Además el uso de una altura “equivalente” facilita la obtención de una solución analítica y mejora la comprensión física del problema estudiado.

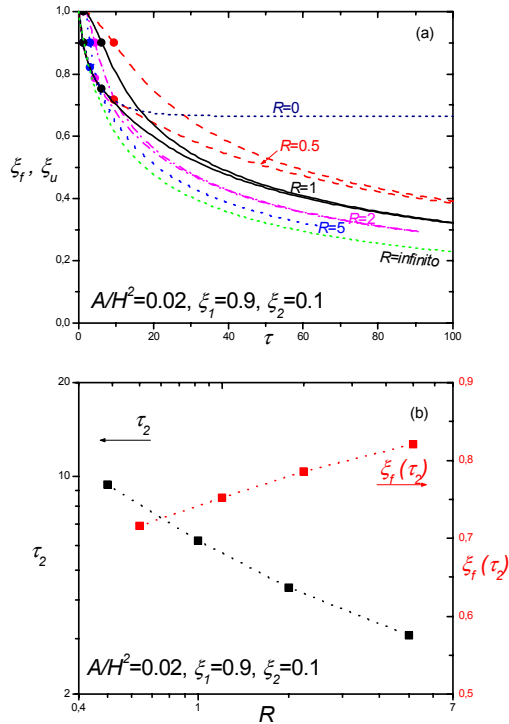


Figura 10. (a) Evolución de $\xi_f, \xi_u > \xi_2$ en las habitaciones calefaccionada (líneas continuas gruesas) y no-calefaccionada (líneas continuas delgadas); $R = 0.5$ (línea de trazos); $R = 1$ (línea continua); $R = 2$ (línea de puntos); $R = 5$ (línea de trazos y puntos); $R \rightarrow \infty$ y $R \rightarrow 0$ (líneas de trazos cortos). La posición del frente a los tiempos τ_1 y τ_2 son indicadas por círculos. (b) Valores de τ_2 y $\xi_f(\tau_2)$ obtenidos para los casos de (a).

Referencias

- 1- Linden, P.F., Lane-Serf, G.F. & Smeed, D.A. *J. Fluid Mech.* 212, 300-335, 1990.
- 2- Hunt, G.R. & Linden, P.F. *Building Environ.* 36, 707-720, 1999.
- 3- Hunt, G.R. & Linden, P.F. *J. Fluid Mech.* 426, 355-386, 2001.
- 4- Cooper, P. & Linden, P.F. *J. Fluid Mech.* 311, 153-176, 1996.
- 5- Linden, P.F. & Cooper, P. *J. Fluid Mech.* 311, 177-192, 1996.
- 6- Baines, W.D. & Turner, J.S. *J. Fluid Mech.* 37, 51-80, 1969.
- 7- Wong, A.B.D. & Griffiths, R.W. *J. Geophys. Res.* 106 (C11), 26929-26941, 2001.
- 8- Lin, Y.J.P. & Linden, P.F. *J. Fluid Mech.* 463, 293-312, 2002.
- 9- Woods, A.W., Caulfield, C.P. & Phillips, J.C. *J. Fluid Mech.* 495, 119-133, 2003.
- 10- Morton, B.R., Taylor, G.I. & Turner, J.S. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 234, 1-23, 1956.
- 11- Turner, J.S. *J. Fluid Mech.* 173, 431-472, 1986.
- 12- Worster, M.G. & Huppert, H.E. *J. Fluid Mech.* 132, 457-466, 1983.
- 13- Ali, S.K. & Foss, J.F. *J. Fluids Eng.* 125, 613-619, 2003.