

ANÁLISIS DEL PROBLEMA DE LOCALIZAR UN PUNTO EMISOR DE ONDAS POR MEDIO DE TRES RECEPTORES

ANALYSIS OF THE PROBLEM OF LOCATING A POINT SOURCE BY MEANS OF THREE RECEIVERS

R.A. Comes , And G.M. Caranti*

*Facultad de Matemática Astronomía y Física (FaMAF) - Universidad Nacional De Córdoba - CONICET and Medina Allende s/n - (5000) -Córdoba - Argentina**

Se demuestra en este trabajo que hay cuatro áreas bien diferenciadas en el plano definido por los receptores. Una incluye la region central que tiene una única solución real y tres regiones que comienzan en la vecindad de cada receptor y se extienden radialmente hacia afuera poseen soluciones reales dobles. La forma de estas regiones es estudiada en detalle. Palabras Claves: localización, ondas, emisor

It is demonstrated in this paper that there are four distinct areas in the plane defined by the three receivers. One includes the central region with single real solutions and three regions beginning in the vicinity of each receiver and extending radially outward from the center have double real solutions. The shape of these regions is studied in detail.

Key Word: locating, waves, emitter

I. INTRODUCCIÓN

El problema de localizar una única fuente de radiación se ha tratado muchas veces. Uno de los métodos usados frecuentemente es el así llamado tiempo de llegada, TOA[1]. En este método el tiempo de llegada a tres receptores no alineados es registrado con precisión y desde sus diferencias (puesto que el tiempo exacto de emisión t_0 no es conocido) la posición es calculada. Debe notarse que dada la diferencia de tiempos de llegada a un par de receptores el emisor puede estar en cualquier punto de un hiperboloide de revolución teniendo como eje a la línea que une los receptores, línea base, y como focos los puntos ocupados por los receptores:

$$\frac{1}{r} = k(1 - \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)),$$

donde r, θ, ϕ son las coordenadas esféricas con origen en el centro de la línea base, θ_0 es el ángulo entre la línea base y el eje x . Los parámetros ε, k se relacionan con la diferencia de tiempos, la velocidad de propagación de las ondas c y la longitud de la línea base, l , a través de:

$$a = \left| \frac{c(t_2 - t_1)}{2} \right| \quad (1)$$

$$b = \sqrt{\frac{l^2}{2} - a^2} \quad (2)$$

de las cuales

$$\varepsilon = \frac{l}{2a}, \quad (3)$$

y

$$k = -\frac{a}{b^2}. \quad (4)$$

Otro par de receptores tendrán en general, distintas longitudes de la línea base y diferencia de tiempos para la misma señal, definiendo otro hiperboloide de revolución el cual intercepta al primero en una curva. La traza de esta curva sobre el plano de los receptores es la posición buscada. Se puede demostrar[2] que la curva es una cónica y que yace a su vez sobre un plano perpendicular al definido por los receptores. Esto tiene la consecuencia de que puede haber una o dos trazas correspondientes a otros tantos tiempos de emisión. La existencia de dos posibles intercepciones constituye un problema puesto que para discernir entre ellas hará falta información adicional a la de los tiempos. En este trabajo determinaremos las regiones del plano con soluciones únicas o dobles del problema de localización

II. FORMULACION

Sean $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, x'_3, y'_3$ las posiciones de los receptores en un referencial fijo y t_1, t_2, t_3 , los correspondientes tiempos de arribo de la señal a los tres receptores. La posición de la fuente, la cual se supone que está sobre el mismo plano, es x', y' . Con los tres tiempos de arribo solamente no hay suficiente información como para resolver la coordenada vertical si la hubiera y por lo tanto el problema será plano con las tres incógnitas x', y' y t_0 . Se encuentra conveniente cambiar a un sistema de referencia local es decir uno centrado en, por ejemplo, la línea base 1-2 y con el eje x coincidente con ella. Se toman recaudos para realizar la transformación de coordenadas de manera que la coordenada x de la fuente sea siempre positiva. Para ello se define el parámetro m dado por

$$m = \begin{cases} +1 & \text{if } t_1 \leq t_2 \\ -1 & \text{if } t_1 < t_2 \end{cases}, \quad (5)$$

*Electronic address: caranti@roble.fis.uncor.edu

lo que permite poner el ángulo de rotación en términos de este parámetro:

$$\theta_0 = \arctan \left[m \frac{(y'_2 - y'_1)}{(x'_1 - x'_2)} \right] \quad (6)$$

En este sistema las coordenadas de los receptores 1 y 2 son

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{l}{2}, & y_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{l}{2}, & y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

mientras que la posición del receptor 3 es x_3, y_3 . En este problema plano dados los tiempos medidos t_1, t_2 la fuente estará sobre una hipérbola, intersección del hiperboloide y el plano, con los mismos parámetros a, b y ε dados por 1, 2 y 3. Esta hipérbola, escrita en coordenadas cartesianas es:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2. \quad (8)$$

Hay que cumplir dos evidentes condiciones más. Las distancias entre el emisor y los receptores 1 y 3 respectivamente están dadas por:

$$(x - x_1)^2 + y^2 = c^2(t_1 - t_0)^2 \quad (9)$$

y

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = c^2(t_3 - t_0)^2. \quad (10)$$

Estas tres últimas expresiones 8, 9 y 10 conforman un sistema con las tres incógnitas x, y y t_0 . Después de reemplazar x_1 desde 7, se puede eliminar y^2 de las ecuaciones [hyp] and [9] dando por resultado una ecuación cuadrática en x :

$$a^2 c^2 (t_1 - t_0)^2 = (a^2 + b^2)x^2 - 2a^2 \frac{l}{2} x + a^2 \frac{l^2}{4} - a^2 b^2$$

la cual después de reemplazar b de 2 da:

$$[a c (t_1 - t_0)^2]^2 = \left[\frac{l}{2} x - a^2 \right]^2. \quad (11)$$

Se debe tener cuidado al extraer la raíz cuadrada de esta última ecuación. Se debe estudiar primero el signo de las expresiones entre corchetes. Como la causalidad implica $t_0 \leq t_1$ y de su definición 1 $a \geq 0$ entonces $a c(t_1 - t_0) \geq 0$. Para el miembro de la derecha basta ver la ecuación de la hipérbola 8 y la definición de b para notar que $m \left(\frac{l}{2} x - a^2 \right) \geq 0$ y por lo tanto de 11

$$a \tau = m \left(\frac{l}{2} x - a^2 \right),$$

donde $\tau = c(t_1 - t_0)$, de manera que sustituyendo l de la definición de $\varepsilon, 3$

$$x = \frac{1}{\varepsilon} [m \tau + a]. \quad (12)$$

Por otro lado de la 9 y de la 10 se puede cancelar y^2 dando

$$\begin{aligned} y_3 y &= \left(\frac{l}{2} - x_3 \right) x - c(t_3 - t_1) \tau + \\ &+ \frac{1}{2} \left[x_3^2 + y_3^2 - \frac{l^2}{4} - c^2(t_3 - t_1)^2 \right] \end{aligned}$$

y finalmente sustituyendo x de 12 la coordenada y queda determinada:

$$y = P \tau + Q, \quad (13)$$

donde P está dado por

$$P = \frac{1}{y_3} \left[m a - \frac{m x_3}{\varepsilon} - c(t_3 - t_1) \right] \quad (14)$$

y Q se expresa así:

$$Q = \frac{1}{2y_3} \left[\left(x_3 - \frac{a}{\varepsilon} \right)^2 + y_3^2 - \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{\varepsilon} \right)^2 - c^2(t_3 - t_1)^2 \right]. \quad (15)$$

Sustituyendo 12 y 13 en 8 se obtiene una importante ecuación en τ

$$\begin{aligned} &\left[\frac{b^2}{\varepsilon^2} - P^2 a^2 \right] \tau^2 + \\ &+ 2 a \left(m \frac{b^2}{\varepsilon^2} - a P Q \right) \tau - \\ &- a^2 \left[b^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) + Q^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Usando 2 y 3, 16 puede escribirse en términos de a y l solamente.

$$\begin{aligned} &\left[\left(1 - \frac{4a^2}{l^2} \right) - P^2 \right] \tau^2 + \\ &+ 2 \left[a m \left(1 - \frac{4a^2}{l^2} \right) - P Q \right] \tau - \\ &- \frac{l^2}{4} \left(1 - \frac{4a^2}{l^2} \right)^2 - Q^2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Puesto que esta última contiene los tiempos medidos a partir de una fuente real, no cabe duda que una solución real debe existir. De todas formas del estudio del discriminante se puede obtener información importante.

III. DISCRIMINANTE

El discriminante debe ser positivo o cero si ha de haber una solución real. La expresión para el discriminante es

$$\begin{aligned} &4 \left[a m \left(1 - \frac{4a^2}{l^2} \right) - P Q \right]^2 + \\ &+ 4 \left[\left(1 - \frac{4a^2}{l^2} \right) - P^2 \right] \left[\frac{l^2}{4} \left(1 - \frac{4a^2}{l^2} \right)^2 + Q^2 \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

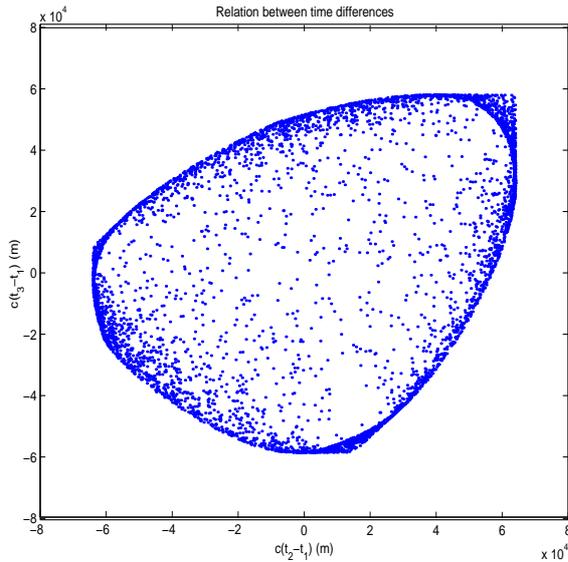


Figura 1: Relación entre las diferencias de tiempos de arribo a tres receptores.

Tanto el primer término como el último factor son positivos por consiguiente el único término que puede cambiar de signo es el coeficiente de τ^2 , $1 - \left(\frac{2a}{l}\right)^2 - P^2$. Esta expresión depende de ambas diferencias de tiempo $c(t_3 - t_1)$ y $c(t_2 - t_1)$ y es importante darse cuenta que estas diferencias no son del todo independientes.

Dado un valor de $c(t_2 - t_1)$ hay sólo un rango posible para los valores de $c(t_3 - t_1)$. La figura 1 muestra este comportamiento para un ejemplo de localización de ondas electromagnéticas en grandes regiones. Los receptores están ubicados en $x'_1 = -25932\text{m}$, $y'_1 = -9425\text{m}$, $x'_2 = 10413\text{m}$, $y'_2 = 43173\text{m}$ y $x'_3 = 29387\text{m}$, $y'_3 = -27213\text{m}$ respectivamente, dando líneas base de longitud $l = 63934\text{m}$ y $l_{31} = 58109\text{m}$.

Como puede verse en esta figura los valores máximos de $c(t_2 - t_1)$ y $c(t_3 - t_1)$ reflejan la longitud de estas líneas base. La simulación involucró 5000 puntos al azar en una región cuadrada de 200 km de lado. Es interesante notar la acumulación de puntos sobre el perímetro de la figura y que además hay un claro indicio de una forma oval. Esta puede entenderse al observar qué ocurre cuando los emisores están en el infinito. Este es un caso en que las dos diferencias de tiempo son fácilmente relacionables. Llamando α al ángulo que sustenta un emisor en el infinito con el eje x entonces $c(t_2 - t_1) = l \cos \alpha$ y $c(t_3 - t_1) = l_{31} \cos(\alpha_{31} - \alpha)$ donde α_{31} es el ángulo de la línea base 1-3, l_{31} , con el mismo eje. Reemplazando α_{31} y l_{31} en términos de las coordenadas de los receptores se obtiene la siguiente expresión

$$c(t_3 - t_1) = \frac{x_1 - x_3}{l} c(t_2 - t_1) \mp \frac{y_3}{l} \sqrt{l^2 - c^2(t_2 - t_1)^2},$$

la cual representa una elipse. Esta elipse, si bien en la figura 1 apenas se insinúa, en corridas sobre regiones un orden de magnitud mayores queda perfectamente nítida.

Algunos detalles de la figura 1 merecen ser comentados. La esquina superior derecha se forma con puntos

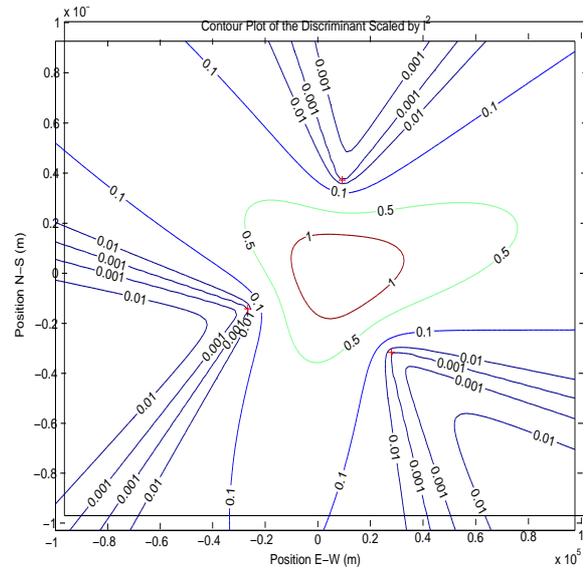


Figura 2: Diagrama de contornos del discriminane. Obsérvese que el signo es siempre positivo.

muy cercanos a x'_1 , y'_1 , lo que da ambas diferencias iguales a sus respectivas líneas base. Otro ejemplo es la línea $c(t_2 - t_1) = 0$ que representa todos los puntos a igual distancia de los receptores 1 y 2. Puesto que esta línea corta, en este ejemplo, a la línea base 1-3 fuera del triángulo de receptores pero más cerca del receptor 3, el máximo valor de $c(t_3 - t_1)$ es el valor de la distancia l_{31} pero negativo. Del lado positivo, el valor extremo es y_3 puesto que la línea $c(t_2 - t_1) = 0$ es el eje y del sistema rotado. Cuando las diferencias de tiempo, como en el caso real, están dentro de los rangos vistos en la figura 1, el discriminante es positivo. La figura 2 muestra un diagrama de contornos del discriminante 18 asociado a cada punto del plano para el ejemplo entre manos

Las cruces indican los receptores y se observa que el discriminante es importante sólo en la región entre receptores. El discriminante 18 puede ser mayor o menor al cuadrado del coeficiente de τ en 17 de acuerdo a cuál sea el signo del coeficiente de τ^2 en la misma ecuación. Por lo tanto obtenemos ya sea dos soluciones positivas o una positiva y otra negativa. Por supuesto debemos descartar la solución negativa, puesto que representa una llegada antes de la emisión, quedándonos con una sola solución. Para el ejemplo bajo estudio la figura 3 muestra diferentes regiones del plano con las dos situaciones. La solución positiva única, que se muestra con puntos, cubre toda la región central y se extiende en las tres direcciones casi radialmente.

Las cruces representan puntos con dos soluciones positivas que cubren el resto del área dando tres regiones que se extienden radialmente. Es interesante notar que cuando el cuadrado de simulación se extiende, las dos clases de regiones tienden a cubrir áreas iguales.

Para entender mejor el comportamiento de las soluciones dobles en la búsqueda de algún método que las distinga, la figura 4 muestra 400 emisores y los pares de soluciones se unen por segmentos para que sean fácilmente identificables.

Es claro que los pares aparecen alineados casi radialmente desde algún centro no muy bien definido. Las so-

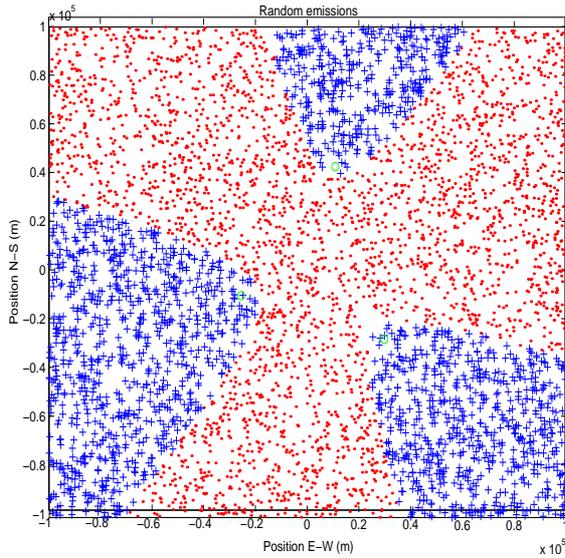


Figura 3: Simulación de emisores al azar. Las cruces representan puntos de emisión que dan lugar a dos soluciones positivas y los puntos son emisores que dan una solución positiva y otra negativa.

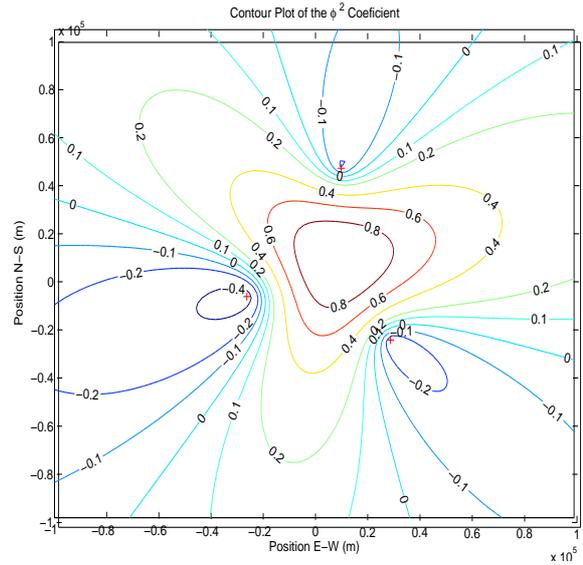


Figura 5: Diagrama de contornos del coeficiente de τ^2 .

coincide con la interface entre regiones.

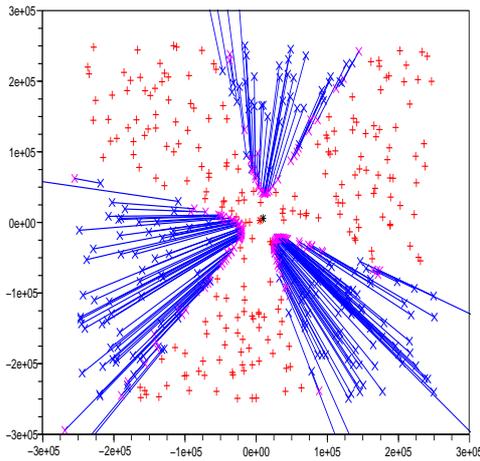


Figura 4: Pares de soluciones positivas pasadas de tiempo a espacio unidas por segmentos.

luciones incorrectas se acumulan sobre la línea que limita las regiones de soluciones únicas y dobles. La calidad de correcta o incorrecta surge de la comparación con la verdadera posición del emisor, que en la simulación es, por supuesto, conocida. La curva límite da todos los puntos en que el coeficiente de τ^2 se anula y por lo tanto

$$P^2 = 1 - \frac{4a^2}{l^2}$$

y

$$\tau = \frac{\frac{l^2}{4} \left(1 - \frac{4a^2}{l^2}\right)^2 - Q^2}{2 \left[am \left(1 - \frac{4a^2}{l^2}\right) - PQ\right]}$$

La figura 5 muestra los contornos del mencionado coeficiente donde puede verse claramente que el contorno nulo

IV. DISCUSIÓN

En la sección previa notamos que el plano definido por los receptores está dividido en dos clases de regiones a saber: una central cóncava donde sólo hay puntos en los que si se halla un emisor, su posición se encontrará con el presente formalismo en forma unívoca. Esta región se extiende indefinidamente en tres direcciones radiales perpendiculares a las líneas base. El resto del plano está cubierto por tres regiones convexas inconexas conteniendo cerca de cada vértice al receptor respectivo y extendiéndose también radialmente. La primera de estas regiones es la más interesante desde el punto de vista del problema de localización porque provee la posición del emisor sin ambigüedad. Más aún, si el área de interés fuera sólo la región entre receptores las posiciones dadas por las ecuaciones 12 y 13 son directamente las correctas. Por otra parte, cuando el rango de interés es mucho mayor a la línea base promedio, el área de la region no ambigua se vuelve igual a la suma de las áreas ambiguas.

Un aspecto de interés acerca de las regiones de solución doble es el apareamiento radial de las mismas. Este efecto puede ser asociado a la mencionada intersección de hiperboloides dando lugar a elipses o hipérbolas en un plano perpendicular al plano de los emisores[2]. Las soluciones dobles provienen de las elipses con dos intersecciones con el plano. Puesto que los hiperboloides están centrados en las líneas base sus intersecciones bisectarán aproximadamente el ángulo entre dichas líneas base, es decir, se orientarán en forma cercana a la radial desde el centroide de los receptores.

Otro aspecto a tomar en cuenta es el hecho de que, en estas simulaciones, a pesar de haber distribuido uniformemente los emisores (figura 4) se obtienen dos distribuciones espaciales muy diferentes para las posiciones reconstruidas a partir de ambas soluciones positivas para τ . Una

es uniforme como la original y la otra presenta una importante acumulación a lo largo de la curva de interface de las regiones. Este punto puede ser de mucha importancia cuando se deba decidir cuál es, dado un solo emisor, la solución más probable. En principio, la solución que está

más lejos de la curva de acumulación debería ser la correcta. Este es, sin embargo, un criterio de tipo estadístico y no necesariamente en todos los casos dará la verdadera solución.

[1] Mellen, G., II; M., Pachter and J. Raquet, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Page(s): 39, 3, 1056-1058, (2003).

[2] Fang B.T. , IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Page(s): 26, 5, 748- 753, (1990).