

# FORMALISMO CUÁNTICO VÍA INTEGRAL DE CAMINO DE FEYNMAN PARA LA INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA DE PARTÍCULAS COMPUESTAS EN MODELOS DE CAMPOS DE GAUGE NO RELATIVISTAS

## QUANTUM FORMALISM VIA FEYNMAN PATH INTEGRAL FOR THE ELECTROMAGNETIC INTERACTION OF COMPOSITE PARTICLES IN NONRELATIVISTIC GAUGE FIELD MODELS

Manavella E. C.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,  
Universidad Nacional de Rosario,  
Av. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina*

<sup>2</sup>*Instituto de Física Rosario,  
Universidad Nacional de Rosario,  
Bv. 27 de Febrero 210 bis,  
(2000) Rosario, Argentina*

*e-mail: manavella@ifir-conicet.gov.ar*

Recibido 12/12/2011; aprobado 5/06/2012

Se realiza un análisis comparativo entre tres modelos de partículas compuestas correlacionados. Estos son modelos de campos de gauge  $U(1) \times U(1)$  no relativistas clásicos para la interacción electromagnética de dichas partículas en dimensiones (2+1). Los modelos contienen un campo  $U(1)$  de Chern-Simons y el campo electromagnético, y describen tanto un sistema de bosones compuestos como uno de fermiones compuestos. Se considera explícitamente el segundo caso. La comparación se establece en base a los resultados obtenidos mediante la cuantificación vía integral de camino de Feynman, utilizando los formalismos de Faddeev-Senjanovic y de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin. Se proponen posibles aplicaciones de dichos resultados.

Palabras claves: Teoría cuántica de campos. Bosones y fermiones compuestos

A comparative analysis between three correlated models of composite particles is made. These are classical nonrelativistic  $U(1) \times U(1)$  gauge field models for the electromagnetic interaction of these particles in (2+1) dimensions. The models contain a Chern-Simons  $U(1)$  field and the electromagnetic field, and they describe both a composite boson system or a composite fermion one. The second case is considered explicitly. The comparison is performed on the basis of the results obtained by means of the quantization via Feynman path integral, by using the Faddeev-Senjanovic and Becchi-Rouet-Stora-Tyutin formalisms. Possible applications of these results are proposed.

Keywords: Quantum field theory. Composite bosons and fermions

### I. INTRODUCCIÓN

En Ref. [1], hemos realizado un estudio comparativo desde el punto de vista cuántico canónico entre los modelos de partículas compuestas que aparecen en Refs. [2-4], considerando los resultados obtenidos en base al formalismo Hamiltoniano de Dirac para sistemas vinculados [5,6].

En el presente trabajo, llevamos a cabo también un estudio comparativo entre los modelos citados pero en el ámbito de la cuantificación vía integral de camino de Feynman, utilizando los formalismos de Faddeev-Senjanovic (FS) [7] y de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST) [8].

Por otro lado, tanto en Ref. [1] como en el presente trabajo, planteamos posibles aplicaciones de los resultados obtenidos en Refs. [2-4] en los contextos de la teoría cuántica de campos y de la materia condensada.

El trabajo está organizado como sigue: En Sec. II, consideramos los resultados obtenidos en base al método de FS. Luego, en Sec. III, hacemos lo propio considerando el formalismo BRST. Posteriormente, en

Sec. IV, proponemos aplicaciones de los resultados encontrados. Finalmente, en Sec. V, damos nuestras conclusiones.

### II. CUANTIFICACIÓN VÍA INTEGRAL DE CAMINO EN BASE AL MÉTODO DE FADDEEV-SENJANOVIC

Las densidades Lagrangianas y las variables de campo dinámicas canónicas utilizadas en este trabajo son las correspondientes a Ref. [1].

#### A. Funcionales generatrices

Para los tres modelos considerados, hemos escrito [2-4] sus funcionales generatrices mediante integrales de camino de Feynman canónicas utilizando el método de FS, debido a que los modelos poseen vínculos de primera y segunda clase.

Luego, probamos que dichas funcionales pueden

reescribirse en términos de integrales de camino Lagrangianas en la forma

$$Z^{(r)} = \int \mathbb{D}a_\mu \mathbb{D}A_\nu \mathbb{D}\psi_\alpha \mathbb{D}\psi_\beta^\dagger \exp \left[ i \int d^3x \mathcal{L}_e^{(r)} \right], \quad (2.1)$$

donde  $r = 1, 2, 3$ . En esta ecuación, las densidades Lagrangianas  $\mathcal{L}_e^{(r)}$  quedan expresadas en términos de las variables de campo dinámicas independientes,  $a_\mu, A_\mu, \psi_\alpha$  y  $\psi_\alpha^\dagger$ , y así constituyen las densidades Lagrangianas efectivas de los modelos. Las mismas vienen dadas por

$$\mathcal{L}_e^{(r)} = \mathcal{L}^{(r)} + \mathcal{L}_{fg}, \quad (2.2)$$

donde  $\mathcal{L}^{(r)}$  son las densidades Lagrangianas de partida y

$$\mathcal{L}_{fg} = \frac{\lambda_a}{2} (\partial^\mu a_\mu)^2 + \frac{\lambda_A}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 \quad (2.3)$$

es la densidad Lagrangiana de fijado de gauge. En esta última ecuación,  $\lambda_a$  y  $\lambda_A$  son multiplicadores de Lagrange.

Debemos aclarar que hemos considerado necesario partir formalmente de integrales de camino canónicas y probar que es posible llegar a integrales de camino Lagrangianas. La razón es que, como es bien sabido, existen muchas teorías de campos en las cuales la simple integral de camino Lagrangiana no puede obtenerse partiendo de la canónica (ver, por ejemplo, Ref. [9] y referencias incluidas).

## B. Estructuras diagramáticas

Ahora, vamos a comparar las estructuras diagramáticas de los modelos.

Expresaremos los propagadores y vértices en el espacio de los momentos.

(a) Para el modelo básico:

Los propagadores  $d_{\mu\nu}$  y  $D_{\mu\nu}^{(1)}$  de los campos de gauge  $a_\mu$  y  $A_\mu$ , respectivamente, vienen dados por

$$d_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\lambda_a} \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} + 2i\pi\tilde{\phi}\varepsilon_{\mu\nu\rho} \frac{k^\rho}{k^2}, \quad (2.4a)$$

$$D_{\mu\nu}^{(1)}(k) = -g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} + \left(1 + \frac{1}{\lambda_A}\right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}, \quad (2.4b)$$

donde  $k^2 = k_\mu k^\mu$ .

El propagador  $G$  del campo de materia  $\psi$  se escribe en la forma

$$G(\vec{p}, E) = \left( E - \mu - \frac{\vec{p}^2}{2m_e} \right)^{-1}, \quad (2.5)$$

donde  $E$  es la energía de la partícula,  $\vec{p}$  su momento ordinario y  $\vec{p}^2 = p_1^2 + p_2^2$ .

Los vectores  $V^n = (V_\mu^n)$ ,  $n = 1, 2$ , que representan los vértices de 3 puntas del modelo, están dados por

$$V^1 = V, \quad (2.6a)$$

$$V^2 = eV, \quad (2.6b)$$

donde

$$V = \left( 1, \frac{1}{m_e} q_i \right), \quad (2.7)$$

con  $i = 1, 2$ .

Finalmente, las matrices  $W_m = (W_m^{\mu\nu})$ ,  $m = 1, 2, 3$ , que representan los vértices de 4 puntas, se escriben como

$$W_1 = -\frac{1}{2m_e} W, \quad (2.8a)$$

$$W_2 = -\frac{e^2}{2m_e} W, \quad (2.8b)$$

$$W_3 = -\frac{e}{m_e} W, \quad (2.8c)$$

donde

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Las correspondientes reglas de Feynman son [10]:

(i) *Propagadores*. Representamos a los propagadores de los campos de gauge  $a_\mu$  y  $A_\mu$  con una línea ondulada gruesa y una línea ondulada fina

$$\begin{array}{l} \mu \text{---} \text{~~~~~} \text{---} \nu \quad \equiv d_{\mu\nu}(k), \\ \mu \text{---} \text{~~~~~} \text{---} \nu \quad \equiv D_{\mu\nu}^{(1)}(k) \end{array}$$

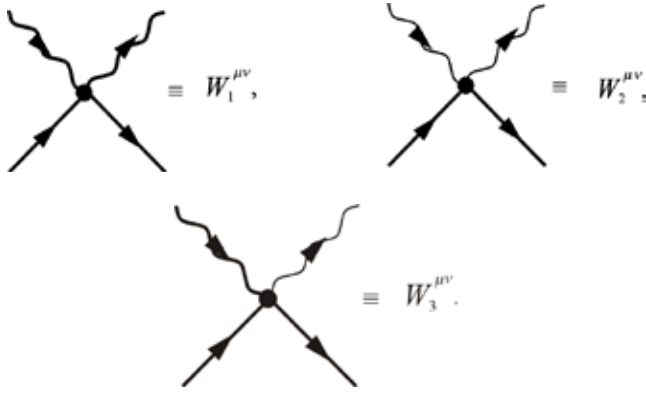
respectivamente, y al propagador del campo de materia  $\psi$  con una línea recta

$$\text{---} \text{---} \text{---} \quad \equiv G(\vec{p}, E).$$

(ii) *Vértices*. Así, los vértices de 3 puntas del modelo quedan representados por

$$\begin{array}{l} \text{---} \text{---} \text{---} \quad \equiv V_\mu^1, \\ \text{---} \text{---} \text{---} \quad \equiv V_\mu^i \end{array}$$

y los de 4 puntas por



Luego, en el contexto de la teoría perturbativa, por medio de un análisis de conteo de potencias, encontramos que el modelo posee treinta y siete diagramas primitivamente divergentes, veinte de ellos con dos vértices y el resto con tres.

(b) Para el modelo general:

Puesto que los términos de interacción presentes en la densidad Lagrangiana de partida son cuadráticos en los campos de gauge, los mismos deben contribuir a los propagadores de dichos campos. Por esto, la única posibilidad de poder construir la estructura diagramática del modelo consiste en considerar una única variable de campo extendida auxiliar  $X_\Lambda = (a_\mu, A_\nu)$ , donde el índice compuesto  $\Lambda$  toma valores sobre las componentes de las variables de campo de gauge [11].

De esta manera, el propagador  $D_{\Lambda\Pi}^{(2)}$  del campo de gauge  $X_\Lambda$  está dado por

$$D_{\Lambda\Pi}^{(2)}(k) = \begin{pmatrix} M_{\mu\nu}(k) & L_{\mu\nu}(k) \\ L_{\mu\nu}(k) & N_{\mu\nu}(k) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

donde

$$M_{\mu\nu}(k) = \mu_1(k^2)g_{\mu\nu} + \mu_2(k^2)k_\mu k_\nu - i\mu_3(k^2)\varepsilon_{\mu\nu\rho}k^\rho, \quad (2.11a)$$

$$L_{\mu\nu}(k) = \lambda_1(k^2)g_{\mu\nu} + \lambda_2(k^2)k_\mu k_\nu - i\lambda_3(k^2)\varepsilon_{\mu\nu\rho}k^\rho, \quad (2.11b)$$

$$N_{\mu\nu}(k) = \nu_1(k^2)g_{\mu\nu} + \nu_2(k^2)k_\mu k_\nu - i\nu_3(k^2)\varepsilon_{\mu\nu\rho}k^\rho. \quad (2.11c)$$

En Ecs. (2.11), los coeficientes se escriben como

$$\mu_1(k^2) = \frac{(4a^2 - k^2) [c(4ad + c) + d^2k^2]}{\alpha(k^2)}, \quad (2.12a)$$

$$\mu_2(k^2) = \frac{1}{\lambda_a} \frac{\beta(k^2)}{k^4 \alpha(k^2)}, \quad (2.12b)$$

$$\mu_3(k^2) = \frac{1}{2} \frac{(4a^2 - k^2) [4ae + (4ad^2 + g)k^2]}{k^2 \alpha(k^2)}, \quad (2.12c)$$

$$\lambda_1(k^2) = \alpha^{-1}(k^2) \{ -4a^2 [2d(ab + c^2) + bc] + [2d(ab + c^2 + 4a^2d^2) + bc]k^2 - 2d^3k^4 \}, \quad (2.12d)$$

$$\lambda_2(k^2) = -\frac{\lambda_1(k^2)}{k^2}, \quad (2.12e)$$

$$\lambda_3(k^2) = \frac{-8a^2ce + 2(ce + 2a^2dh)k^2 - dhk^4}{k^2 \alpha(k^2)}, \quad (2.12f)$$

$$\nu_1(k^2) = bg \frac{4a^2 - k^2}{\alpha(k^2)}, \quad (2.12g)$$

$$\nu_2(k^2) = \frac{1}{\lambda_A} \frac{\gamma(k^2)}{k^4 (4a^2 - k^2) \alpha(k^2)}, \quad (2.12h)$$

$$\nu_3(k^2) = \frac{2b}{k^2 (4a^2 - k^2) \alpha(k^2)} [16a^4e + 8a^2(2a^2d^2 - e)k^2 + (e - 8a^2d^2)k^4 + d^2k^6], \quad (2.12i)$$

donde

$$\alpha(k^2) = 16a^2e^2 - 4(e^2 + a^2f)k^2 + (16a^2d^4 + f)k^4 - 4d^4k^6, \quad (2.13a)$$

$$\beta(k^2) = 16a^2e^2 - 4[e^2 + a^2f + a^2c(c + 4ad)\lambda_a]k^2 + \{16a^2d^4 + f + [c^2 + 4ad(c - ad)]\lambda_a\}k^4 + d^2(\lambda_a - 4d^2)k^6, \quad (2.13b)$$

$$\gamma(k^2) = 64a^4e^2 - 16a^2(2e^2 + a^2f + a^2bg\lambda_A)k^2 + 4[e^2 + 2a^2(8a^2d^4 + f + bg\lambda_A)]k^4 - (32a^2d^4 + f + bg\lambda_A)k^6 + 4d^4k^8. \quad (2.13c)$$

En Ecs. (2.12) y (2.13), hemos considerado  $a = (2\sigma)^{-1}$ ,  $b = (4\pi\tilde{\phi})^{-1}$ ,  $c = \frac{\zeta e}{m_e}$ ,  $d = \frac{\eta e}{m_e}$ ,  $e = c^2 - ab$ ,  $f = b^2 + 8d(bc + c^2d + abd)$ ,  $g = b + 4cd$  y  $h = b + 2cd$ .

El propagador  $G$  del campo de materia  $\psi$  viene dado por Ec. (2.5).

El vector  $V_\Lambda$ , que representa el vértice de 3 puntas del modelo, se escribe en la forma

$$V_\Lambda = \left( 1, \frac{1}{m_e} q_i, e, \frac{e}{m_e} q_j \right). \quad (2.14)$$

Finalmente, la matriz  $W^{\Lambda\Pi}$ , que representa el vértice de 4 puntas, está dada por

$$W^{\Lambda\Pi} = -\frac{1}{2m_e} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Las correspondientes reglas de Feynman son las siguientes:

(i) *Propagadores*. Representamos al propagador del campo de gauge  $X_\Lambda$  con una línea ondulada

$$\Lambda \text{ --- } k \text{ --- } \Pi \equiv D_{\mu\nu}^{(2)}(k)$$

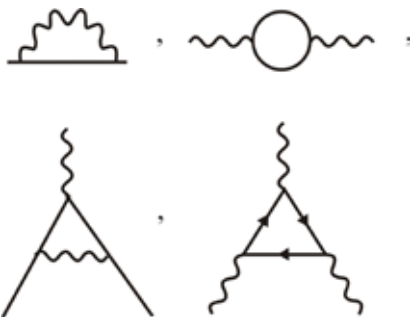
y al propagador del campo de materia  $\psi$  de la misma forma que para el modelo básico.

(ii) *Vértices*. De esta manera, los vértices de 3 y 4 puntas del modelo quedan representados por

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \equiv V_\Lambda, \quad \begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \equiv W^{\Lambda\Pi},$$

respectivamente.

Nuevamente, en el contexto de la teoría perturbativa, por medio de un análisis de conteo de potencias, hallamos que el modelo tiene los siguientes diagramas primitivamente divergentes:



y un gráfico similar al último con las flechas electrónicas invertidas.

(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:

Los propagadores y vértices, en este caso, coinciden con los correspondientes al modelo básico con excepción del propagador  $D_{\mu\nu}^{(3)}$  del campo electromagnético  $A_\mu$ , el cual viene dado por

$$D_{\mu\nu}^{(3)}(k) = g_{\mu\nu} \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} - k^2} + \left( \frac{1}{\lambda_A} - \frac{k^2}{\frac{1}{\sigma^2} - k^2} \right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} + i\varepsilon_{\mu\nu\rho} \frac{k^\rho}{\sigma \left( \frac{1}{\sigma^2} - k^2 \right) k^2}. \quad (2.16)$$

Consecuentemente, utilizamos las mismas reglas de Feynman que para el modelo básico.

Para los tres modelos considerados, las restantes reglas de Feynman son las usuales.

Es fácil mostrar que los tres modelos en cuestión poseen sólo un número finito de diagramas divergentes, esto es, son modelos superrenormalizables.

También, podemos ver que al anular la masa topológica el propagador  $D_{\mu\nu}^{(3)}$ , correspondiente al modelo topológicamente masivo puro, se reduce al propagador  $D_{\mu\nu}^{(1)}$ , correspondiente al modelo básico.

Además, encontramos que las estructuras diagramáticas correspondientes a los modelos básico y topológicamente masivo puro son similares, pero no lo son con respecto a la correspondiente al modelo general.

Por otro lado, es fácil ver que el propagador  $D_{\mu\nu}^{(3)}$  tiene el mismo comportamiento ultravioleta que el propagador  $D_{\mu\nu}^{(1)}$ .

### III. CUANTIFICACIÓN VÍA INTEGRAL DE CAMINO SEGÚN EL FORMALISMO BRST

#### A. Matrices correspondientes a los vínculos de segunda clase y densidades Hamiltonianas de primera clase

Como mostramos en Ref. [1], los vínculos de segunda clase son:

(a) Para el modelo básico:

$$\Phi_2^{0i} = p^i - \frac{1}{4\pi\phi} \varepsilon^{ij} a_j = 0, \quad (3.1a)$$

$$\Omega_\alpha^\dagger = \pi_\alpha^\dagger + i \frac{\tau + 1}{2} \psi_\alpha^\dagger = 0, \quad (3.1b)$$

$$\Omega_\alpha = \pi_\alpha - i \frac{\tau - 1}{2} \psi_\alpha = 0. \quad (3.1c)$$

Escribiendo  $\Gamma_1^{(1)} = \Phi_2^{01}, \Gamma_2^{(1)} = \Phi_2^{02}, \Gamma_3^{(1)} = \Omega_1^\dagger, \Gamma_4^{(1)} = \Omega_2^\dagger, \Gamma_5^{(1)} = \Omega_1$  y  $\Gamma_6^{(1)} = \Omega_2$ , encontramos que el determinante de la matriz  $F^{(1)} = \left( \left[ \Gamma_I^{(1)}, \Gamma_J^{(1)} \right] \right), I, J = 1, \dots, 6$ , vale

$$\det F^{(1)} = \frac{1}{4\pi^2 \tilde{\phi}^2} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.2)$$

(b) Para el modelo general:

Los datos por Ecs. (3.1b,c).

Nuevamente, escribiendo  $\Gamma_1^{(2)} = \Omega_1^\dagger, \Gamma_2^{(2)} = \Omega_2^\dagger, \Gamma_3^{(2)} = \Omega_3$  y  $\Gamma_4^{(2)} = \Omega_4$ , encontramos que el determinante de la matriz  $F^{(2)} = \left( \left[ \Gamma_I^{(2)}, \Gamma_J^{(2)} \right] \right), I, J = 1, \dots, 4$ , vale

$$\det F^{(2)} = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.3)$$

(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:  
Vale lo expresado para el modelo básico.

Por otro lado, las densidades Hamiltonianas de primera clase son:

(a) Para el modelo básico:

$$\mathcal{H}_0^{(1)} = -\frac{1}{2} P^i P_i + \mathcal{G}, \quad (3.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \mu \psi^\dagger \psi - \frac{1}{2m_e} \psi^\dagger \vec{\mathcal{D}}^2 \psi \\ & + i(a_0 + eA_0)(\psi^\dagger \pi - \psi \pi^\dagger + i\psi^\dagger \psi). \end{aligned} \quad (3.5)$$

(b) Para el modelo general:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{(2)} = & \frac{m_e}{2\eta e} \left( \frac{m_e}{4\eta e} p^i + P^i \right) p_i + \frac{\zeta}{4\eta} \left( \frac{1}{\sigma} + \frac{\zeta}{2\eta} \right) A_i A^i \\ & + \frac{m_e}{2\eta e} \varepsilon^{ij} a_i \left[ \left( \frac{\zeta e}{m_e} + \frac{m_e}{8\pi\tilde{\phi}\eta e} \right) p_j + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}} P_j \right] \\ & + \frac{m_e}{8\pi\tilde{\phi}\eta e} \left( \frac{\zeta e}{m_e} + \frac{m_e}{16\pi\tilde{\phi}\eta e} \right) a_i a^i + \frac{\zeta}{2\eta} \varepsilon^{ij} A_i P_j \\ & + \frac{m_e}{2\eta e} \left[ \frac{\zeta}{8\pi\tilde{\phi}\eta} + \frac{1}{8\pi\tilde{\phi}\sigma} + \left( \frac{\zeta e}{m_e} \right)^2 \right] a_i A^i \\ & - \frac{\eta e}{m_e} f_{ij} F^{ij} + \frac{m_e}{4\eta e} \left( \frac{1}{\sigma} + \frac{\zeta}{\eta} \right) \varepsilon^{ij} A_i p_j + \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:

$$\mathcal{H}_0^{(3)} = -\frac{1}{2} P^i P_i - \frac{1}{8\sigma^2} A_i A^i - \frac{1}{2\sigma} \varepsilon^{ij} A_i P_j + \mathcal{G}. \quad (3.7)$$

Podemos ver que al anular la masa topológica la densidad  $\mathcal{H}_0^{(3)}$ , correspondiente al modelo topológicamente masivo puro, se reduce a la densidad  $\mathcal{H}_0^{(1)}$ , correspondiente al modelo básico.

## B. Funcionales generatrices

En el contexto del formalismo BRST, para los tres modelos considerados, hemos tomado como variables de campo dinámicas independientes

$$A_{\mathcal{F}} = \left( a_\mu, A_\nu, \psi_\alpha, \psi_\beta^\dagger, \rho_a \right), \quad (3.8)$$

cuyos momentos canónicamente conjugados son

$$P^{\mathcal{F}} = \left( p^\mu, P^\nu, \pi_\alpha^\dagger, \pi_\beta, \xi^a \right), \quad (3.9)$$

respectivamente. En Ec. (3.8), las variables  $\rho_a, a = 1, \dots, 4$ , son multiplicadores de Lagrange.

Además, consideramos las variables de campo fantasmas fermiónicas (espinores de Majorana)

$$\mathbf{Q}_A = (\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_b) \quad (3.10)$$

y sus momentos canónicamente conjugados

$$\mathbf{P}^A = (\mathbf{p}^{\dagger a}, \mathbf{q}^{\dagger b}), \quad (3.11)$$

respectivamente, donde el símbolo “†” indica antifantasma. Se verifica que

$$[\mathbf{q}_a(x), \mathbf{p}^{\dagger b}(y)]_+ = \delta_a^b \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.12a)$$

$$[\mathbf{p}_a(x), \mathbf{q}^{\dagger b}(y)]_+ = \delta_a^b \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.12b)$$

En Ecs. (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11), los índices compuestos  $\mathcal{F}$  y  $A$  adquieren valores sobre las componentes de las diferentes variables de campo.

De esta manera, encontramos las densidades Hamiltonianas de fijado de gauge invariantes BRST para cada modelo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\chi^{(r)}(x) = & \mathcal{H}_0^{(r)}(x) + \mathbf{p}_a^\dagger(x) \mathbf{p}^a(x) \\ & + \Sigma_a^{(r)}(x) \rho^a(x) + \xi_a(x) \Theta^{(r)a}(x) \\ & + \mathbf{q}_a^\dagger(x) \int d^2y \left[ \Theta^{(r)a}(x), \Sigma_b^{(r)}(y) \right]_- \mathbf{q}^b(y), \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde las densidades Hamiltonianas de primera clase  $\mathcal{H}_0^{(r)}$  son las indicadas en el punto anterior, y los vínculos de primera clase  $\Sigma_a^{(r)}$  y las condiciones de fijado de gauge  $\Theta_a^{(r)}$  son los correspondientes a Ref. [1].

Consecuentemente, las densidades Lagrangianas BRST se escriben

$$\mathcal{L}_\chi^{(r)} = \dot{A}_{\mathcal{F}} P^{\mathcal{F}} + \mathbf{P}^A \dot{\mathbf{Q}}_A - \mathcal{H}_\chi^{(r)}. \quad (3.14)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que los tres modelos considerados poseen vínculos de primera y segunda clase, hemos escrito [2-4] sus funcionales generatrices BRST mediante las siguientes integrales de camino de Feynman:

$$\begin{aligned} Z_\chi^{(r)} = & \int \mathbb{D}A_{\mathcal{F}} \mathbb{D}P^{\mathcal{F}} \mathbb{D}\mathbf{Q}_A \mathbb{D}\mathbf{P}^A \delta \left[ \Gamma_I^{(r)} \right] \left[ \det F^{(r)} \right]^{1/2} \\ & \times \exp \left[ i \int d^3x \mathcal{L}_\chi^{(r)} \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde los vínculos de segunda clase  $\Gamma_I^{(r)}$  y los determinantes de las matrices  $F^{(r)} = \left( \left[ \Gamma_I^{(r)}, \Gamma_J^{(r)} \right] \right)$  son los dados en el punto anterior.

Con referencia a Ec. (3.13), tenemos:

(a) Para el modelo básico:

Como  $\left[ \Theta^{(1)a}(x), \Sigma_b^{(1)}(y) \right]_- = f_b^a \nabla^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) + g_b^a \delta(\vec{x} - \vec{y})$ , donde

$$f_b^a = \begin{pmatrix} -e & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{i}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.16a)$$

$$g_b^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.16b)$$

el último término del lado derecho de Ec. (3.13) queda  $f_b^a \mathbf{q}_a^\dagger(x) \nabla^2 \mathbf{q}^b(x) + \mathbf{q}_3^\dagger(x) \mathbf{q}^3(x)$ .

(b) Para el modelo general:

En este caso, se cumple que  $\left[ \Theta^{(2)a}(x), \Sigma_b^{(2)}(y) \right]_- = h_b^a \nabla^2 \delta(\vec{x} - \vec{y})$ , donde

$$h_b^a = \begin{pmatrix} -e & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{i}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\eta e}{m_e} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Así, el último término del lado derecho de Ec. (3.13) se escribe  $h_b^a \mathbf{q}_a^\dagger(x) \nabla^2 \mathbf{q}^b(x)$ .

(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:

Vale lo expresado para el modelo básico.

Además, hemos probado que para los tres modelos en consideración las expresiones de las funcionales generatrices correspondientes al formalismo BRST son equivalentes a las obtenidas utilizando el método de FS, dadas por Ec. (2.1).

#### IV. POSIBLES APLICACIONES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Veamos ahora posibles aplicaciones de los resultados encontrados en Refs. [2-4] en los contextos de la teoría cuántica de campos y de la materia condensada.

##### A. En el contexto de la teoría cuántica de campos:

Se sabe que, desde hace tiempo, se ha considerado en distintos modelos con invariancias de gauge la adición de términos en altas derivadas en los campos de gauge a las densidades Lagrangianas correspondientes, conservando dichas invariancias. La razón de este procedimiento es que en general dichos términos mejoran

el comportamiento ultravioleta de los propagadores de tales campos, pudiéndose eventualmente eliminar la divergencia de ciertos diagramas de Feynman donde dichos propagadores aparecen [11,12].

En este sentido, hemos aplicado este procedimiento [13] a los modelos correspondientes a Refs. [2,4] considerando el término en altas derivadas

$$\mathcal{L}_a = k \partial_\rho F_{\mu\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Actualmente, estamos haciendo lo propio con el modelo de Ref. [3] utilizando el término

$$\mathcal{L}'_a = k \partial_\rho F_{\mu\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} + k' \partial_\rho f_{\mu\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

En estas ecuaciones,  $k$  y  $k'$  son constantes.

En otro orden de cosas, desarrollaremos los procedimientos de regularización y renormalización de los modelos correspondientes a Refs. [2-4].

En este caso, como es sabido, el procedimiento de regularización dimensional no puede ser utilizado con seguridad debido a la presencia de la forma volumen  $\varepsilon_{\mu\nu\rho}$  en los propagadores de los campos de gauge. Consecuentemente, debe ser utilizado otro método de regularización invariante de gauge, por ejemplo, el de Pauli-Villars [14].

El procedimiento de renormalización se implementa como en la electrodinámica cuántica usual.

##### B. En el contexto de la materia condensada:

Como es bien sabido, el estudio desde el punto de vista cuántico de sistemas electrónicos en bajas dimensiones, es decir, en planos y cadenas de átomos en lugar de los sólidos tridimensionales usuales, es un tema de enorme interés actual en el campo de la materia condensada. Ello se debe, entre otras cosas, a que estos sistemas presentan características especiales que llevan a fenómenos tales como la superconductividad de alta temperatura crítica y a propiedades magnéticas particulares, con potenciales aplicaciones tecnológicas.

Una forma de estudiar estos sistemas es en base a la teoría cuántica de campos. Otra forma consiste en utilizar la teoría cuántica de muchos cuerpos [15], implementada mediante técnicas analíticas y computacionales.

Como dijimos en la introducción, en Refs. [2-4], hemos propuesto modelos de partículas compuestas y los hemos estudiado en base al primer mecanismo citado recién. Estos modelos constituyen generalizaciones del modelo que Halperin et al. analizaron mediante el segundo mecanismo [16].

En esta situación, nuestro propósito es estudiar los modelos propuestos en Refs. [2-4] mediante la teoría cuántica de muchos cuerpos, y comparar los resultados obtenidos con los correspondientes a Ref. [16]. En particular, consideraremos magnitudes físicas de interés tales como el calor específico electrónico.

## V. CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio comparativo entre tres modelos de campos de gauge  $U(1) \times U(1)$  no relativistas clásicos correlacionados que describen la interacción electromagnética de partículas compuestas en dimensiones (2+1).

La comparación se basó en los resultados encontrados por medio de la cuantificación vía integral de camino de Feynman, utilizando los formalismos de FS y BRST.

De esta manera, se observó que para los tres modelos en consideración las integrales de camino Lagrangianas correspondientes a las funcionales generatrices pudieron ser obtenidas partiendo de las canónicas.

Se vio que los tres modelos son superrenormalizables.

Se encontró que al anular la masa topológica la densidad Hamiltoniana de primera clase correspondiente al modelo topológicamente masivo puro se reduce a la correspondiente al modelo básico.

Se halló que las estructuras diagramáticas correspondientes a los modelos básico y topológicamente masivo puro son similares, pero no lo son con respecto a la correspondiente al modelo general.

Se notó que el propagador del campo electromagnético en el caso del modelo topológicamente masivo puro tiene el mismo comportamiento ultravioleta que el correspondiente al modelo básico.

Se vio que para los tres modelos analizados las funcionales generatrices obtenidas mediante el formalismo BRST son equivalentes a las correspondientes al método de FS.

Finalmente, se plantearon posibles aplicaciones de los resultados obtenidos en Refs. [2-4].

El trabajo fue desarrollado considerando explícitamente el caso de fermiones compuestos.

## REFERENCIAS

- [1] Manavella E. C., *Formalismo Cuántico Canónico para la Interacción Electromagnética de Partículas Compuestas en Modelos de Campos de Gauge No Relativistas*. En este volumen.  
 [2] Manavella E. C., *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 1453 (2001).  
 [3] Manavella E. C. and Addad R. R., *Int. J. Theor.*

*Phys.* **46**, 2868 (2007).

[4] Manavella E. C. and Addad R. R., *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 2473 (2009).

[5] Dirac P. A. M., *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950); *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University Press, New York (1964).

[6] Sundermeyer K., *Constrained Dynamics*, Springer, Berlin (1982).

[7] Faddeev L. D., *Theor. Math. Phys.* **1**, 1 (1970); Senjanovic P., *Ann. Phys. (N. Y.)* **100**, 227 (1976).

[8] Becchi C., Rouet A. and Stora R., *Phys. Lett. B* **52**, 344 (1974); *Ann. Phys. (N. Y.)* **98**, 287 (1976); Fradkin E. S. and Vilkovisky G. A., *Phys. Lett. B* **55**, 224 (1975); Tyutin I. V., Lebedev preprint FIAN 39, unpublished (in Russian) (1975); Fradkin E. S. and Fradkina T. E., *Phys. Lett. B* **72**, 343 (1978); Marnelius R., *Introduction to the quantization of general gauge theories*, Preprint, Institute of Theoretical Physics, Göteborg (1981); Henneaux M., *Phys. Rep.* **126**, 1 (1985).

[9] Ryder L. H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[10] 't Hooft G. and Veltman M., *Diagrammar*, CERN (1973).

[11] Foussats A., Manavella E., Repetto C., Zandron O. P. and Zandron O. S., *Specul. Sci. Technol.* **20**, 3 (1997).

[12] Foussats A., Manavella E., Repetto C., Zandron O. P. and Zandron O. S., *Int. J. Theor. Phys.* **34**, 1 (1995); 1037 (1995); *J. Math. Phys.* **37**, 84 (1996); Benedetti D., Machado P. F. and Saueressig F., *Mod. Phys. Lett. A* **24**, 2233 (2009); Carone C. D., *Phys. Lett. B* **677**, 306 (2009).

[13] Manavella E. C., Topologically Massive Electromagnetic Interaction of Composite Particles in a Higher-Derivative Nonrelativistic Gauge Field Model, *Int. J. Mod. Phys. A*, accepted.

[14] Alvarez-Gaumé L., Labastida J. M. F. and Rammallo A. V., *Nucl. Phys. B* **334**, 103 (1990).

[15] Schrieffer J. R., *Theory of Superconductivity*. W. A. Benjamin, Inc., New York (1964); Mahan G. D., *Many-Particle Physics*. 3rd Ed., Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2000).

[16] Halperin B. I., Lee P. A. and Read N., *Phys. Rev. B* **47**, 7312 (1993).