

Estabilidad de soluciones de similaridad de fluidos viscosos con efectos de inercia en canales con succión lateral

Sergio Ferro, Graciela Gnani

Instituto de Física del Plasma (CONICET-FCEyN, UBA)
e-mail: sergio@tinifp.lfp.uba.ar, graciela@tinifp.lfp.uba.ar

La solución de similaridad propuesta por Berman en 1953 para el problema del flujo en un canal con succión lateral, es una solución exacta de la ecuación de Navier-Stokes. El análisis de la estabilidad espacial de dicha solución fue realizado por Durlofsky y Brady en 1984, quienes estudiaron la propagación de las perturbaciones simétricas generadas en un extremo del canal, hacia su interior. En este trabajo se presenta la extensión de este tipo de análisis, a perturbaciones de forma arbitraria. En particular se ha comprobado que las perturbaciones antisimétricas, que no fueron consideradas en el análisis antes mencionado, son más desestabilizadoras que las simétricas. También se llevó a cabo el análisis de las soluciones asimétricas descubiertas por Zaturka et al. en 1988, encontrándose que, por encima de cierto valor del número de Reynolds, las soluciones temporalmente estables presentadas por estos autores son, sin embargo, inestables ante perturbaciones espaciales.

The similarity solution proposed by Berman in 1953 for the flow through a channel with porous walls, is an exact solution Navier-Stokes equation. The spatial stability analysis for these solutions was developed by Durlofsky and Brady in 1984, who studied the propagation of any symmetric perturbation generated at the edge of the channel, towards its centre. In this article, an extension of this analysis is presented to include arbitrary perturbations. In particular, it was found that antisymmetric perturbations -not considered in previous analyses- are more likely to produce instabilities than symmetric ones. The spatial stability analysis for the asymmetric solutions discovered by Zaturka et al. in 1988, is presented as well. It was found that the temporally stable solutions described by these authors are, however, spatially unstable.

I. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Navier-Stokes para el flujo de un fluido viscoso e incompresible a lo largo de un canal plano forzado por succión constante y uniforme a través de paredes porosas y rígidas, admite una solución de similaridad en el límite de un canal infinitamente largo (ver figura 1). Esta solución, descubierta por Berman⁽¹⁾ en 1953, representa uno de los pocos casos conocidos de solución exacta de la ecuación de Navier-Stokes. Berman redujo la ecuación de Navier-Stokes a una ecuación diferencial ordinaria, no lineal, de cuarto orden con dos condiciones de contorno en cada pared. Dicha ecuación depende de un único parámetro adimensional, el número de Reynolds transversal R , definido en términos del semiancho del canal y la velocidad de succión. La ecuación fue resuelta en el límite $R \ll 1$.

Desde entonces, varios trabajos han extendido y generalizado la solución de Berman. Así Sellars⁽²⁾, consideró el límite de $R \rightarrow \infty$ y Yuan⁽³⁾ el límite $R \rightarrow -\infty$ (los valores negativos de R corresponden al caso en que el flujo es inyectado, en lugar de succionado, a través de las paredes). Proudman⁽⁴⁾ analizó los flujos con distintas velocidades de succión o inyección en cada pared y estableció las condiciones bajo las cuales existen capas límite, describiendo su ubicación y estructura. Terrill⁽⁵⁾ abordó el problema en forma numérica, mediante una versión modificada del método de "shooting". Proponiendo soluciones con simetría respecto del centro del canal, obtuvo resultados para un amplio rango de valores del número de Reynolds, estableciendo un nexo

entre los resultados obtenidos por Berman, Sellars y Yuan. A estas soluciones las denominaremos soluciones de tipo I.

Posteriormente, Robinson⁽⁶⁾ realizó una búsqueda numérica de soluciones (simétricas) al problema con $R > 0$, hallando una única solución para valores de R menores que cierto valor crítico R_{II} , y tres soluciones para valores R mayores a dicho valor. Es decir que en $R = R_{II}$ se generan dos nuevas soluciones (que llamaremos de tipo II y III), una de las cuales ya había sido mencionada por Raithby en un trabajo anterior⁽⁷⁾. Estas soluciones corresponden a flujos donde la componente de la velocidad paralela a las paredes no es máxima en el centro del canal y toma eventualmente valores negativos. El fluido en el centro del canal se desplaza, entonces, en dirección contraria a la dirección principal de flujo. Las soluciones de tipo III siempre presentan inversión de flujo, mientras que las soluciones de tipo II sólo para $R_{II} < R < R'_{II}$.

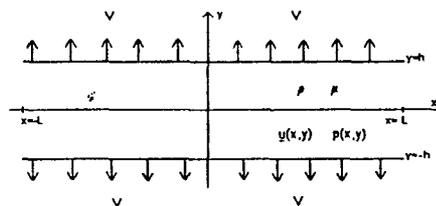


Figura 1: Esquema del canal

Las soluciones de tipo I, II y III hasta aquí mencionadas son simétricas respecto del centro del canal ($y = 0$). En

1988, Zaturka, Drazin y Banks⁽⁸⁾ analizaron la estabilidad temporal de estas soluciones. Encontraron que sólo las soluciones de tipo I con R menor que cierto valor crítico R_I , son estables. Mostraron, también que existen soluciones (llamadas I_a y I'_a) asimétricas estables para $R > R_I$. Para números de Reynolds mayores a cierto R_{Ia} , estas nuevas soluciones también pierden estabilidad en una bifurcación de Hopf, generándose sendas soluciones periódicas estables. También proponen la existencia de soluciones asimétricas inestables del tipo III (III_a y III'_a), que surgen en una bifurcación "pitchfork" en $R = R_{III}$, si bien no las calculan.

La posibilidad de que las soluciones de similitud describan configuraciones realizables, con su consiguiente interés para las aplicaciones, dependerá no sólo de la estabilidad temporal sino también de la espacial de estas soluciones. Brady⁽⁹⁾ y Durlinsky y Brady⁽¹⁰⁾ mostraron que las soluciones de tipo I son estables ante perturbaciones espaciales simétricas.

En este trabajo se presenta la extensión del análisis de estabilidad espacial al caso de perturbaciones de forma arbitraria. Se ha realizado también el análisis de estabilidad espacial de las soluciones asimétricas que aparecen para $R > R_{Ia}$. La sección II presenta las ecuaciones básicas del problema y el análisis de estabilidad se halla en la sección III. Las conclusiones se encuentran en la sección IV.

II. ECUACIONES BÁSICAS

Consideramos el sistema de coordenadas de acuerdo a la figura 1 con el origen de coordenadas en el centro del canal, la coordenada x paralela a las paredes y la coordenada y perpendicular a ellas. El problema estacionario consiste en hallar los campos de velocidades, $\underline{u}(x, y)$ y presiones $p(x, y)$ en términos de los parámetros del problema: la distancia entre paredes, $2h$, la velocidad con que el fluido es succionado a través de las mismas, V , la densidad, ρ , y la viscosidad, μ . Utilizando estos parámetros, definimos las siguientes variables adimensionales: $\tilde{x} = x/h$, $\tilde{y} = y/h$, $\tilde{u} = \underline{u}/V$, $\tilde{p} = p/(V^2\rho)$.

El sistema formado por la ecuación de continuidad para un fluido incompresible y la ecuación de Navier-Stokes, se escribe en términos de las variables adimensionalizadas, omitiendo los tildes, en la forma

$$\text{div}(\underline{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\underline{u} \cdot \text{grad}(\underline{u}) = -\text{grad}(p) + \text{div}(\text{grad}(\underline{u}))/R, \quad (2)$$

donde se ha definido el número de Reynolds $R \equiv Vh\rho/\mu$.

Proponiendo una solución de similitud de la forma

$$\underline{u}(x, y) = x \frac{\partial f(y)}{\partial y} \hat{x} - f(y) \hat{y}, \quad (3)$$

$$p(x, y) = \pi(y) + Ax^2/2, \quad (4)$$

se llega finalmente a la siguiente ecuación para las función incógnita $f(y)$,

$$R(ff''' - f'f'') + f^{iv} = 0, \quad (5)$$

donde $' \equiv d/dy$. Las condiciones de contorno del problema

están dadas entonces por

$$f(1) = -1, f(-1) = 1, f'(1) = 0, f'(-1) = 0. \quad (6)$$

Una vez resuelta la ecuación para $f(y)$, se puede obtener el campo de presiones mediante las relaciones

$$\pi(y) = \pi(1) + (1 - f^2)/2 - f'/R, \quad (7)$$

$$A = (ff''' - f'^2) + f'''/R. \quad (8)$$

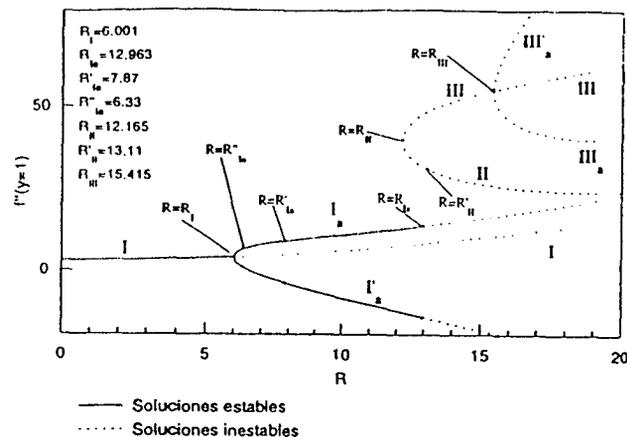


Figura 2: Diagrama de bifurcaciones

Presentamos en la figura 2 un diagrama de bifurcaciones en el que cada solución se halla representada por el valor de $f''(1)$, que es proporcional al esfuerzo viscoso sobre una de las paredes. En este diagrama se pueden apreciar los distintos tipos de soluciones estacionarias y su estabilidad temporal. Se observa la aparición de las soluciones asimétricas para $R_I = 6.001$, como también la de las ramas II y III de las soluciones simétricas en $R_{II} = 12.165$. Las líneas llenas corresponden a soluciones temporalmente estables, mientras que las líneas de puntos denotan soluciones inestables. Las soluciones asimétricas pierden su estabilidad en $R_{Ia} = 12.963$, en la bifurcación de Hopf mencionada previamente.

III. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ESPACIAL

El análisis de estabilidad espacial de la ecuación (5) se lleva a cabo proponiendo soluciones de la forma $\tilde{f}(x, y) = xf(y) + x^\lambda H_\lambda(y)$. La ecuación linealizada para $H_\lambda(y)$ conduce al siguiente problema de valores característicos

$$H_\lambda^{iv} + R(fH_\lambda''' - f''H_\lambda') = \lambda R(f'H_\lambda'' - f'''H_\lambda), \quad (9)$$

junto con las condiciones de contorno

$$H_\lambda(-1) = H_\lambda'(1) = H_\lambda(1) = H_\lambda'(1) = 0. \quad (10)$$

Para un número de Reynolds dado, la existencia de un autovalor λ menor que la unidad, implica la inestabilidad de la solución de similitud frente a determinadas perturbaciones. Cualquier perturbación en el extremo del canal que tenga una componente proporcional a la autofunción asociada a λ , cerca del origen alterará la solución de similitud.

Como se expresó anteriormente, la estabilidad espacial de las soluciones de similitud simétricas fue estudiada

por Durlofsky y Brady⁽¹⁰⁾. Estos autores consideraron, sin embargo, las condiciones de contorno

$$H_\lambda(0) = H_\lambda''(0) = H_\lambda(1) = H_\lambda'(1) = 0. \quad (11)$$

Estas condiciones son más restrictivas que las (10) y sólo consideran perturbaciones simétricas. A continuación se analiza la estabilidad de las diversas ramas de soluciones ante perturbaciones de forma arbitraria.

Soluciones de tipo I

Para las soluciones de tipo I, Durlofsky y Brady mostraron que, con las condiciones de contorno (11), todos los autovalores eran mayores que la unidad para todo $0 < R < \infty$ y que, por lo tanto, las soluciones eran estables. Sin embargo, como queda expresado, las condiciones de contorno impuestas por los autores en $y = 0$ restringen el tipo de perturbaciones consideradas, a perturbaciones simétricas. Si consideramos las condiciones generales (10) en lugar de las (11), introducimos en el análisis tanto perturbaciones simétricas como antisimétricas.

En la figura 3 se graficaron los primeros autovalores antisimétricos (líneas llenas) y simétricos (líneas de puntos) en función del número de Reynolds. Los resultados se obtuvieron mediante un código basado en técnicas espectrales, siguiendo el procedimiento utilizado por Orzag para analizar la estabilidad temporal de los flujos de Poiseuille⁽¹²⁾. Se observa que una de las ramas del gráfico coincide con la descrita por Durlofsky y Brady, pero existe otra rama con autovalores menores. Esta rama, que está asociada a una autofunción *antisimétrica*, interseca el eje $\lambda = 1$ en $R = R_I$, es decir en el valor en que la solución simétrica pierde estabilidad temporal. Este resultado se explica observando que la ecuación característica del problema de estabilidad temporal (ver Ref. 8):

$$G^{iv} + R(fG''' + f'''G - f''G' - f'G'') = sRG'' \quad (12)$$

tiene una autofunción de autovalor $s = 0$ cuando $R = R_I$. Comparando (12) y (9), se ve que dicha función es autofunción de (9) con autovalor $\lambda = 1$. Es decir que las soluciones pierden su estabilidad espacial y temporal para el mismo valor del número de Reynolds.

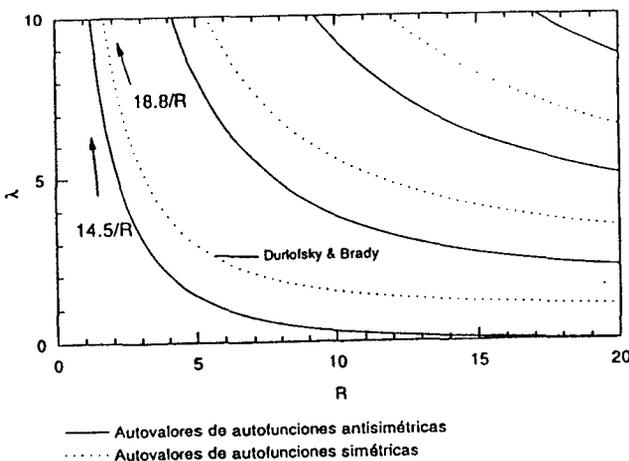


Figura 3: Autovalores de las soluciones de tipo I

Soluciones de tipo I_a

Como se dijo previamente, con la pérdida de estabilidad de las soluciones de tipo I se generan dos soluciones asimétricas. El análisis de estabilidad para estas soluciones, que son estables en el tiempo para $R < R_{Ia} = 12.963$, revela que sólo son espacialmente estables si $R < R'_{Ia} = 7.87$. Las soluciones I_a tienen la particularidad de ser las únicas soluciones conocidas que, siendo estables en el tiempo, admiten inversión de flujo para $R > R''_{Ia} = 6.33$. Dado que $R''_{Ia} < R'_{Ia}$, existen soluciones con inversión de flujo que son estables tanto temporal como espacialmente.

La figura 4 representa la parte real de los autovalores de las soluciones I_a (en línea llena) junto con los de las soluciones I. Se puede notar que a partir de cierto valor del número de Reynolds, las partes reales de los dos primeros autovalores se fusionan: los autovalores son complejos conjugados. Algo análogo ocurre con el tercer y cuarto autovalor. El carácter complejo de determinado autovalor implica que la perturbación asociada a él ha de presentar oscilaciones espaciales. Dichas oscilaciones fueron efectivamente encontradas en simulaciones bidimensionales del flujo en el canal, que forman parte de otro trabajo⁽¹³⁾.

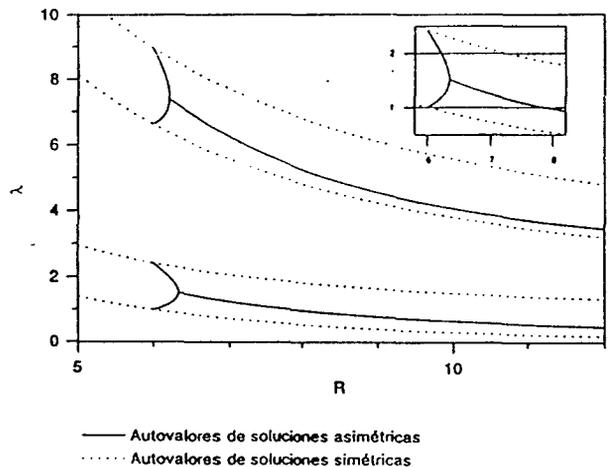


Figura 4: Autovalores de las soluciones de tipos I y tipo I_a

Soluciones de tipo II, III y III_a

El análisis detallado de la estabilidad de las soluciones simétricas de tipo II y III revela una estructura más compleja que la presentada en la Ref. 10, incluso si se consideran sólo las perturbaciones simétricas. En la figura 5 se pueden observar los dos primeros autovalores asociados a autofunciones simétricas (en línea llena) tanto para la solución de tipo II como para la solución de tipo III. Se observa como poco después de generadas, las ramas asociadas a soluciones de tipo III se vuelven complejas conjugadas, para volver a ser reales cerca de $R = 20$, mientras que las ramas asociadas a las soluciones de tipo II permanecen reales. Cabe aclarar que las soluciones con inversión de flujo (de tipo II con $R < 13.11$ y de tipo III) tienen autovalores negativos de módulo alto,

de modo que son muy inestables. Estos autovalores no fueron graficados. Las soluciones sin inversión de flujo, por el contrario, no presentan autovalores menores a los graficados. Observando el diagrama se ve que éstos son todos positivos y, a excepción del primero, mayores que 1.

En el mismo gráfico se pueden observar también (en línea de puntos) los dos primeros autovalores asociados a autofunciones antisimétricas de las soluciones de tipo II y III. Al igual que en el caso anterior, el diagrama no muestra los autovalores negativos de módulo alto del espectro de las soluciones con inversión de flujo. Es interesante notar que en este caso las soluciones sin inversión de flujo tienen un autovalor negativo.

Tanto entre las perturbaciones simétricas como antisimétricas de las soluciones de tipo III_a, existen algunas que llevan asociadas autovalores negativos de módulo alto, y por lo tanto la inestabilidad de estas soluciones es muy marcada.

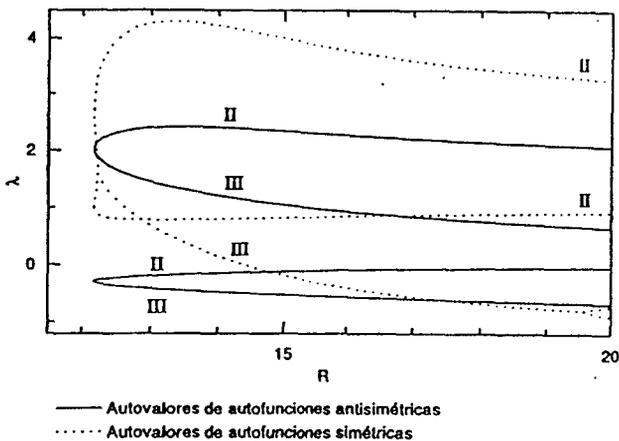


Figura 5: Autovalores de las soluciones de tipo II y III

IV. CONCLUSIONES

De las soluciones de la ecuación de Berman sólo las de tipo I y las de tipo I_a poseen la propiedad de ser espacialmente estables para algún rango del número de Reynolds. En el caso de las soluciones tipo I, que tienen simetría, este rango de estabilidad espacial está determinado por los autovalores de las perturbaciones

antisimétricas, que son las más desestabilizantes, y coincide con el rango de estabilidad temporal. Por el contrario en el caso de las soluciones de tipo I_a el rango de estabilidad espacial es sensiblemente menor que el de estabilidad temporal. Las soluciones de tipo II, III y III_a ya son inestables ante perturbaciones simétricas (además de temporalmente inestables). Sin embargo, para las soluciones de tipo II con $R \gg 1$, la inestabilidad se vuelve marginal ya que el menor de los autovalores tiende a 1 cuando R crece indefinidamente. Las perturbaciones simétricas sólo rompen la solución de similaridad en una pequeña región en el entorno del origen, tanto menor cuanto mayor es R . La inestabilidad espacial de estas soluciones queda caracterizada, también en este caso, por la existencia de un autovalor negativo en la parte antisimétrica del espectro.

En conclusión, hemos comprobado que sólo existen soluciones de similaridad estables de la ecuación de Berman para $R < 7.87$, siendo éstas simétricas para $R < 6.0013$ y asimétricas para $R > 6.0013$. Es interesante notar que en el rango $6.33 < R < 7.87$ hemos encontrado soluciones asimétricas con inversión de flujo que son estables tanto temporal como espacialmente.

Referencias

- 1- Berman, A. S., J. Appl. Phys. 24, 1232-1235, (1953).
- 2- Sellars, J. R., J. Appl. Phys. 26, 489-490, (1955).
- 3- Yuan, S. W., J. Appl. Phys. 27, 267-269, (1956).
- 4- Proudman, I., Fluid. Mech. 9, 593-602, (1960).
- 5- Terrill, R.M., Aeronaut. Quart. 15, 299-310, (1964).
- 6- Robinson, W. A., J. Eng. Math. 10, 23-40, (1976).
- 7- Raithby, G., Int. J. Heat Mass Transfer 14, 223-243, (1971).
- 8- Zaturka, M. B., Drazin, P.G. and Banks, W. H. H., Fluid Dyn. Res. 4, 151-178, (1988).
- 9- Raithby, G. D. and Knudsen, D. C., Trans. ASME J. Appl. Mech. 41, 896-902, (1974).
- 10- Durlflosky, L. and Brady, J. F., Phys. Fluids 27, 1068-1076, (1984).
- 11- Brady, J. F., Phys. Fluids 27, 1061-1067, (1984).
- 12- Orzag, S. A., J. Fluid Mech. 50, 689-703, (1971).
- 13- Ferro, S. y Gnani, G., V Simposio Internacional sobre Avances Recientes en Mecánica y Física de Fluidos, Tunuyán, 11-14 Noviembre de 1997.