

INFLUENCIA DEL SIGNO DEL INDICE DE REFRACCION EN LA REFLECTIVIDAD DE UNA SUPERFICIE CON UNA RUGOSIDAD LOCALIZADA

Vivian Grünhut* y Ricardo A. Depine⁺¹

¹ Grupo de Electromagnetismo Aplicado, Departamento de Física,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires,
Ciudad Universitaria, Pabellón I, C1428EHA Buenos Aires, Argentina

* vgrunhut@df.uba.ar

+ rdep@df.uba.ar

Para poder estudiar las propiedades dispersoras de los metamateriales se generalizan dos métodos de scattering desarrollados para materiales isotrópicos convencionales (no magnéticos) al caso de materiales con valores arbitrarios (positivos o negativos) de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica. Los métodos generalizados se usan para estudiar los cambios producidos en la reflectividad de la superficie de un metamaterial con una rugosidad localizada cuando se cambia el signo del índice de refracción relativo. Los resultados muestran que, a diferencia de lo que ocurre para una superficie plana cuya reflectividad es insensible al cambio de signo del índice de refracción relativo, en superficies con rugosidades el cambio de signo se manifiesta en la reflectividad aún para rugosidades de muy baja altura, especialmente en direcciones de observación alejadas de la dirección especular.

Palabras Claves: metamateriales, scattering electromagnético, superficies rugosas.

To study the scattering properties of metamaterials, we generalize two scattering methods developed for conventional (non-magnetic) isotropic materials to the case of materials with arbitrary values (positive or negative) of magnetic permeability and electric permittivity. The generalized methods are used to study the changes produced in the reflectivity of a metamaterial surface with localized roughness when the relative refractive index changes sign. Our results show that, unlike what happens in the case of a plane surface whose reflectivity is unaffected by the change of sign of the relative refractive index, in rough surfaces the change of sign is manifested in their reflectivity, even for very low roughness, particularly in observation directions away from the specular direction.

Key Words: metamaterials, electromagnetic scattering, rough surfaces.

I. INTRODUCCIÓN

El área de metamateriales se ha desarrollado vertiginosamente durante la primera década del siglo XXI. Si bien no existe aún consenso sobre la definición del término *metamaterial*, una definición breve y amplia podría ser la siguiente: un metamaterial es un medio artificial con propiedades electromagnéticas inexistentes o muy difíciles de encontrar en los materiales naturales¹⁻³. Entre estas propiedades, la que quizás más ha atraído la atención es el índice de refracción negativo⁴. En el caso ideal de medios sin pérdidas, el índice de refracción negativo aparece cuando existe un rango de frecuencias en el cual tanto la permitividad eléctrica ϵ como la permeabilidad magnética μ del material son simultáneamente negativas⁵. Por este motivo muchos autores se refieren a los materiales con índice negativo como materiales con parámetros constitutivos negativos². Para el caso real de medios con pérdidas, la condición de índice de refracción negativo es más amplia⁶ y se puede escribir

como

$$\epsilon_R |\mu| + \mu_R |\epsilon| < 0, \quad (1)$$

donde $\epsilon_R = \text{Re } \epsilon$, $\mu_R = \text{Re } \mu$ y Re indica la parte real de una cantidad compleja.

Mientras que en un material con índice de refracción positivo los vectores campo eléctrico \vec{E} , campo magnético \vec{H} y dirección de propagación \vec{k} de una onda plana forman una terna derecha, en un material con índice negativo dichos vectores forman una terna izquierda. Por esta razón, algunos autores emplean los términos diestro (en inglés, right handed, RH) y zurdo (en inglés, left handed, LH) para referirse a los materiales con índice de refracción positivo y negativo respectivamente, si bien creemos que sería más adecuado reservar estas denominaciones para los medios quirales⁷, cuya estructura interna está asociada con un sentido de giro. Teniendo en cuenta que el carácter positivo o negativo de la terna \vec{E} , \vec{H} , \vec{k} determina que el vector de Poynting \vec{S} resulte paralelo o antiparalelo al vector de onda \vec{k} , algunos autores

llaman medios con velocidad de fase positiva (medios PPV, por las siglas en inglés de positive phase velocity) a los materiales convencionales con índice de refracción positivo y medios con velocidad de fase negativa (medios NPV, por las siglas en inglés de negative phase velocity) a los materiales con índice de refracción negativo^{6,8}.

El aparentemente simple cambio de signo del índice de refracción produce cambios dramáticos en fenómenos muy bien conocidos como el efecto Doppler, la ley de la refracción o la radiación de Cerenkov⁵. En este trabajo estamos interesados en investigar los cambios producidos en las propiedades dispersoras de una rugosidad localizada en la superficie entre un medio convencional y un metamaterial cuando el índice de refracción del metamaterial cambia de signo. Problemas similares ya han sido estudiados en los siguientes casos: i) volúmenes limitados de forma simple, como cilindros^{9,10} o esferas^{11,12} y ii) redes de difracción formadas por medios isótropos¹³⁻¹⁶ y uniaxiales^{17,18}. Sin embargo, a nuestro leal saber y entender no existen hasta el momento estudios similares para el caso paradigmático de dos semiespacios isótropos separados por una superficie rugosa no periódica. Los estudios de este tipo pueden ser relevantes no solamente en novedosas aplicaciones donde las propiedades de los metamateriales pueden jugar un papel crucial, como por ejemplo en el diseño de mantos de invisibilidad^{19,20}, lentes perfectas²¹, control de la fuerza de Casimir²² o la excitación de polaritones superficiales^{23,24}, sino también en aplicaciones más convencionales, análogas a las empleadas para medios no magnéticos, como por ejemplo en la determinación de los parámetros constitutivos de un metamaterial a partir de curvas experimentales de reflectancia en función del ángulo de incidencia²⁵.

Para medios sin pérdidas separados por superficies perfectamente planas, las curvas de reflectancia en función del ángulo de incidencia θ_0 no distinguen entre medios PPV y NPV con idénticos valores del módulo del índice de refracción relativo. Esta propiedad se inscribe en una simetría más general²⁶, válida para superficies refractoras con pérdidas, que asegura que la transformación $\{\epsilon \rightarrow -\epsilon^*, \mu \rightarrow -\mu^*\}$, donde ahora ϵ y μ representan los parámetros relativos y el asterisco denota el complejo conjugado, cambia la fase pero no el módulo del coeficiente de Fresnel para la amplitud del campo reflejado. Esta simetría de conjugación es sólo válida para ondas incidentes no evanescentes, es decir para ángulos de incidencia θ_0 reales y con $0 \leq |\theta_0| \leq \pi/2$. Por este motivo, además del interés motivado por las aplicaciones mencionadas anteriormente, el estudio de la influencia de la rugosidad en la respuesta electromagnética de superficies cuasiplanas que solamente difieren en el signo del índice de refracción relativo entre los medios a ambos lados de la superficie resulta atrayente pues, cuando la superficie

deja de ser plana, los campos dispersados pueden contener, además de componentes no especulares, componentes evanescentes que en principio permitirían distinguir el carácter PPV o NPV de una determinada superficie, una característica relevante en técnicas de análisis no destructivo. La simetría mencionada sugiere que un indicador del carácter PPV o NPV de una superficie rugosa debería encontrarse en el campo lejano reflejado en direcciones de observación alejadas de la dirección especular. Alternativamente, debido a que las ondas evanescentes se comportan de manera opuesta en medios PPV y NPV^{5,21}, el carácter PPV o NPV de una superficie rugosa también debería revelarse en las observaciones del campo cercano.

Si bien para explorar estos temas de manera electromagnéticamente rigurosa los tratamientos numéricos son inevitables, es conveniente y deseable contar con métodos de análisis simples y eficientes que: i) permitan explicitar los mecanismos físicos involucrados en la interacción entre la onda incidente, la superficie rugosa y las propiedades del material refractor, y ii) eviten que los mecanismos físicos queden enmascarados por los tratamientos numéricos. Debido a que en general no es fácil poder conjugar ambas características en los métodos multi-propósito, como el método de elementos finitos o el método de diferencias finitas en el dominio temporal, donde las ecuaciones de Maxwell son discretizadas desde un principio, en este trabajo presentamos dos tratamientos relativamente sencillos que satisfacen las condiciones mencionadas anteriormente y que están basados en lo que se conoce como hipótesis de Rayleigh²⁷. Esta hipótesis, usada por Lord Rayleigh en 1907 para resolver la dispersión de una onda acústica en una superficie periódica impenetrable, consiste en suponer que los campos a ambos lados de una superficie rugosa admiten desarrollos en series de ondas planas que se alejan de la superficie, una suposición que recién fue objetada por Lippmann²⁸ en 1953. Las objeciones de Lippmann dieron lugar a numerosos estudios dedicados a establecer el límite de validez de la hipótesis de Rayleigh (para un resumen histórico ver por ejemplo²⁹). La aplicación de esta hipótesis en diversas configuraciones sigue despertando interés, tal como puede verse en las referencias³⁰⁻³⁴.

Hoy en día se admite que en el caso de materiales convencionales la hipótesis de Rayleigh da buenos resultados para superficies con rugosidades bajas. Lo mismo se ha podido comprobar en el caso de metamateriales con índice de refracción negativo, donde la hipótesis de Rayleigh ha sido empleada exitosamente para estudiar la difracción en superficies corrugadas periódicamente^{13-15,17}. En este trabajo empleamos la hipótesis de Rayleigh para investigar los cambios producidos en la reflectancia de una rugosidad localizada en la superficie de separación entre un medio convencional y un metamaterial,

cuando el índice de refracción del metamaterial cambia de signo. Para ello, en la Sección II damos, en primer lugar, una breve descripción matemática del problema de condiciones de contorno para la dispersión de una onda plana en la superficie rugosa de un metamaterial y, empleando las condiciones de contorno, obtenemos un sistema de ecuaciones integrales acopladas para las amplitudes de los campos dispersados a ambos lados de la superficie. En segundo lugar, desacoplamos el sistema de ecuaciones integrales para obtener la generalización a medios magnéticos de las ecuaciones de Rayleigh reducidas (obtenidas previamente por Toigo et al.³⁵ para materiales convencionales) y esquematizamos dos métodos de resolución que permiten calcular los campos reflejados y transmitidos de forma independiente: un método numérico directo, sólo limitado por la validez de la hipótesis de Rayleigh, y un método perturbativo, con validez restringida a situaciones en que la altura de la rugosidad es pequeña comparada con la longitud de onda de la radiación incidente. El método perturbativo, desarrollado originalmente por Rice³⁶ para medios impenetrables, permite exhibir los efectos de la rugosidad y, dado que su tratamiento numérico es relativamente sencillo, resulta muy conveniente para validar los resultados obtenidos con el método numérico directo. La sección III está dedicada a estudiar la confiabilidad de los métodos numéricos empleados y en la sección IV se presentan los resultados obtenidos para el caso de superficies con una protuberancia rectangular. Usaremos una dependencia temporal del tipo $e^{-i\omega t}$ donde ω es la frecuencia angular, t el tiempo e $i = \sqrt{-1}$.

II. ANÁLISIS

Problema de valores de contorno

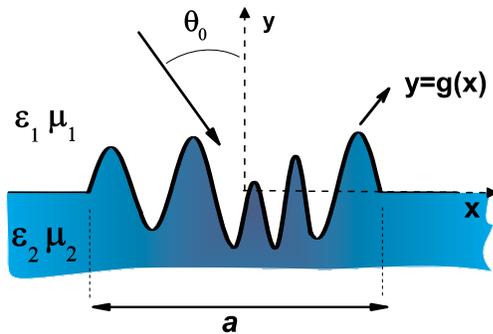


Figura 1: Esquema del problema de valores de contorno.

Consideremos una superficie rugosa representada por la función $y = g(x)$ (ver Figura 1). Esta superficie separa dos medios homogéneos e isotrópicos caracterizados por los parámetros constitutivos ϵ_i (permitividad

eléctrica) y μ_i (permeabilidad magnética), $i = 1, 2$. El medio 1 ($y > g(x)$, medio de incidencia) es un material convencional con índice de refracción positivo $\nu_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$, $\epsilon_1 > 0$, $\mu_1 > 0$, mientras que el medio 2 ($y < g(x)$, medio de refracción) es un metamaterial con parámetros constitutivos $\epsilon_2 = \epsilon_{2R} + i\epsilon_{2I}$ y $\mu_2 = \mu_{2R} + i\mu_{2I}$, ambos dependientes de la frecuencia ω , partes reales de signo arbitrario y partes imaginarias positivas $\epsilon_{2I} > 0$ y $\mu_{2I} > 0$ (causalidad). El metamaterial, con índice de refracción $\nu_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$, será un material NPV si sus parámetros constitutivos satisfacen la ec. (1) o un material PPV en caso contrario. La superficie rugosa es iluminada por una onda electromagnética linealmente polarizada que se propaga en el plano (x, y) (plano de incidencia) y que forma un ángulo θ_0 , ($|\theta_0| < \pi/2$) con el eje y . Analizaremos por separado dos polarizaciones independientes: la polarización s o TE (campo eléctrico en la dirección z) y la polarización p o TM (campo magnético en la dirección z). En ambos casos, los campos totales reflejados y transmitidos mantienen la polarización de la onda incidente. Denotamos con $\Psi(x, y)$ a la componente z del campo eléctrico total (polarización s) o a la componente z del campo magnético total (polarización p). Es sabido³⁷ que fuera de la región corrugada ($\min g(x) \leq y \leq \max g(x)$), $\Psi(x, y)$ se puede representar rigurosamente mediante superposiciones de ondas planas. En la zona $y > \max g(x)$

$$\Psi_1(x, y) = e^{i(\alpha_0 x - \beta_0^{(1)} y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_\alpha^{(1)} y)} d\alpha, \quad (2)$$

representa la onda plana incidente (primer término, con amplitud unidad) y los campos dispersados en el medio 1 (segundo término, campos reflejados), mientras que en la zona $y < \min g(x)$

$$\Psi_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_\alpha^{(2)} y)} d\alpha, \quad (3)$$

representa los campos dispersados en el medio 2 (campos transmitidos). La cantidad $\alpha_0 = k_0 \nu_1 \sin \theta_0$, $k_0 = \omega/c$, representa la componente x del vector de onda incidente. Notar que el integrando en 2 representa una onda plana con amplitud $R(\alpha)$ y vector de onda $\vec{k}^{(1r)}(\alpha) = \alpha \hat{x} + \beta_\alpha^{(1)} \hat{y}$, mientras que el integrando en 3 representa una onda plana con amplitud $T(\alpha)$ y vector de onda $\vec{k}^{(2t)}(\alpha) = \alpha \hat{x} - \beta_\alpha^{(2)} \hat{y}$. Las componentes según y de los vectores de onda $\vec{k}^{(1r)}$ y $\vec{k}^{(2t)}$ vienen dadas por

$$\beta_\alpha^{(j)} = \beta^{(j)}(\alpha) = (k_0^2 \epsilon_j \mu_j - \alpha^2)^{1/2}, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

y definimos $\beta_0^{(j)} = \beta^{(j)}(\alpha_0)$. Notemos que las cantidades $\beta_\alpha^{(1)}$ son reales o imaginarias puras. En el

primer caso, que ocurre en la llamada zona radiativa $|\alpha/k_0| < \nu_1$, se debe pedir que $\text{Re } \beta_\alpha^{(1)} \geq 0$, para que los campos de la ec. (2) representen ondas planas propagantes que se alejan de la superficie hacia el semiespacio $y > g(x)$. En el segundo caso, que ocurre en la llamada zona no radiativa $|\alpha/k_0| \geq \nu_1$, se debe pedir que $\text{Im } \beta_\alpha^{(1)} \geq 0$, para que estos campos representen ondas evanescentes que se atenúan para $y \rightarrow +\infty$. Consideraciones similares valen para las cantidades $\beta_\alpha^{(2)}$ en el caso ideal de medios de transmisión completamente transparentes (sin pérdidas, ϵ_2 y μ_2 reales), aunque debe notarse que en este caso la elección de las ramas de las funciones raíz cuadrada en (4) depende del carácter PPV o NPV del medio 2. En cambio, cuando el medio 2 es un medio real (con pérdidas, $\text{Im } \epsilon_2 > 0$, $\text{Im } \mu_2 > 0$), las cantidades $\beta_\alpha^{(2)}$ son siempre complejas con parte imaginaria no nula, y en consecuencia se debe pedir que $\text{Im } \beta_\alpha^{(2)} > 0$, para que los campos de la ec. (3) se atenúen para $y \rightarrow -\infty$. Notar que la condición $\text{Im } \beta_\alpha^{(2)} > 0$ fija automáticamente el signo de $\text{Re } \beta_\alpha^{(2)}$, independientemente de los signos de ϵ_{2R} y de μ_{2R} , es decir, independientemente del carácter PPV o NPV del medio 2.

Para obtener las amplitudes incógnita $R(\alpha)$ y $T(\alpha)$ se deben imponer las condiciones de contorno adecuadas en la superficie corrugada $y = g(x)$. Estas condiciones surgen de las ecuaciones de Maxwell y se escriben de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, g(x)) &= \Psi_2(x, g(x)), & (5) \\ \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \Psi_1(x, g(x)) &= \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \Psi_2(x, g(x)), & (6) \end{aligned}$$

donde $\sigma_j = \mu_j$ para modo s o $\sigma_j = \epsilon_j$ para modo p y \hat{n} es el versor normal a la superficie.

Hipótesis de Rayleigh

Para satisfacer las condiciones de contorno (5) y (6) utilizamos la hipótesis de Rayleigh²⁷, es decir, suponemos que las ecuaciones (2) y (3), que estrictamente representan a los campos fuera de la zona corrugada $\min g(x) \leq y \leq \max g(x)$, también pueden usarse para representar los campos cerca de la superficie. Procediendo de esta manera y proyectando en la base de funciones de Rayleigh $\{e^{i\alpha'x}\}_{\alpha' \in \text{Re}}$, se obtiene un sistema de dos ecuaciones integrales acopladas, cuyas incógnitas son las amplitudes complejas $R(\alpha)$ y $T(\alpha)$. Utilizando un procedimiento similar al empleado originalmente por Toigo et al.³⁵ para materiales convencionales y posteriormente generalizado a redes de difracción de materiales magnéticos en la Ref.³⁸, es posible desacoplar el sistema y obtener una ecuación integral para las amplitudes incógnita $R(\alpha)$

$$-K(\alpha_0, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} K^r(\alpha', \alpha) R(\alpha') d\alpha' \quad (7)$$

y otra ecuación integral para las amplitudes incógnita $T(\alpha)$

$$-2\beta_0^{(1)} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \delta(\alpha - \alpha_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K^t(\alpha', \alpha) T(\alpha') d\alpha' \quad (8)$$

donde $\delta()$ es la distribución delta de Dirac. Las ecuaciones (7) y (8) son ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie, con núcleos

$$K^r(\alpha', \alpha) = M_{\alpha', \alpha} D \left[\alpha - \alpha', \beta_\alpha^{(2)} - \beta_{\alpha'}^{(1)} \right] \quad (9)$$

y

$$K^t(\alpha', \alpha) = M_{\alpha, \alpha'} D \left[\alpha - \alpha', \beta_{\alpha'}^{(2)} - \beta_\alpha^{(1)} \right] \quad (10)$$

donde

$$M_{\alpha', \alpha} = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \left(\alpha\alpha' + \beta_\alpha^{(2)}\beta_{\alpha'}^{(1)}\right) + k_0^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\nu_1^2 - \nu_2^2\right)}{\beta_\alpha^{(2)} - \beta_{\alpha'}^{(1)}} \quad (11)$$

y

$$D[u, v] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-iux} e^{-ivg(x)} \quad (12)$$

es la transformada de Fourier de $e^{-ivg(x)}$. La inhomogeneidad en la ec. (7) viene dada por $K(\alpha_0, \alpha)$, con

$$K(\alpha_0, \alpha) = N_{\alpha_0, \alpha} 2\pi D \left[\alpha - \alpha_0, \beta_\alpha^{(2)} + \beta_0^{(1)} \right] \quad (13)$$

donde

$$N_{\alpha_0, \alpha} = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \left(\alpha_0\alpha - \beta_\alpha^{(2)}\beta_0^{(1)}\right) + k_0^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\nu_1^2 - \nu_2^2\right)}{\beta_\alpha^{(2)} + \beta_0^{(1)}}. \quad (14)$$

Método numérico directo

Para resolver numéricamente ecuaciones integrales como (7) es posible emplear esquemas de cuadratura que permitan aproximar la integral como una combinación lineal de los valores $R(\alpha_j)$ de la función incógnita R evaluada en una grilla $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N_\alpha}$ de la variable α . N_α es un parámetro numérico que determina la densidad de la grilla y que será determinado mediante criterios de convergencia. De esta manera, y evaluando la versión aproximada de la identidad (7) en los puntos discretos $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N_\alpha}$, es posible obtener N_α ecuaciones algebraicas cuya inversión permitiría en principio determinar las incógnitas $R(\alpha_j)$, $j = 1, \dots, N_\alpha$. En nuestro caso aparece una dificultad: el intervalo de integración de la variable α en (7) es infinito. Esta dificultad se puede superar suponiendo que $|R(\alpha)| \rightarrow 0$ cuando $|\alpha| \rightarrow \pm\infty$. En este caso, es lícito aproximar

la integral en el intervalo infinito por una integral en el intervalo finito $|\alpha| \leq \alpha^{\text{Max}}$, donde α^{Max} es otro parámetro numérico a ser determinado a posteriori mediante criterios de convergencia. Un tratamiento análogo para la ecuación (8) permitiría determinar los valores $T(\alpha_j)$ de la función incógnita T evaluada en la grilla $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N_\alpha}$ de la variable α .

Al pretender resolver numéricamente las ecuaciones (7) y (8) mediante el procedimiento descrito, surgen dos dificultades adicionales. En primer lugar, notemos que para una superficie plana ($g(x) \equiv 0$) las funciones $R(\alpha)$ y $T(\alpha)$ son proporcionales a distribuciones delta de Dirac. Por este motivo, es de esperar que en el caso de superficies levemente corrugadas las funciones $R(\alpha)$ y $T(\alpha)$ estén muy concentradas alrededor del valor $\alpha \approx \alpha_0$ que corresponde a las direcciones especulares, característica que podría exigir valores muy grandes para el parámetro numérico N_α . En segundo lugar, la ec. (8) contiene una delta de Dirac, lo que resulta poco conveniente para su discretización. Estas dificultades se pueden superar si se reescribe la ecuación (2) de la siguiente manera

$$\Psi_1(x, y) = e^{i(\alpha_0 x - \beta_0^{(1)} y)} + R^{(0)} e^{i(\alpha_0 x + \beta_0^{(1)} y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{R}(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_\alpha^{(1)} y)} d\alpha, \quad (15)$$

donde ahora el segundo término, con amplitud $R^{(0)}$, representa la onda plana reflejada por el plano perfecto. Análogamente, la ecuación (3) se puede escribir explicitando la onda plana transmitida por el plano perfecto

$$\Psi_2(x, y) = T^{(0)} e^{i(\alpha_0 x - \beta_0^{(2)} y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_\alpha^{(2)} y)} d\alpha. \quad (16)$$

$R^{(0)}$ y $T^{(0)}$ son los coeficientes de Fresnel de la superficie perfectamente plana, dados por

$$R^{(0)} = \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \beta_0^{(1)} - \beta_0^{(2)}}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \beta_0^{(1)} + \beta_0^{(2)}}, \quad (17)$$

y

$$T^{(0)} = 2 \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \beta_0^{(1)}}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \beta_0^{(1)} + \beta_0^{(2)}}. \quad (18)$$

Matemáticamente, este procedimiento es completamente equivalente a redefinir las amplitudes complejas $R(\alpha) = R^{(0)} \delta(\alpha - \alpha_0) + \tilde{R}(\alpha)$ y $T(\alpha) = T^{(0)} \delta(\alpha - \alpha_0) + \tilde{T}(\alpha)$. Las nuevas ecuaciones integrales para las amplitudes complejas $\tilde{R}(\alpha)$ y $\tilde{T}(\alpha)$ son

$$-K(\alpha_0, \alpha) = R^{(0)}(\alpha) K^r(\alpha_0, \alpha) + \int_{-\infty}^{+\infty} K^r(\alpha', \alpha) \tilde{R}(\alpha') d\alpha', \quad (19)$$

y

$$-2\beta_0^{(1)} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = T^{(0)}(\alpha) K^t(\alpha_0, \alpha) + \int_{-\infty}^{+\infty} K^t(\alpha', \alpha) \tilde{T}(\alpha') d\alpha'. \quad (20)$$

Método Perturbativo

Cuando la altura de la superficie considerada es pequeña comparada con la longitud de onda incidente, resolvemos las ecuaciones (7) y (8) empleando el tratamiento perturbativo estándar^{35,36}. Tanto las amplitudes complejas $R(\alpha)$ y $T(\alpha)$ como los términos de la forma $e^{-ivg(x)}$ que aparecen en los núcleos (9) y (10) y en la inhomogeneidad (13) se desarrollan en series de potencias

$$R(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{(n)}(\alpha)}{n!}, \quad (21)$$

$$T(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{(n)}(\alpha)}{n!}, \quad (22)$$

$$e^{-ivg(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ivg(x))^n}{n!}. \quad (23)$$

La integral (12) se puede reescribir como

$$D[u, v] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n v^n}{n!} \hat{g}^{(n)}(u), \quad (24)$$

donde $\hat{g}^{(n)}(u)$ es la transformada de Fourier de la función $[g(x)]^n$ y el índice n en las series (21), (22) y (24) indica el orden perturbativo. Introduciendo los desarrollos (21) y (24) en la ecuación (7) y los desarrollos (22) y (24) en la ecuación (8) es posible obtener los siguientes esquemas iterativos para los coeficientes $R^{(n)}(\alpha)$ y $T^{(n)}(\alpha)$, $n \geq 1$

$$R^{(n)}(\alpha) = - \left[(-i)^n 2\pi \hat{g}^{(n)}(\alpha - \alpha_0) N_{\alpha_0} \left(\beta_\alpha^{(2)} + \beta_0^{(1)} \right)^n + \sum_{j=1}^n (-i)^j \binom{n}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha' M_{\alpha\alpha'} \left(\beta_\alpha^{(2)} - \beta_{\alpha'}^{(1)} \right)^j \hat{g}^{(j)}(\alpha - \alpha') R^{(n-j)}(\alpha') \right] / M_{\alpha\alpha}, \quad (25)$$

$$T^{(n)}(\alpha) = - \left[\sum_{j=1}^n (-i)^j \binom{n}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha' M_{\alpha'\alpha} \left(\beta_{\alpha'}^{(2)} - \beta_\alpha^{(1)} \right)^j \hat{g}^{(j)}(\alpha - \alpha') T^{(n-j)}(\alpha') \right] / M_{\alpha\alpha}, \quad (26)$$

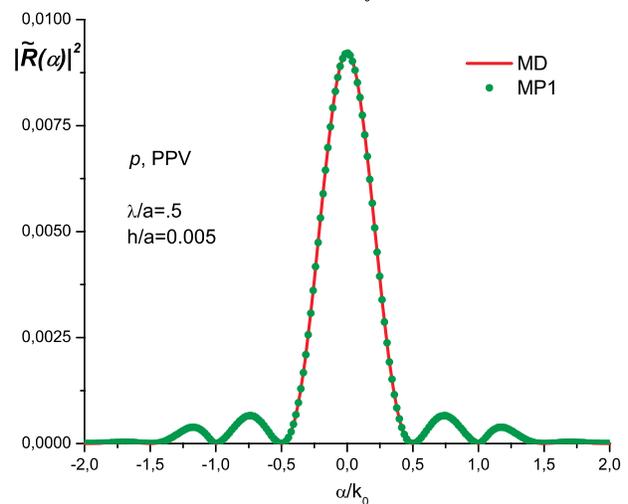
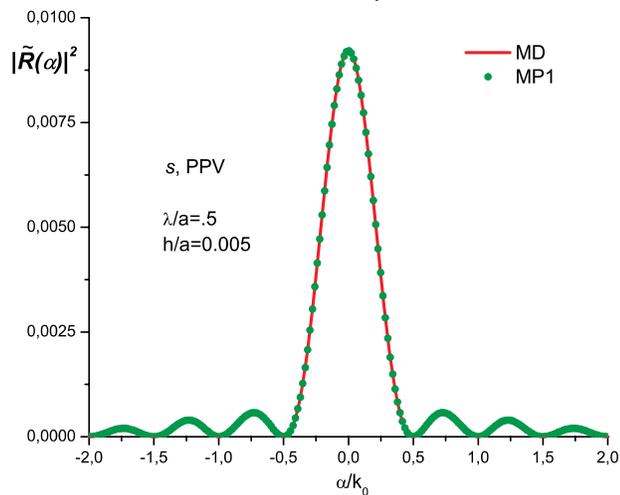
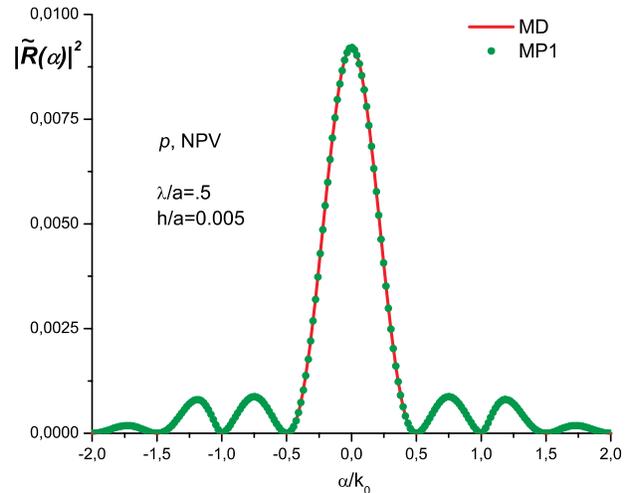
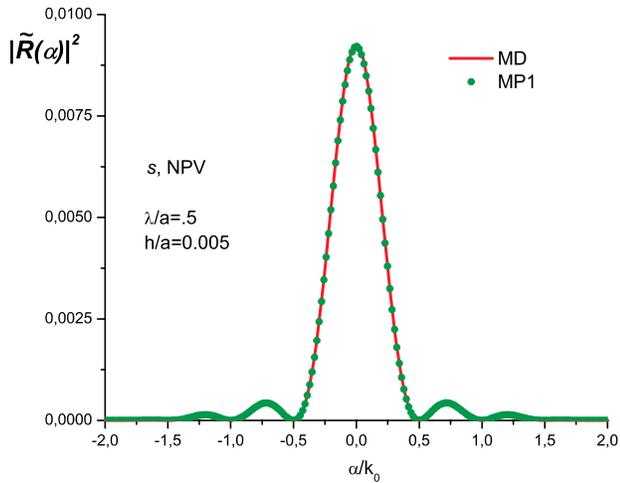


Figura 2: curvas de $|\tilde{R}(\alpha)|^2$ vs α/k_0 obtenidas con el método directo (curva continua) y el método perturbativo a primer orden (círculos) para el caso de una protuberancia rectangular de ancho a y altura $h/a = 0.005$ iluminada en incidencia normal ($\theta_0 = 0^\circ$) con polarización s . La longitud de onda es $\lambda/a = 0.5$. Los medios considerados son NPV (arriba) o PPV (abajo) con el mismo módulo del índice de refracción.

Figura 3: curvas de $|\tilde{R}(\alpha)|^2$ vs α/k_0 obtenidas con el método directo (curva continua) y el método perturbativo a primer orden (círculos) para el caso de una protuberancia rectangular de ancho a y altura $h/a = 0.005$ iluminada en incidencia normal ($\theta_0 = 0^\circ$) con polarización p . La longitud de onda es $\lambda/a = 0.5$. Los medios considerados son NPV (arriba) o PPV (abajo) con el mismo módulo del índice de refracción.

donde $R^{(0)}(\alpha)$ y $T^{(0)}(\alpha)$ coinciden con los coeficientes de Fresnel dados por las ecuaciones (17) y (18).

III. TRATAMIENTO NUMÉRICO

Los métodos presentados en la Sección anterior fueron implementados numéricamente para superficies planas con un número finito de protuberancias limitadas a la región $-a/2 \leq x \leq a/2$. En todos los ejemplos el medio de incidencia es vacío ($\epsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$) y el de transmisión un medio sin pérdidas. Para ilustrar los cambios producidos en las propiedades dispersoras de la superficie rugosa cuando se cambia el signo del índice de refracción del medio de transmisión, en este

trabajo se han usado los valores $\epsilon_2 = 5$, $\mu_2 = 1$ en el caso PPV y $\epsilon_2 = -5$ y $\mu_2 = -1$ en el caso NPV.

Para evaluar la confiabilidad de la aplicación de la hipótesis de Rayleigh a superficies rugosas no periódicas, la convergencia de los tratamientos numéricos y la consistencia entre ambos métodos, primero consideramos el caso de una superficie con una protuberancia rectangular de ancho a y altura h , iluminada en incidencia normal ($\theta_0 = 0^\circ$). En este caso $g(x) = h \text{rect}(x/a)$, donde $\text{rect}(u)$ es la función rectángulo centrada en el origen y ancho y altura unidad. En las Figuras 2 y 3 se muestran las curvas de $|\tilde{R}(\alpha)|^2$ vs α/k_0 obtenidas con el método directo (curva continua) y el método perturbativo a primer

orden (círculos) para el caso $h/a = 0.005$, $\lambda/a = 0.5$ y medios NPV y NPV. La Figura 2 corresponde a polarización s y la Figura 3 a polarización p . Obsérvese que ambos métodos numéricos dan una excelente coincidencia y en todos los casos predicen la presencia de un máximo principal centrado en el valor de la variable espectral $\alpha = \alpha_0$, que corresponde a la dirección de reflexión especular. Este máximo tiene ancho $2\lambda/a$ y está rodeado por máximos secundarios de ancho λ/a , en total coincidencia con lo predicho por la teoría escalar para la difracción de Fraunhofer en una rendija de ancho 2λ . Tal como hemos observado para otros valores de los parámetros geométricos y de incidencia y para otras formas de protuberancias, este ejemplo muestra que cuando la altura de las protuberancias es muy pequeña, el método perturbativo converge rápidamente y coincide con el método numérico directo, tal como ocurre para protuberancias periódicas en medios NPV¹³.

En las Figuras 4 y 5 se repiten las comparaciones entre el método directo (curva continua) y el método perturbativo (círculos) para las mismas situaciones consideradas en las Figuras 2 y 3, excepto que ahora la altura de la protuberancia se aumenta 10 veces ($h/a = 0.05$). Resulta interesante observar que el método perturbativo converge mejor en el caso PPV, donde la coincidencia con el método directo se obtiene en ambas polarizaciones en el orden perturbativo 8, mientras que para medios NPV la coincidencia se obtiene en el orden perturbativo 20.

Se ha comprobado que para alturas mayores y medios NPV el método perturbativo puede dejar de converger, a pesar de que para estas mismas alturas el método perturbativo sigue convergiendo cuando el medio es PPV. Por ejemplo, para el caso de una protuberancia sinusoidal de la forma $g(x) = \frac{h}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi}{a}x)] \text{rect}(x/a)$ con $h/a = 0.1$, $\lambda/a = 0.5$, $\theta_0 = 0^\circ$ y medio PPV, los resultados del método numérico directo coinciden con los resultados perturbativos en el orden 10, aunque no se obtiene convergencia cuando el medio es NPV.

IV. RESULTADOS

La distribución angular de la potencia dispersada en el medio 1 se obtiene como el flujo del vector de Poynting asociado al integrando del segundo término en la ec. (2),

$$\frac{dP^{(1)}}{d\alpha} = \frac{\text{Re}(\beta_\alpha^{(1)})}{\beta_0^{(1)}} |R(\alpha)|^2, \quad (27)$$

expresión que muestra que en la potencia dispersada sólo intervienen los valores de $R(\alpha)$ en la zona radiativa $|\alpha/k_0| < \nu_1$, es decir en la zona espectral donde el integrando de la ec. (2) representa ondas planas pro-

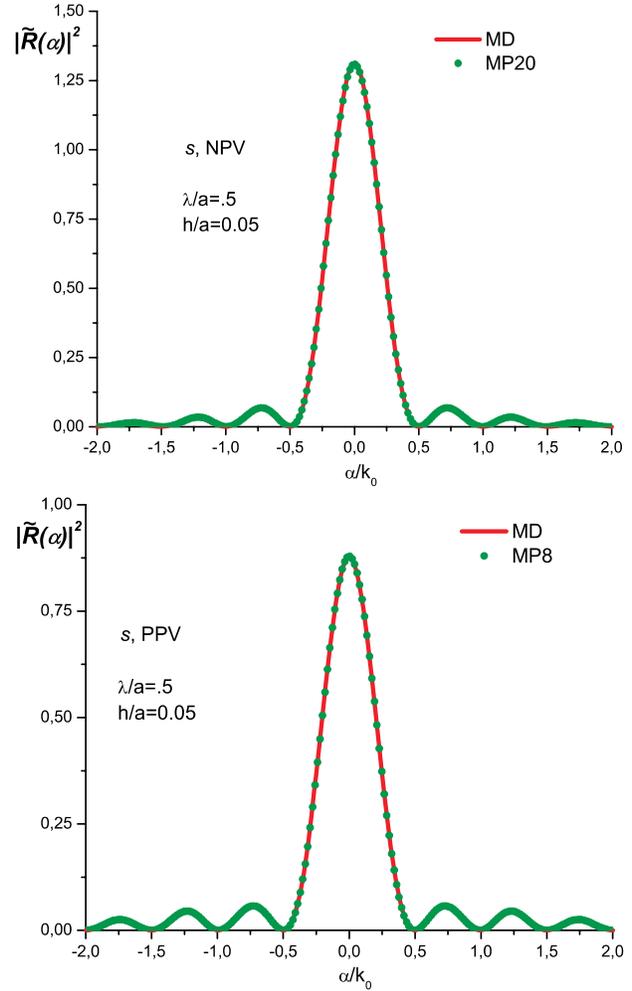


Figura 4: curvas de $|\tilde{R}(\alpha)|^2$ vs α/k_0 obtenidas con el método directo (curva continua) y el método perturbativo a primer orden (círculos) para el caso de una protuberancia rectangular de ancho a y altura $h/a = 0.05$ iluminada en incidencia normal ($\theta_0 = 0^\circ$) con polarización s . La longitud de onda es $\lambda/a = 0.5$. Los medios considerados son NPV (arriba) o PPV (abajo) con el mismo módulo del índice de refracción.

pagantes que se alejan de la superficie en una dirección que forma un ángulo de dispersión θ_{s1} , ($|\theta_{s1}| < \pi/2$), con el eje $+y$.

En la Figura 6 se comparan las distribuciones angulares de potencia reflejada correspondientes a una rugosidad cuando sólo se cambia el signo del índice de refracción del metamaterial. Los parámetros geométricos y de incidencia corresponden a los de las Figuras 2 y 3. Tal como se deduce de los resultados mostrados en las Figuras 2 y 3, cerca de la dirección especular las cuatro curvas (s PPV, s NPV, p PPV, p NPV) muestran esencialmente la misma respuesta y por este motivo se ha elegido una escala que amplifique las diferencias en regiones de observación $\theta_{s1} \neq \theta_0$. El

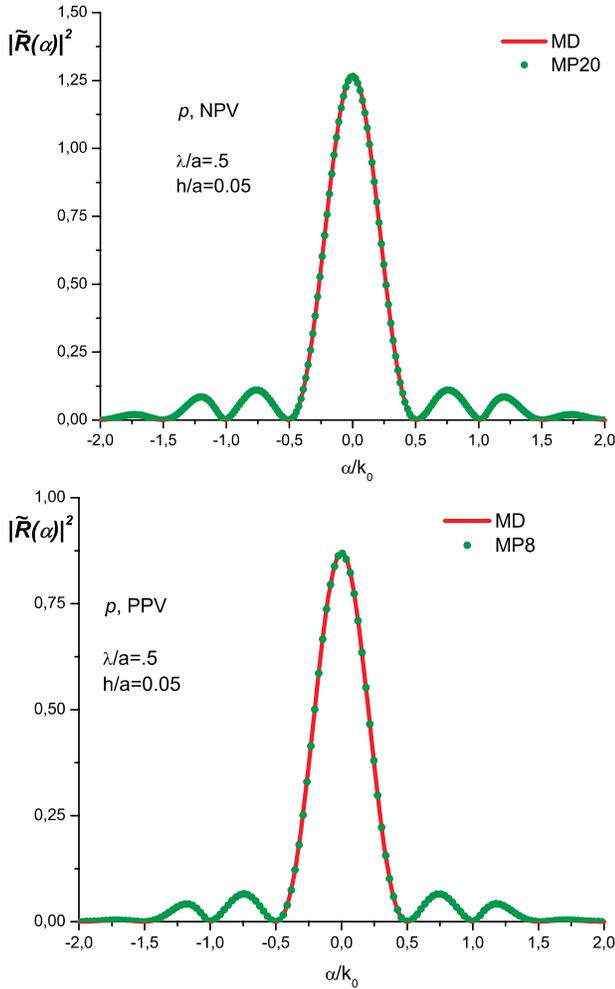


Figura 5: curvas de $|\tilde{R}(\alpha)|^2$ vs α/k_0 obtenidas con el método directo (curva continua) y el método perturbativo (círculos) para el caso de una protuberancia rectangular de ancho a y altura $h/a = 0.05$ iluminada en incidencia normal ($\theta_0 = 0^\circ$) con polarización p . La longitud de onda es $\lambda/a = 0.5$. Los medios considerados son NPV (arriba) o PPV (abajo) con el mismo módulo del índice de refracción.

primer orden perturbativo ya exhibe analíticamente la coincidencia de respuestas en la dirección especular, tal como puede comprobarse a partir de las expresiones (25). Desde un punto de vista físico, dicha coincidencia podría esperarse si se tiene en cuenta la baja altura considerada en este ejemplo y que para una superficie plana: i) las polarizaciones s y p son indistinguibles en incidencia normal y ii) el intercambio entre medios de refracción PPV y NPV cambia la fase pero no el módulo del coeficiente de Fresnel para las amplitudes del campo reflejado. Sin embargo, debe notarse que a pesar de la baja altura considerada, para direcciones de observación θ_{s1} alejadas de θ_0 , la distribución angular de potencia reflejada correspondiente a cada polarización incidente es sensible al cam-

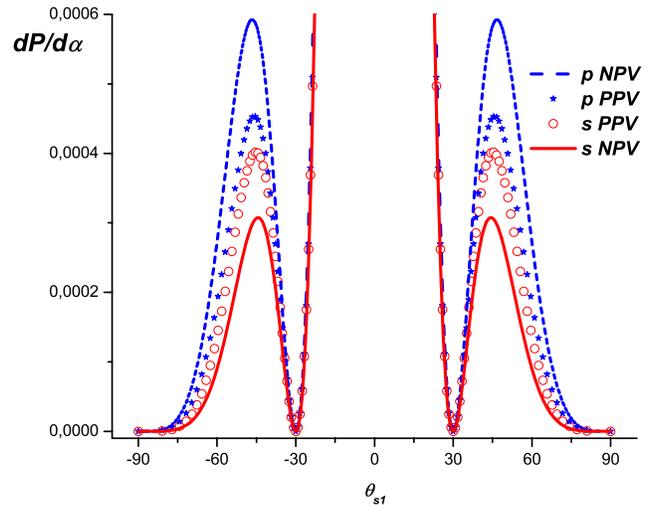


Figura 6: distribución angular de potencia dispersada en el medio 1. Los parámetros geométricos y de incidencia corresponden a los de las Figuras 2 y 3.

bio de signo del índice de refracción del metamaterial. Para otros valores del ángulo de incidencia se observan características similares a las observadas en incidencia normal: las distribuciones angulares de potencia reflejada correspondientes a una rugosidad de baja altura son poco sensibles al intercambio entre medios PPV - NPV si la dirección de observación está cerca de la dirección especular aunque sí son sensibles a este intercambio para direcciones de observación alejadas de la dirección especular, tal como se muestra en la Figura 7, análoga a la Figura 6 excepto que ahora $\theta_0 = 30^\circ$.

Cuando se aumenta la altura de la rugosidad, la potencia reflejada en direcciones de observación θ_{s1} cercanas a θ_0 se hace más sensible al intercambio entre medios PPV - NPV, tal como puede deducirse a partir de las curvas de $|\tilde{R}(\alpha)|^2$ vs α/k_0 mostradas en las Figuras 4 y 5. Para apreciar mejor las diferencias, en la Figura 8 se comparan las curvas de potencia reflejada en función del ángulo de observación θ_{s1} para incidencia normal (Figura 8a) e incidencia oblicua ($\theta_0 = 30^\circ$, Figura 8b) en el caso de una protuberancia rectangular con altura diez veces mayor que la considerada en las Figuras 6 y 7.

Las curvas mostradas en las Figuras 6, 7 y 8 son relevantes para aplicaciones de la óptica tradicional (o de campo lejano), donde se detecta la potencia reflejada en diferentes direcciones de observación. En dichas curvas está involucrado solamente el rango radiativo de la cantidad $\tilde{R}(\alpha)$, rango en el cual $\tilde{R}(\alpha)$ representa la amplitud de ondas planas propagantes. En cambio, para aplicaciones de óptica de campo cercano, el rango no radiativo puede jugar un papel muy

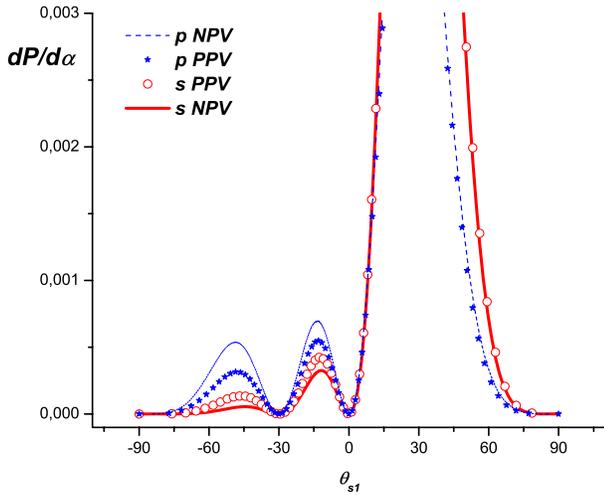


Figura 7: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 1. Los parámetros geométricos y de incidencia corresponden a los de la Figura 6, excepto que ahora $\theta_0 = 30^\circ$.

importante, ya que en este rango la cantidad $\tilde{R}(\alpha)$ representa ondas evanescentes que solamente afectan el valor de los campos muy cerca de la superficie. Como ejemplo final, en la Figura 9 se comparan las curvas de $|\tilde{R}(\alpha)|^2$ vs α/k_0 en el rango no radiativo para los mismos parámetros geométricos y de incidencia considerados en la Figura 8. Se puede apreciar que, a pesar de que la superficie es ópticamente cuasi-plana ($h/\lambda = 0.1$), los campos evanescentes generados son sensibles al cambio de signo del índice de refracción.

V. CONCLUSIONES

Hemos generalizado dos métodos de scattering electromagnético para superficies no periódicas, válidos para materiales no magnéticos, al caso de materiales con valores arbitrarios (positivos o negativos) de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica. Con esta generalización será posible encarar el estudio de problemas motivados por la reciente aparición de metamateriales con índice de refracción negativo. Hemos mostrado que, a pesar de requerir tratamientos numéricos muy distintos, los dos métodos presentados en este trabajo dan resultados coincidentes dentro de su rango de validez (el de la hipótesis de Rayleigh) y que dichos resultados están de acuerdo con las predicciones de la óptica física. Para ilustrar los cambios producidos en las propiedades dispersoras de una superficie rugosa cuando sólo se cambia el signo del índice de refracción del medio de transmisión, se ha considerado el caso de superficies cuasi-planas con una protuberancia localizada, postergando el estudio de superficies rugosas caracterizadas estadísticamente

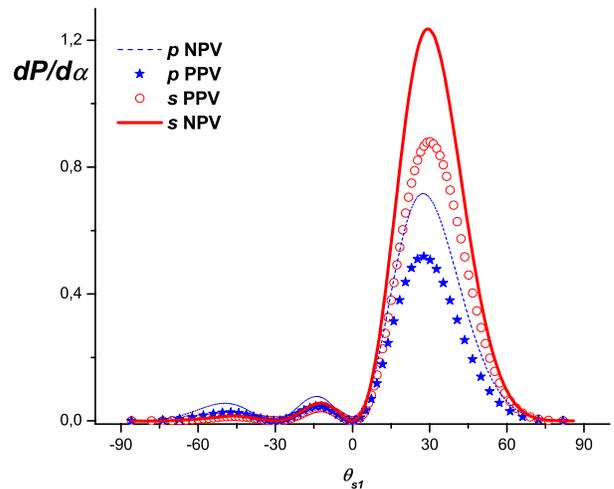
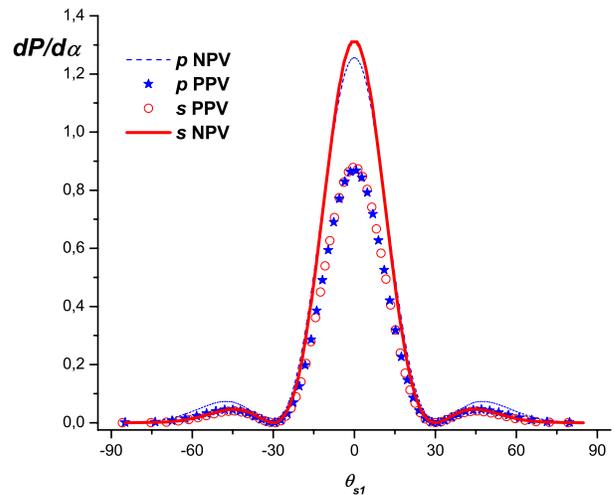


Figura 8: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 1 para una protuberancia rectangular de ancho a y altura $h/a = 0.05$ iluminada con polarizaciones s y p . La longitud de onda es $\lambda/a = 0.5$ y los medios considerados son NPV o PPV con el mismo módulo del índice de refracción. La Figura de arriba corresponde a incidencia normal ($\theta_0 = 0^\circ$) y la de abajo a incidencia oblicua ($\theta_0 = 30^\circ$).

para futuros estudios. Partiendo de una superficie perfectamente plana, cuya reflectividad es insensible a la transformación PPV - NPV del medio de refracción, hemos comprobado que cuando la dirección de observación está cerca de la dirección especular, la distribución angular de potencia reflejada correspondiente a una rugosidad de baja altura es poco sensible al intercambio entre medios PPV - NPV y que la sensibilidad a este intercambio aumenta cuando se incrementa la altura de la rugosidad. En cambio, cuando la

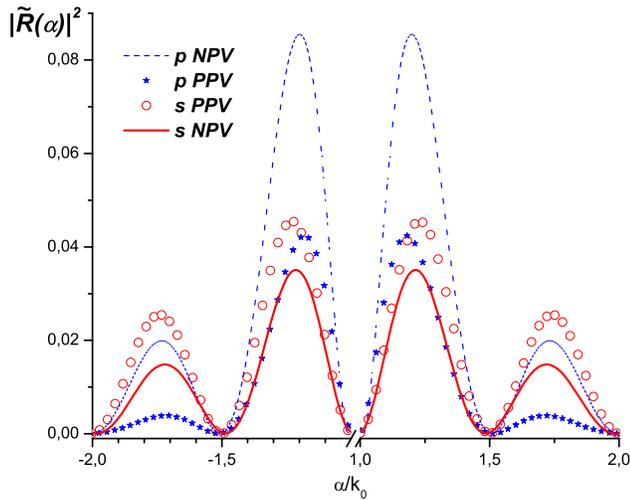


Figura 9: $|\tilde{R}(\alpha)|^2$ en función de α/k_0 en la zona no radiativa $|\alpha/k_0| > 1$. Los parámetros geométricos y de incidencia corresponden a los de las Figuras 4, 5 y 8.

dirección de observación está alejada de la dirección especular, la distribución angular de potencia reflejada resulta sensible al intercambio PPV - NPV aún para rugosidades muy pequeñas comparadas con la longitud de onda de la radiación incidente. También se ha comprobado la sensibilidad a este intercambio de los campos evanescentes generados en superficies quasi-planas iluminadas bajo las mismas condiciones de incidencia.

VI. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero brindado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, (CONICET), Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (PID 1728/OC-AR PICT-11-1785) y la Universidad de Buenos Aires (UBA).

- ¹ Sihvola, A. *Metamaterials in electromagnetics*, *Metamaterials* **1**, 2-11 (2007).
- ² Marqus, R., F. Martn and M. Sorolla, "Metamaterials with Negative Parameters: Theory, Design and Microwave Applications", Wiley (2008).
- ³ Solymar, L. and E. Shamonina, "Waves In Metamaterials", Oxford University Press, New York (2009).
- ⁴ Shelby, R.A., D.R. Smith, and S. Schultz, *Science* **292**, 77-79 (2001).
- ⁵ Veselago, V.G. *Soviet Physics Uspekhi*, **10**, 509-514 (1968).
- ⁶ Depine, R.A. and A. Lakhtakia, *Microwaves and optical Technology letters*, **41**, 315-316, (2004).
- ⁷ Lakhtakia, A. in "Beltrami Fields in Chiral Media", *World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics*, Vol 2, (1994).
- ⁸ McCall, M.W., A. Lakhtakia, and W.S. Weiglhofer, *Eur. J.Phys.*, **23**, 353, (2002).
- ⁹ Ruppin, R. and *J. Phys.*, *Condens. Matter* **16**, 5991-5998 (2004).
- ¹⁰ Ancey, S., Y. Décanini, A. Folacci, and P. Gabrielli, *Phys. Rev. B* **72**, 085458 (2005).
- ¹¹ Ancey, S., Y. Décanini, A. Folacci, and P. Gabrielli, *Phys. Rev. B* **76**, 195413 (2007).
- ¹² Ruppin, R. *Solid State Commun.* **116**, 411 (2000).
- ¹³ Depine, R.A. and A. Lakhtakia, *Opt. Commun.* **233**, 277-282 (2004).
- ¹⁴ Depine, R.A. and A. Lakhtakia, *Phys. Rev. E* **69**, 057602 (2004).
- ¹⁵ Depine, R.A. and A. Lakhtakia, *Optik* **116**, 31-43 (2005).
- ¹⁶ Depine, R.A., A. Lakhtakia, and D.R. Smith, *Physics Letters A* **337**, 155 (2005).
- ¹⁷ Depine, R.A. and A. Lakhtakia, *New Journal of Physics* **7**, 158 (2005).
- ¹⁸ Depine, R.A., M.E. Inchaussandague, and A. Lakhtakia, *Optics Communications* **258**, 90 (2006).
- ¹⁹ Leonhardt, U. *Science* **312**, 1777-1780 (2006).
- ²⁰ Pendry, J.B., D. Schurig, D.R. Smith, *Science* **312**, 1780-1782 (2006).
- ²¹ Pendry, J.B. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 39663969 (2000).
- ²² Henkel, C. and K. Joulain, *Europhys. Lett.* **72**, 929935 (2005).
- ²³ Cuevas, M. and R. A. Depine, *Physical Review B* **78**, 125412 (2008).
- ²⁴ Cuevas, M. and R. A. Depine, *Physical Review Letters* **103**, 097401 (2009).
- ²⁵ Driscoll, T. D.N. Basov, W.J. Padilla, J.J. Mock and D.R. Smith, *Physical Review B* **75**, 115114 (2007).
- ²⁶ Lakhtakia, A. *Microwave Opt. Technol. Lett.* **40**, 160-161 (2004).
- ²⁷ Rayleigh, L. *Proc. R. Soc. Lond, Ser. A*, **79**, 399-416 (1907).
- ²⁸ Lippmann, B.A. *J. Opt. Soc. Am.* **43**, 408 (1953).
- ²⁹ Kazandjian, L. *Phys. Rev. E* **54**, 6802-6815 (1996).
- ³⁰ Keller, J.B. *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 456-457 (2000).
- ³¹ Watanabe, T., Y. Choyal, K. Minami, and V.L. Granatstein, *Phys. Rev. E* **69**, 056606 (2004).
- ³² Elfouhaily, T. *Physical Review Letters* **97**, 120404, (2006).
- ³³ Prabasaj, P. *Optics Communications*, **278**, 204-206 (2007).
- ³⁴ Wauer, J. and T. Rother, *Optics Communications*, **282**, 339-350 (2009).
- ³⁵ Toigo, F., A. Marvin, V. Celli, and N.R. Hill, *Phys. Rev. B.* **15**, No.12, 5618-5626 (1977).

³⁶ Rice, S.O. Commun. Pure Appl. Math. **4**, 351-378 (1951).

³⁷ Born, M. and E. Wolf, "Principles of Optics" , 6th. ed., Pergamon Press, Oxford, (1980).

³⁸ Lester, M. and R.A. Depine, Optics Communications **127**, 189-192 (1996).