

Soluciones con tiempo de espera para flujos gaseosos isotérmicos en un medio poroso: I Soluciones numéricas

CARLOS A. PERAZZO[†], CLAUDIO L. M. VIGO[‡] Y JULIO GRATTON^{†*}

[†]INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS, FUNDACIÓN UNIVERSITARIA DR. RENÉ G. FAVALORO
SOLÍS 453, 1078 BUENOS AIRES - TEL-FAX: 381-0323

[‡]DEPARTAMENTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
PABELLÓN I, CIUDAD UNIVERSITARIA, 1428 BUENOS AIRES - TEL: 784-8104 - FAX: 787-2712
jgratton@tinfiplfp.uba.a

El flujo isotérmico unidimensional de un gas en un medio poroso satisface la ecuación de difusión no lineal $h_t = (h^m h_x)_x$, en la que h es proporcional a la presión y el exponente de no linealidad vale $m=1$. Se obtienen soluciones con tiempo de espera para un considerable rango de condiciones iniciales en las que el gas está confinado en una región acotada. En esas soluciones, la interfase gas-vacío (frente) permanece estacionaria durante un lapso finito de tiempo y no nulo t_w . Mediante un código numérico calculamos soluciones con tiempo de espera con condiciones iniciales de la forma $h(x \geq 0, 0) \propto x^p$, $h(x < 0, 0) = 0$ ($p > 2/m$). Determinamos $t_w(p)$ y otras propiedades de las soluciones.

The isothermal one-dimensional gas flow through a porous medium satisfies the non linear diffusion equation $h_t = (h^m h_x)_x$, where h is proportional to the pressure and the exponent of nonlinearity is $m=1$. Waiting time solutions are obtained for a wide range of initial conditions such that the gas is confined in a limited region. For these solutions, the gas-vacuum interface (front) stays in the same place for a finite and nonzero time t_w . Using a numerical code we calculate waiting time solutions with initial conditions of the form $h(x \geq 0, 0) \propto x^p$, $h(x < 0, 0) = 0$ ($p > 2/m$). We obtain $t_w(p)$ and others properties of the solutions.

Introducción

La ecuación de difusión no lineal

$$h_t = (h^m h_x)_x, \quad h = h(x, t) \geq 0, \quad m \geq 0 \quad (1)$$

presenta algunas peculiaridades. Una de estas es la de poseer soluciones con *frente*, en las que $h(x < x_f(t), t) > 0$ y $h(x > x_f(t), t) = 0$, y además si $t_1 < t_2$ entonces $x_f(t_1) \leq x_f(t_2)$, es decir que el frente nunca retrocede. Aún más notablemente, tiene *soluciones con tiempo de espera* (STE). En estas el frente permanece inmóvil durante un lapso finito t_w , mientras el perfil detrás del frente se modifica. Que una solución tenga o no tiempo de espera depende de las condiciones iniciales.

Kath y Cohen¹ mostraron, en el caso $m \ll 1$, que para perfiles de la forma x^p , hay tiempo de espera cuando $p \geq 2/m$. Posteriormente estos resultados fueron generalizados a todo m .

Otro aspecto importante de la ecuación (1) es la aparición, en algunas de sus soluciones, de un *corner layer*, una pequeña región Δx en la que hay fuertes variaciones de h_x . Para ver esto definimos $\eta = h^m$, $\tau = t/m$ tal que la ecuación (1) resulta

$$\eta_\tau = \eta_x^2 + m\eta\eta_{xx} \quad (2)$$

donde se puede notar que el fenómeno resulta de la combinación de un término de propagación no

* Autor a quien debe dirigirse la correspondencia.

lineal (η_x^2) y otro de difusión no lineal ($m\eta\eta_{xx}$). El primero tiende a generar discontinuidades de h_x (*corner shock*), que el término difusivo suaviza produciendo un *corner layer*.

El flujo isotérmico de un gas ideal en un medio poroso es descrito por la ecuación (1) con $m=1$ y $h=kP/M\mu$, donde k y M son la permeabilidad y la porosidad del medio y μ y P la viscosidad y presión del gas ³.

En el presente trabajo resolvemos por medios numéricos la ecuación (1) con $m=1$, para condiciones iniciales de la forma $h(x \geq 0, 0) \propto x^p$, $h(x < 0, 0) = 0$ ($p > 2/m$). Estudiamos los perfiles de h a diferentes tiempos, analizamos el proceso de formación del *corner layer* y su posterior evolución y obtenemos t_w como función de p .

Métodos

El problema a resolver es la ecuación (1) con $m=1$ y condiciones iniciales

$$h(x, t_i) = \begin{cases} Kx^p & \text{si } 0 < x \leq x_0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$K > 0$ y $t_i = -t_w$. De esta manera el frente comienza a desplazarse en $t=0$. En x_0 hay una pared aislante, tal que $h_x(x_0, t) = 0$. Definimos variables adimensionales $x' \equiv x/x_0$, $h' \equiv h/h_0$, y $t' \equiv t/t_0$, donde $t_0 \equiv x_0^2/h_0^m$, y h_0 es elegida tal que para todo p se verifique la condición $\int h'(x', t') dx' = 1$. En adelante, sin riesgo de confusiones, suprimiremos las primas. De esta manera las condiciones iniciales (3) resultan

$$h(x, t_i) = \begin{cases} (p+1)x^p & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

y la condición de contorno $h_x(1, t) = 0$.

El esquema numérico es implícito en diferencias finitas centradas, con una grilla no uniforme, para obtener mayor resolución en la zona del frente dado que es la que más nos interesa ⁴.

Resultados

El frente de las soluciones numéricas con $p < 2/m$ comienza a moverse inmediatamente, por lo que no interesan en este estudio. Las soluciones obtenidas con $p > 2/m$ tienen t_w no nulo.

En todas ellas se desarrolla un único *corner layer*. En las figuras 1 a 3 se muestra el comportamiento típico de una de estas soluciones.

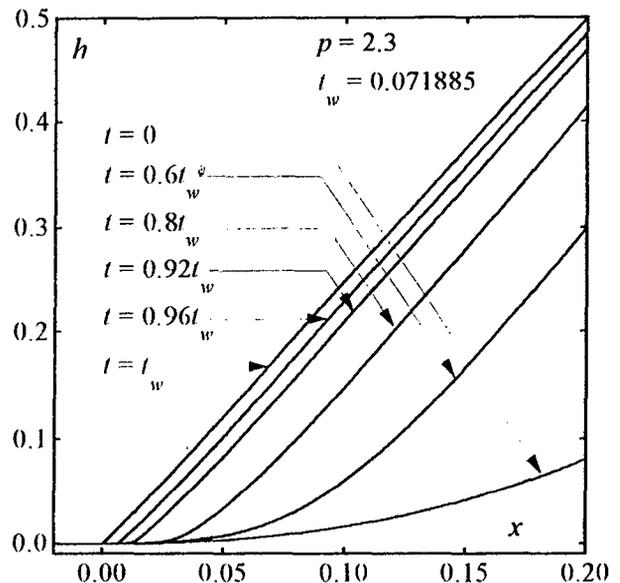


Figura 1. Perfiles de h para $p=2.3$ a distintos tiempos.

Tan pronto comienza el proceso, el perfil cambia y al cabo de un tiempo podemos reconocer dos dominios separados por un intervalo de transición móvil. Esta transición ocurre alrededor del punto donde h_{xx} alcanza su valor máximo. Cerca de la pared el perfil difiere marcadamente del inicial y $h_{xx} < 0$.

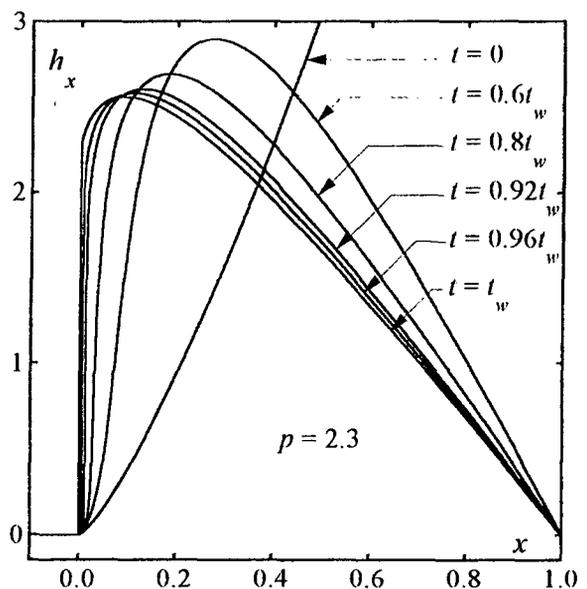


Figura 2. Perfiles de h_x para $p=2.3$ a distintos tiempos.

Cerca del frente que espera el perfil difiere muy poco de su forma inicial y $h_{xx} > 0$. La zona de transición se caracteriza por fuertes

variaciones de h_x y h_{xx} . A medida que se acerca al frente, se reduce su ancho, y el valor máximo de h_{xx} aumenta.

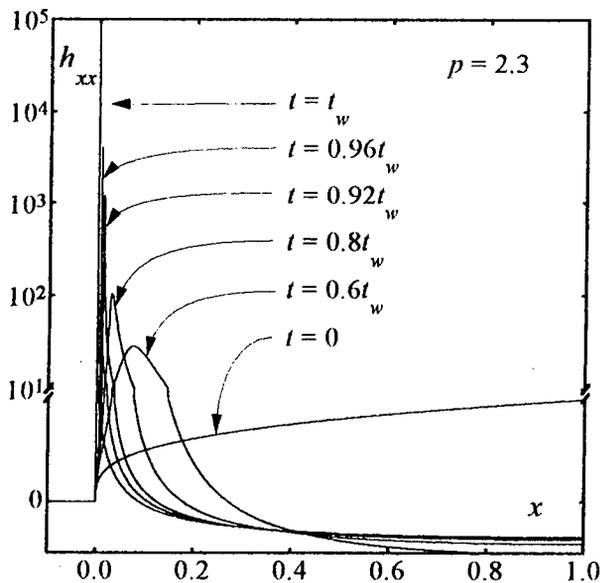


Figura 3. Perfiles de h_{xx} para $p=2.3$ a distintos tiempos.

Cerca del fin de la etapa de espera la zona de transición puede ser apropiadamente descrita como un *corner layer*. Mientras éste se mueve hacia el frente, se hace más angosto y más intenso, y se convierte en un *corner shock* precisamente al alcanzar al frente.

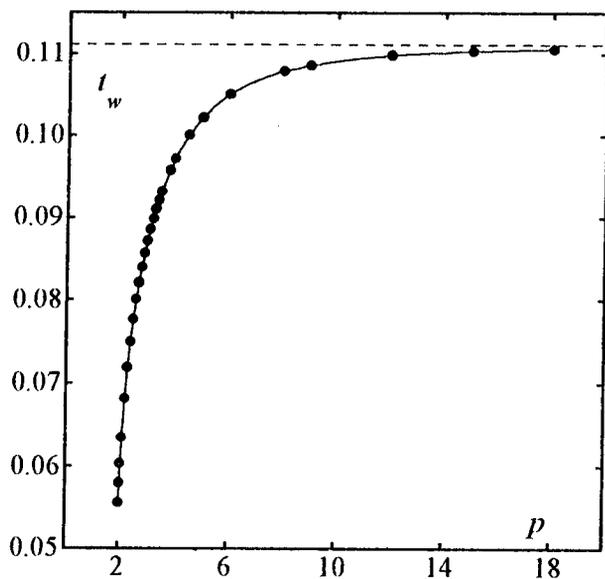


Figura 4. Dependencia de tiempo de espera t_w con las condiciones iniciales.

El proceso de formación del *corner layer*, desplazamiento hacia el frente y conversión en *corner shock* es gradual, y consiste en la pro-

gresiva formación de una delta de Dirac de h_{xx} en el frente que culmina en el momento del arranque.

En la figura 4 graficamos los valores numéricos de t_w . La línea punteada horizontal indica t_p , el tiempo que le toma al frente de una fuente puntual instantánea depositada en $x=1$ llegar hasta $x=0$ ⁵. En este caso $t_p=1/9$. El t_w es siempre menor que t_p , y salvo para valores de p próximos a 2, t_p es una buena estimación de t_w .

Conclusiones

La investigación numérica de la ecuación (1) con $m=1$ para condiciones iniciales de la forma x^p dio resultados en armonía con la teoría, y con los resultados numéricos del caso $m=3$ que corresponde al derrame de fluidos viscosos sobre una superficie rígida horizontal ⁶. Si $p < 2$ el arranque del frente es inmediato. Si $p \geq 2$, hay tiempo de espera. Durante esta etapa el perfil se distorsiona dando lugar a la formación de un *corner layer* móvil, que se intensifica a medida que se acerca al frente. En todos los casos las soluciones desarrollaron un solo *corner layer*. El arranque del frente ocurre cuando el *corner layer* llega al mismo. La solución de fuente puntual instantánea provee una buena estimación del tiempo de espera, excepto para valores de p próximos a 2.

Todos estos resultados están en concordancia con los obtenidos para $m=3$, y son la extensión natural de estos.

Referencias

- 1 Kath, W. L. y D. S. Cohen, *Stud. Appl. Math.*, **67**, 79-105. (1982).
- 2 Vazquez, J. L., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285**, 717-737 (1984).
- 3 Muskat, M., *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*, McGraw-Hill (1937).
- 4 Gratton, J. y C. L. M. Vigo, *Anales AFA* **8**, en prensa.
- 5 Pattle, R. E., *Q. J. Mech. Appl. Math.* **12**, 407-409 (1959).
- 6 Gratton, J. y C. L. M. Vigo, *European J. Appl. Math.*, en prensa.