

Efectos de acoplamiento viscoso-térmico en canales con paredes porosas

Sergio Ferro, Graciela Gnavi

Instituto de Física del Plasma (CONICET-FCEyN, UBA)
e-mail: sergio@tinifp.lfp.uba.ar graciela@tinifp.lfp.uba.ar

Se analizaron los efectos de la dependencia de la viscosidad con la temperatura, sobre el flujo en un canal plano con paredes porosas que están a dos temperaturas diferentes. Mediante algoritmos espectrales desarrollados a tal fin, se resolvió el sistema formado por la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de la energía, acopladas por el término viscoso. Se obtuvieron los perfiles de velocidades, temperaturas y presiones. Se presentan los diagramas de bifurcaciones para distintos valores del parámetro γ , que mide la sensibilidad de la viscosidad a variaciones de la temperatura. El análisis del comportamiento local de las bifurcaciones es complementado por estimaciones analíticas que se corresponden con los resultados numéricos. La resolución del problema de autovalores resultante de perturbar las soluciones encontradas, permitió analizar la estabilidad de las soluciones. Se hallaron los números de Reynolds para los cuales las soluciones estacionarias dejan de ser estables, para los distintos valores de γ , y también las regiones del plano R - γ donde se encuentran soluciones estacionarias y periódicas. Se resolvió la ecuación dependiente del tiempo para observar las soluciones periódicas, en aquellas regiones del plano R - γ en que el análisis de estabilidad revela su existencia.

The influence of temperature dependent viscosity on the flow along a channel with porous walls with different temperatures was analysed. Numerical schemes were developed to solve the Navier-Stokes equation and the energy equation, coupled through the viscosity. Bifurcation diagrams are presented. Local analysis of the behaviour of these bifurcations was performed. The stability of stationary solutions was studied by solving an eigenvalue equation. The parameter space was explored and the regions where different stationary and periodic solutions appear, are described. The periodic solutions obtained from the temperature-dependent problem are presented.

I. INTRODUCCIÓN

Se considera el flujo de un fluido viscoso e incompresible a lo largo de un canal plano, forzado por succión constante y uniforme a través de paredes porosas y rígidas que se hallan a distinta temperatura. Se supone que la longitud del canal es mucho mayor que su ancho y que la viscosidad es una función dada de la temperatura. Se desprecia la disipación térmica. Interesa conocer la distribución de velocidades, presiones y temperaturas, dentro del canal, como función de la posición y el tiempo. Para ello, se resuelve el sistema conformado por la ecuación de continuidad, la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de convección/difusión de la temperatura en ausencia de disipación. El problema es espacialmente bidimensional, pero admite una solución de similaridad en el límite de canal infinitamente largo. El problema del canal infinito en que la viscosidad no varía con la temperatura ha sido extensamente tratado en la literatura y ha sido tomado como punto de referencia. En este contexto se han puesto a prueba los códigos numéricos, a los que posteriormente se adicionó los efectos térmicos.

Como se mencionó anteriormente, el problema sin temperatura admite una solución de similaridad, que fue descubierta por Berman⁽¹⁾ en 1953 y que, desde entonces, ha sido estudiada por diversos autores. Los sucesivos trabajos de Sellars,⁽²⁾ Yuan,⁽³⁾ Proudman,⁽⁴⁾ Terril⁽⁵⁾ y Robinson⁽⁶⁾ establecieron la existencia de soluciones simétricas para todo número de Reynolds R , encontrándose tres soluciones por encima de cierto valor crítico de R . En 1988, Zaturka, Drazin y Banks⁽⁷⁾ demostraron que sólo una de estas

soluciones puede ser estable, si el número de Reynolds es suficientemente bajo y encontraron, a partir de la pérdida de estabilidad de esta solución simétrica, dos soluciones asimétricas estables. Para números de Reynolds mayores estas nuevas soluciones también pierden estabilidad en una bifurcación de Hopf, dando lugar a soluciones periódicas.

La dependencia de la viscosidad con la temperatura acopla la ecuación de Navier-Stokes con la ecuación de la energía. El sistema de ecuaciones a resolver está conformado por dos ecuaciones diferenciales ordinarias con dos incógnitas. Las ecuaciones son no lineales (una de orden cuatro y otra de orden dos) y tienen tres condiciones de contorno en cada pared. El problema depende ahora de dos parámetros adimensionales (que pueden ser R y el número de Péclet P) y de la forma funcional de la viscosidad con la temperatura. Se propondrá una dependencia exponencial decreciente, caracterizada por un único parámetro, de tal manera que el espacio de parámetros tiene dimensión tres. Este tipo de dependencia funcional fue utilizada previamente por otros autores como por ejemplo Wylie y Lister⁽⁸⁾ quienes sostienen que, si bien esta dependencia es una simplificación del problema real en que varios parámetros deben ser tomados en cuenta, la expresión utilizada rinde resultados que concuerdan satisfactoriamente con los experimentos para un amplio rango de valores de temperatura. La inclusión de la temperatura rompe con la simetría del problema, con lo cual no podrán extenderse las consideraciones de simetría esgrimidas en trabajos previos.

Las ecuaciones del problema se plantean en la sección

II. En la sección III se comentan los métodos numéricos. Los resultados se exponen en las secciones IV y V reservándose la sección VI para las conclusiones.

II. ECUACIONES BÁSICAS

Se tomó como origen de coordenadas al punto central del canal, con la coordenada x paralela a las paredes, y la coordenada y perpendicular a ellas (ver figura 1). El objetivo del trabajo es hallar las soluciones para los campos de velocidades, $\underline{u}(x, y, t)$, temperaturas $T(x, y, t)$ y presiones $p(x, y, t)$ y notar en qué medida los efectos térmicos influyen sobre dichas soluciones y su estabilidad. Los parámetros del problema serán: la distancia entre paredes, $2h$, la velocidad con que el fluido es succionado a través de las paredes, V , la temperatura a que se hallan las paredes, T_0 y $T_1 > T_0$, la densidad, ρ , la conductividad térmica, κ , y la viscosidad, $\mu(T) = \mu_0 \tilde{\mu}(T)$ (donde $\mu_0 = \mu(T_0)$ y $\tilde{\mu}(T)$ es una función dada de la temperatura). Tanto la conductividad térmica como la densidad se consideran independientes de la temperatura. Utilizando estos parámetros, definimos las siguientes variables adimensionales: $\tilde{x} = x/h$, $\tilde{y} = y/h$, $\tilde{t} = th/V$, $\tilde{u} = \underline{u}/V$, $\tilde{p} = p/(V^2 \rho)$, $\tilde{T} = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$.

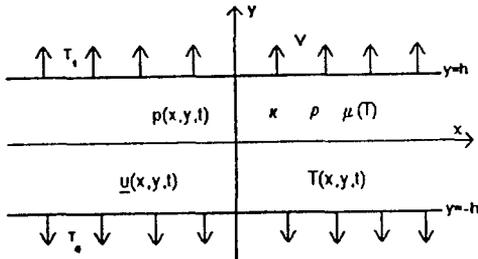


Figura 1: Esquema del canal

En términos de las variables adimensionalizadas (sin los tildes) el sistema a resolver es

$$\text{div}(\underline{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \text{grad}(\underline{u}) = -\text{grad}(p) + \frac{\text{div}(\mu \text{grad}(\underline{u}))}{R}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \text{grad}(T) = \frac{\text{div}(\text{grad}(T))}{P}, \quad (3)$$

donde se ha definido los números de Reynolds y de Péclet como $R \equiv Vh\rho/\mu_0$ y $P \equiv Vh\rho/\kappa$, respectivamente.

Proponiendo una solución de similitud de la forma

$$\underline{u}(x, y, t) = x \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \hat{x} - f(y, t) \hat{y}, \quad (4)$$

$$T(x, y, t) = \theta(y, t), \quad (5)$$

$$p(x, y, t) = \pi(y, t) + A(t)x^2/2, \quad (6)$$

se llega finalmente al siguiente sistema de ecuaciones para las funciones incógnitas $f(y, t)$ y $\theta(y, t)$,

$$R(ff''' - f'f'') + (\mu(\theta)f'')'' = R \frac{\partial f''}{\partial t}, \quad (7a)$$

$$Pf\theta' + \theta'' = P \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (7b)$$

donde $' \equiv \partial/\partial y$. Las condiciones de contorno del problema estarán dadas por: $f(1, t) = -1$, $f(-1, t) = 1$, $f'(1, t) = 0$, $f'(-1, t) = 0$, $\theta(-1, t) = 0$, $\theta(1, t) = 1$. Una vez resuelto el sistema se puede obtener el campo de presiones mediante las relaciones

$$\pi'(y, t) = -(f^2/2)' - (\mu f'/R)' + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (8)$$

$$A(t) = (ff'' - f'^2) + (\mu f'')'/R - \frac{\partial f'}{\partial t}. \quad (9)$$

III. MÉTODOS NUMÉRICOS

Problema dependiente del tiempo

Para la resolución del sistema de ecuaciones (7), se implementó un algoritmo basado en métodos espectrales, en el que las funciones incógnitas se expanden en la base formada por los polinomios de Chebyshev de primera especie. Se consideraron las funciones $f_N(y, t)$ y $\theta_N(y, t)$ definidas por las sumas parciales $f_N(y, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t)T_n(y)$ y $\theta_N(y, t) = \sum_{n=0}^N b_n(t)T_n(y)$, (donde los $T_n(y)$ son los polinomios de Chebyshev de grado n) y se hallaron los coeficientes $a_n(t)$ y $b_n(t)$ que mejor aproximan a las soluciones $f(y, t)$ y $\theta(y, t)$, para N y t dados, según el criterio de colocación. Se tomaron los puntos $y_k = \cos(k\pi/N)$, con $k = 0, \dots, N$, como puntos de colocación, por lo que los coeficientes $a_n(t)$ y $b_n(t)$ quedaron relacionados con el valor de la función en el punto de colocación, $f_k = f(y_k, t)$ y $\theta_k = \theta(y_k, t)$ mediante una transformada discreta de Chebyshev. Dado que, esencialmente, se trata de una transformada discreta de Fourier (coseno), se utilizó la transformada rápida de Fourier cada vez que se necesitó pasar de la representación espectral $(\underline{a}, \underline{b})$ a la espacial $(\underline{f}, \underline{\theta})$ y viceversa. Es sabido que dicho algoritmo permite realizar la transformación en sólo $O(N \log_2(N))$ operaciones.

Para resolver el problema dependiente del tiempo se implementó un código en FORTRAN que, partiendo de una condición inicial dada, hace avanzar a la solución en el tiempo mediante un algoritmo Runge-Kutta de cuarto orden. En cada instante de tiempo el código evalúa las derivadas espaciales en la representación espectral, donde los coeficientes del desarrollo de la derivada de una función se pueden calcular en base a los coeficientes de la función, mediante una regla de recurrencia. Por lo tanto la evaluación del miembro izquierdo de (7) se lleva a cabo de la siguiente forma: para un instante dado de tiempo se transforma la función a su representación espectral mediante la transformada rápida de Fourier, se deriva mediante la regla de recurrencia y se vuelve a la representación física antitransformando. Todo este proceso requiere sólo $O(N \log_2(N))$ operaciones. Especial cuidado debe tomarse en las paredes. Las condiciones de contorno deben ser impuestas explícitamente, ya que las ecuaciones de evolución no son válidas allí.

Problema estacionario

El problema estacionario fue resuelto integralmente en el espacio transformado. Para ello, se calculó la transformada de la viscosidad y se hizo uso de una expresión que relaciona los coeficientes del producto de dos funciones con los coeficientes de las propias funciones. De esta manera se obtuvo un sistema de $2N + 2$ ecuaciones para los coeficientes a_n y b_n . Sin embargo, los coeficientes tienen que satisfacer, simultáneamente, las seis ecuaciones que resultan de las condiciones de contorno. Una forma de subsanar esta sobredeterminación de los coeficientes es considerar lo que se conoce generalmente como método espectral-tau, que simplemente consiste en reemplazar las ecuaciones asociadas a los modos de más alta frecuencia por las ecuaciones del contorno. De esta forma, ciertos coeficientes están determinados por las condiciones de contorno y no por las ecuaciones de evolución. El método espectral-tau da resultados muy confiables, más allá de su fácil implementación.

Para resolver las ecuaciones se parte de un conjunto de coeficientes que se presume cercano a la solución buscada (típicamente, la solución en un punto cercano en el espacio de parámetros), se calculan los coeficientes de las derivadas y los coeficientes de la viscosidad, y se busca un nuevo conjunto de coeficientes que reduzca el residuo. Se utilizaron subrutinas de optimización de Matlab que minimizan el residuo en el sentido de cuadrados mínimos, mediante el método de Gauss-Newton.

Ecuaciones de autovalores

El problema de autovalores que se presenta al analizar la estabilidad temporal de las soluciones de similitud, también fue resuelto haciendo uso de las expansiones en la base de los polinomios de Chebyshev. El procedimiento fue introducido por Orzag⁽⁹⁾ en 1971 para resolver la ecuación de Orr-Sommerfeld.

Suponiendo que f_0 y θ_0 representan a las soluciones estacionarias y proponiendo soluciones de la forma $f_0 + f_s e^{st}$ y $\theta_0 + \theta_s e^{st}$, se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$R(f_0 f_s''' + f_0''' f_s - f_0' f_s'' - f_0'' f_s') + (\mu_0 f_s'' + \dot{\mu}_0 f_0'' \theta_s)'' = R s f_s'', \quad (10a)$$

$$P(f_0 \theta_s' + \theta_0' f_s) + \theta_s'' = P s \theta_s, \quad (10b)$$

donde las funciones $\mu_0(y)$ y $\dot{\mu}_0(y)$ denotan en forma abreviada $\mu(\theta_0(y))$ y $d\mu/d\theta(\theta = \theta_0(y))$, respectivamente. Las condiciones de contorno exigen que f_s , f_s' y θ_s' se anulen en $y = \pm 1$. Si a_n y b_n representan los coeficientes de la expansión de las autofunciones, las ecuaciones (10), transformadas, tomarán la forma

$$\sum_{m=0}^N A_{nm}^{(1,1)} a_m + A_{nm}^{(1,2)} b_m - s B_{nm}^{(1,1)} a_m = 0, \quad (11)$$

$$\sum_{m=0}^N A_{nm}^{(2,1)} a_m + A_{nm}^{(2,2)} b_m - s B_{nm}^{(2,2)} b_m = 0, \quad (12)$$

con $n = 0, \dots, N$. Para la construcción de los

coeficientes A_{nm} , se combinaron expresiones que relacionan los coeficientes de una función con los de su derivada y expresiones que relacionan los coeficientes del producto de dos funciones con los coeficientes de los factores. Al igual que en el problema estacionario, algunas ecuaciones son reemplazadas por ecuaciones que garanticen el cumplimiento de las condiciones de contorno. Construyendo un vector $v = (a_0, \dots, a_N, b_0, \dots, b_N)^T$, el problema se lleva a la clásica forma $Av = sBv$ del problema de autovalores generalizados, que puede ser resuelto con un conjunto de rutinas de álgebra lineal. En el cálculo de los resultados aquí presentados, se utilizó la subrutina de autovalores de Matlab.

IV. SOLUCIONES ESTACIONARIAS

Se propuso una dependencia exponencial de la viscosidad con la temperatura: $\mu(T) = \exp(-\gamma T)$. Esta expresión está caracterizada por un único parámetro adimensional, $\gamma > 0$, que indica cuan fuerte es la dependencia, $\gamma = \left| \frac{\partial \mu}{\partial T} / \mu \right|$. Con esta expresión el valor de la viscosidad entre una pared y otra varía de 1 a $\exp(-\gamma)$.

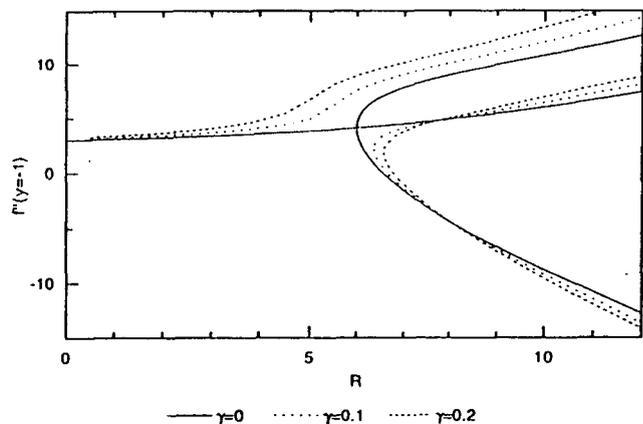


Figura 2: Diagrama de bifurcaciones

El límite $\gamma \rightarrow 0$, representa el problema simétrico, en que la viscosidad no depende de la temperatura. El diagrama de bifurcaciones para este flujo límite está caracterizado por una bifurcación tipo "pitchfork", en que la solución simétrica pierde estabilidad y bifurca en dos soluciones asimétricas estables.⁽⁹⁾ Tomando $P = 1$ y valores pequeños para γ , se pudo observar cómo la ruptura de la simetría ocasiona la desaparición de esta bifurcación y la consiguiente aparición de una bifurcación tipo "saddle-node". Esto se puede apreciar en la figura 2, donde se ha realizado el diagrama de bifurcaciones para tres valores distintos de γ : $\gamma = 0$, $\gamma = 0.1$ y $\gamma = 0.2$. Cada solución estacionaria se halla representada en este diagrama por el valor $f''(y = 1)$, que es proporcional al esfuerzo viscoso sobre una de las paredes. Una de las ramas está definida para todo valor de R y tiende, en el límite $\gamma \rightarrow 0$, hacia la rama simétrica estable del problema sin temperatura, prolongada en una de las ramas asimétricas.

A estas soluciones las llamaremos de tipo I. De la misma forma, las dos ramas que se generan en $R = R_s(\gamma)$ tienden (siempre en el límite $\gamma \rightarrow 0$) hacia sendas soluciones del problema sin temperatura. Llamaremos soluciones de tipo II a las que tienden a la solución simétrica inestable y de tipo III a las que tienden a la solución asimétrica.

Estimaciones analíticas

Para un determinado valor de γ , se consideraron las soluciones estacionarias, f_0 y θ_0 , con R en un entorno de $R = R_s(\gamma)$. Definiendo $\varepsilon = R - R_s$, se propuso una solución de la forma

$$f_0(R) = f_0(R_s) + \varepsilon^{1/2} f_{1/2} + \varepsilon f_1 + \dots, \quad (13)$$

$$\theta_0(R) = \theta_0(R_s) + \varepsilon^{1/2} \theta_{1/2} + \varepsilon \theta_1 + \dots, \quad (14)$$

para las ecuaciones (7), en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$. Reemplazando en (7) e igualando los coeficientes de los términos con idéntica potencia en ε , se obtiene

$$L(f_{1/2}, \theta_{1/2}) = 0, \quad (15)$$

$$L(f_1, \theta_1) = r(f_{1/2}, \theta_{1/2}), \quad (16)$$

donde los operadores $L = (L_1, L_2)$ y $r = (r_1, r_2)$ están definidos en términos de $f_0 \equiv f_0(R_s, y)$ y $\theta_0 \equiv \theta_0(R_s, y)$

$$L_1(g, h) = (\mu_0 g'' + \dot{\mu}_0 f_0'' h)'' + R_s (f_0 g'''' + f_0''' g - f_0' g'' - f_0'' g'), \quad (17)$$

$$L_2(g, h) = P(f_0 h' + \theta_0' g) + h'', \quad (18)$$

$$r_1(g, h) = f_0 f_0''' - f_0' f_0'' + R_s (g g'''' + g'' g') + (\dot{\mu}_0 g'' h)'', \quad (19)$$

$$r_2(g, h) = P g h'. \quad (20)$$

El sistema se completa con condiciones de contorno homogéneas para $f_{1/2}$, $\theta_{1/2}$, f_1 , θ_1 y f_1' , en ambas paredes. Comparando las expresiones (15) con las ecuaciones de autovalores (10), se concluye que las funciones $f_{1/2}$ y $\theta_{1/2}$ son proporcionales a las autofunciones de autovalor nulo de la solución estacionaria con $R = R_s$. Llamaremos f_s y θ_s a dichas autofunciones (con alguna normalización) y α a la constante de proporcionalidad.

Para que la ecuación (16) sea resoluble, es necesario que la inhomogeneidad r y la solución del sistema homogéneo adjunto $(f^\dagger, \theta^\dagger)$ satisfagan cierta regla de ortogonalidad. Si se definen los operadores $L^\dagger = (L_1^\dagger, L_2^\dagger)$ y J mediante

$$L_1^\dagger(g, h) = R_s (-f_0 g'''' + f_0''' g - (f_0' g)'' + (f_0'' g)') + (\mu_0 g''')'' + \dot{\mu}_0 f_0'' h'' \quad (21)$$

$$L_2^\dagger(g, h) = -P(f_0 h)' + P \theta_0' g + h'', \quad (22)$$

$$J(u, v, g, h) = (\mu_0 u''')' g - \mu_0 u'' g' + \mu_0 u' g'' - (\mu_0 g''')' u + R_s (f_0 g u'' - f_0' g' u' + (f_0 g)'' u - 2 f_0' g u' + f_0' g' u) + (\dot{\mu}_0 f_0'')' u h + \dot{\mu}_0 f_0'' (h' u - u' h) + P f_0 h v + h' v - h v', \quad (23)$$

y si $L^\dagger(f^\dagger, \theta^\dagger) = 0$ con $f^\dagger = \theta^\dagger = f^{\dagger'} = 0$ sobre las paredes, la condición de existencia de solución

se escribirá⁽¹⁹⁾

$$J(\alpha f_s, \alpha \theta_s, f^\dagger, \theta^\dagger)_{-1}^1 = \int_{-1}^1 \{r_1(\alpha f_s, \alpha \theta_s) f^\dagger + r_2(\alpha f_s, \alpha \theta_s) \theta^\dagger\} dy. \quad (24)$$

Dado que la función $J(\alpha f_s, \alpha \theta_s, f^\dagger, \theta^\dagger)$ se anula en las paredes, se obtiene la siguiente ecuación para α

$$\int_{-1}^1 \{(f_0 f_0''' - f_0' f_0'') f^\dagger + \alpha^2 R_s (f_s f_s''' + f_s'' f_s') + (\dot{\mu}_0 f_s'' \theta_s)''\} f^\dagger + \alpha^2 P f_s \theta_s' \theta^\dagger dy = 0. \quad (25)$$

Las dos raíces de α denotan las dos soluciones existentes para $R \gtrsim R_s$.

Es decir que, para valores de γ y P dados, la estimación de la solución en un entorno de una bifurcación "saddle-node" se reduce al cálculo de α . Para ello, además de encontrar la solución de equilibrio y su primera autofunción, hay que resolver el problema adjunto y calcular las integrales que aparecen en la expresión (25). El problema adjunto fue resuelto hallando las funciones incógnitas f^\dagger y θ^\dagger como las autofunciones de autovalor nulo del operador L^\dagger . Las integrales se calcularon numéricamente. Por ejemplo, para el caso $\gamma = 0.1$, $P = 1$ e imponiendo $f_s''(1) = 1$ como normalización, se obtuvo $\alpha = 3.303$. En la figura 3 se compara el diagrama de bifurcaciones realizado mediante estas estimaciones con resultados obtenidos por integración numérica.

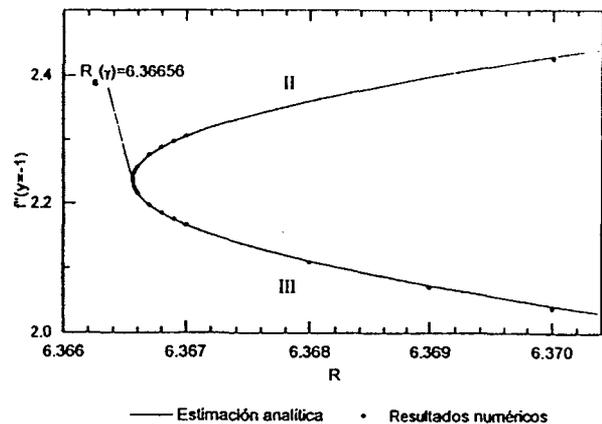


Figura 3: Comparación de resultados numéricos y analíticos

Estabilidad

La estabilidad temporal de las soluciones se estudió resolviendo la ecuación (10). Una solución será estable si no posee autovalores de parte real positiva. Se sabe que en el límite $\gamma \rightarrow 0$, la solución II es inestable para todo $R > R_s(\gamma)$, y las soluciones I y III son estables si $R < R_H = 12.963$. Para este valor del número de Reynolds, ambas soluciones pierden su estabilidad en una bifurcación de Hopf, dando lugar a soluciones periódicas. Si tomamos $\gamma \neq 0$, los cálculos realizados muestran que la solución II permanece estable y que la pérdida de estabilidad de

la soluciones I y III también tiene lugar a través de una bifurcación de Hopf, sólo que el valor crítico de R será distinto para cada rama y para cada valor de γ . Quedan definidas entonces dos funciones $R_I(\gamma)$ y $R_{III}(\gamma)$, que señalan dichos valores del número de Reynolds, para ambos tipos de soluciones. La dependencia de estas funciones con γ indica la sensibilidad de la estabilidad de una solución ante la presencia de gradientes de temperatura. Ambas funciones son decrecientes: cuanto más fuerte es la dependencia de la viscosidad con la temperatura, menor es el valor de R para el cual una determinada rama pierde estabilidad. Por ejemplo, para $\gamma = 0.3$, la solución de tipo I deja de ser estable para $R = 9.989$, que es bastante menor a R_H . Es interesante notar que la otra rama (solución de tipo III) permanece estable hasta $R = 12.428$. Las curvas $R_I(\gamma)$ y $R_{III}(\gamma)$, junto con $R_s(\gamma)$, dividen al plano $R-\gamma$ en cuatro regiones, cada una de las cuales está caracterizada por el número de soluciones estables existentes y su carácter (estacionaria o periódica), tal como se puede apreciar en la figura 4.

$2\pi / \text{Im}(s) = 6.23$. Las figuras 6 muestran estos resultados.

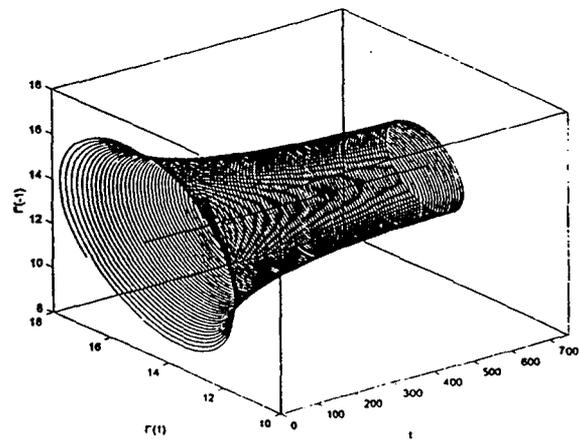
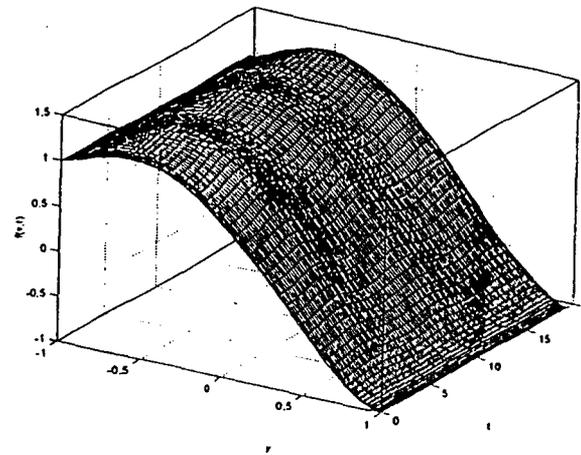


Figura 5: Solución periódica y diagrama de fase para $\gamma = 0.3, R = 10$

VI. CONCLUSIONES

La resolución eficiente de los sistemas de ecuaciones (7) y (10) ha permitido explorar el problema planteado en una amplia región del espacio de parámetros. La eficacia de los códigos radica en la rápida convergencia de las expansiones en la base formada por los polinomios de Chebyshev y la buena resolución de éstos cerca de los contornos. Prueba de ello es que, para $R \approx 10$, se han obtenido resultados aceptables para el problema estacionario con sólo 17 puntos de colocación. Los resultados aquí presentados se obtuvieron tomando 33 puntos en el caso estacionario y 65 puntos para el problema de autovalores y el problema dependiente del tiempo. Los resultados obtenidos con los distintos códigos se mostraron consistentes entre sí, además de ser consistentes con las soluciones conocidas en el límite $\gamma \rightarrow 0$ y con las estimaciones analíticas comentadas en la sección IV.

Para el problema desacoplado ($\gamma = 0$) el diagrama de bifurcaciones presenta una bifurcación "pitchfork" propia de problemas simétricos. Existe una solución simétrica que pierde la estabilidad en dicha bifurcación y dos ramas asimétricas que son imágenes especulares una de la otra respecto del eje $y = 0$. Esta bifurcación desaparece al

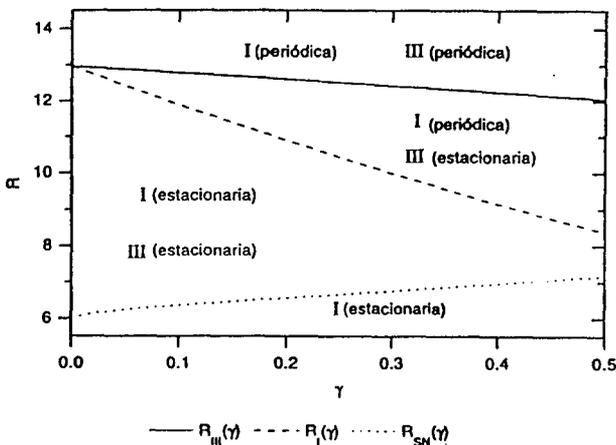


Figura 4: Valores críticos de R

V. SOLUCIONES PERIÓDICAS

Como se dijo en la sección anterior, la existencia del gradiente térmico actuando sobre una viscosidad que depende de la temperatura genera la aparición de soluciones periódicas para valores de R tanto más chicos cuanto más fuerte es dicha dependencia (mayor γ). En las figuras 5 se presentan las funciones de $f(y, t)$ y $\theta(y, t)$ y el diagrama de fase para el caso $\gamma = 0.3$ y $R = 10$. Dado que $R \gtrsim R_I(\gamma)$, las soluciones presentan oscilaciones temporales periódicas de pequeña amplitud y frecuencia angular cercana a la parte imaginaria del autovalor s cuya parte real se anula en $R_I(\gamma)$. Efectivamente, los resultados numéricos revelan un periodo de oscilación de 7.37, mientras que $2\pi / \text{Im}(s) = 7.33$. El carácter periódico de las soluciones se manifiesta claramente en el ciclo límite que se observa en el espacio de fases.

Se repitieron los cálculos, para $\gamma = 1$ y $R = 5.45 \gtrsim R_I(\gamma) \approx 5.42$. En este caso el periodo se ha reducido a 6.30, que se compara aceptablemente con el valor

tomar $\gamma \neq 0$: los efectos térmicos rompen la simetría del flujo. El diagrama aparece ahora inconexo: existe una rama de soluciones por un lado (soluciones de tipo I) y dos ramas que se generan en R_0 en una bifurcación "saddle-node" por otro (II y III).

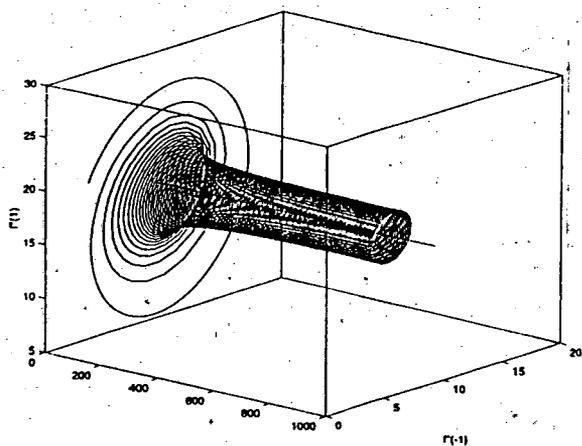
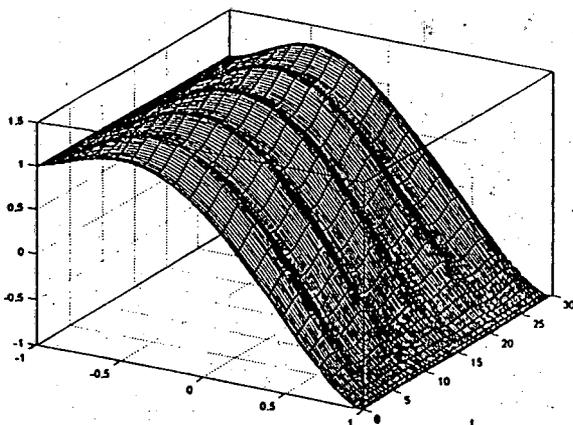


Figura 6. Solución periódica y diagrama de fase para $\gamma = 1, R = 5.45$

Al aplicar el gradiente de temperatura, los puntos de estancamiento de la solución simétrica estable y de las soluciones asimétricas estables se desplazan hacia la pared más caliente (zona de menor viscosidad), mientras que el de la solución simétrica inestable se corre hacia la pared más fría. Por otra parte, las soluciones se vuelven menos estables, en el sentido de que pierden estabilidad para números de Reynolds menores. Sin embargo los dos tipos de soluciones estables (I y III) tienen respuesta distinta ante la aplicación de este gradiente térmico. La solución de tipo I, cuyo punto de estancamiento se halla más cerca de la pared caliente, ha probado ser más sensible a los efectos térmicos que la otra de tipo III.

Los dos primeros autovalores de las soluciones estacionarias estables son complejos conjugados a partir de cierto valor del número de Reynolds. Cuando la parte real de éstos autovalores se anula, las soluciones pierden estabilidad en una bifurcación de Hopf, originándose soluciones periódicas estables. La existencia de estas soluciones fue verificada mediante la resolución directa de las ecuaciones dependientes del tiempo.

Referencias

- 1- Berman, A. S., J. Appl. Phys. 24, 1232-1235 (1953).
- 2- Sellars, J. R., J. Appl. Phys. 26, 489-490 (1955).
- 3- Yuan, S. W., J. Appl. Phys. 27, 267-269 (1956).
- 4- Proudman, I., Fluid. Mech. 9, 593-602 (1960).
- 5- Terrill, R.M., Aeronaut. Quart. 15 299-310 (1964).
- 6- Robinson, W. A., J. Eng. Math. 10, 23-40 (1976).
- 7- Zatorska, M. B., Drazin, P.G. and Banks, Fluid Dyn. Res. 4, 151-178 (1988).
- 8- Wylie, J. J. and Lister, J. R. J., Fluid Mech. 305
- 9- Orzag, S. A., J. Fluid Mech. 50, 689-703 (1971).
- 10- Dunford, N., Schwartz, J. T., *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience Publ., New York (1957).