

# HELICIDAD Y ENERGÍA MAGNÉTICA EN LA EVOLUCIÓN TEMPORAL DE PLASMAS CONDUCTORES LEVEMENTE RESISTIVOS

A. M. Platzeck\* and C. A. Paola

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas Paseo del Bosque s/n (1900) La Plata  
e-mail: amp@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar

El teorema de Woltjer fue originalmente demostrado suponiendo que la superficie límite es rígida y encierra un volumen simplemente conexo, a la vez que el potencial vector es continuo sobre dicha superficie. Nosotros encontramos que la condición de sistema cerrado impuesta de este modo conduce a que la única solución force-free para el campo magnético es la trivialmente nula, que sólo podría ser compatible con una helicidad magnética nula. Sin embargo, no existe ninguna restricción para el estado inicial en lo referente a la helicidad magnética, con lo cual surge una paradoja que requiere un análisis más cuidadoso de la evolución temporal. En esta comunicación ensayamos una respuesta a esta paradoja basada en el colapso topológico de las líneas de inducción, alterando la condición de congelamiento en algunas etapas de la evolución temporal. Para ello desarrollamos una visualización del espacio funcional que incluye las diferentes configuraciones del campo magnético, poniendo de manifiesto la estructura que imponen las restricciones topológicas.

In the original proof of Woltjer's theorem was supposed a simple connected volume surface and a continuous vector potential on the boundary. We find that the unique force-free solution compatible with this closed system condition is the identically null, implying zero magnetic helicity. Nevertheless, the initial magnetic helicity can be selected arbitrarily. This paradox requires a careful analysis of the temporal evolution. We propose an answer based on the breaking of the topological structures relaxing the frozen condition in some steps of the evolution. We developed a picture of the magnetic field configuration space, showing the boundary structure imposed by the topological constraints.

## I. INTRODUCCIÓN

El teorema de Woltjer<sup>(1),(2)</sup> expresa que en un plasma conductor perfecto que ocupa un volumen  $V$  y que constituye un sistema cerrado limitado por una superficie  $S$ , la helicidad magnética  $K$  es un invariante temporal

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int (\vec{A} \cdot \vec{B}) dv = 0 ; \quad (1)$$

por otra parte, la energía magnética mínima del sistema, compatible con la helicidad magnética  $K$ , se dará para un estado force-free lineal (alfa constante),

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \alpha \vec{B} \quad (2)$$

Este teorema fue originalmente demostrado suponiendo que la superficie límite es rígida y encierra un volumen simplemente conexo, a la vez que el potencial vector es continuo e invariante en el tiempo sobre dicha superficie. Un análisis cuidadoso nos permite visualizar las fuertes restricciones que subyacen en esta definición del

sistema (sección II). Tanto es así que probablemente no exista un soporte físico capaz de garantizar las mencionadas condiciones. Además, nosotros encontramos que el único campo force-free lineal compatible con las mismas es el trivialmente nulo (sección III). De este modo, el estado final que predice el teorema de Woltjer debiera presentar helicidad nula, en contraposición con las condiciones iniciales. La paradoja se completa mostrando que la helicidad magnética del estado inicial puede elegirse efectivamente en forma arbitraria (sección IV).

En esta comunicación ensayamos una respuesta a esta paradoja basada en el colapso topológico de las líneas de inducción, alterando la condición de congelamiento en algunas etapas de la evolución temporal. Para ello desarrollamos una visualización del espacio funcional que incluye las diferentes configuraciones del campo magnético, poniendo de manifiesto la estructura que imponen las restricciones topológicas (secciones V, VI y VII).

## II. NOTA SOBRE SISTEMAS CERRADOS

En los desarrollos de este trabajo tendremos en cuenta que la helicidad magnética en un plasma conductor perfecto es invariante ante transformaciones de gauge, siempre que los potenciales de transformación permanezcan univaluados y los límites del sistema constituyan superficies magnéticas. Así, sin pérdida de generalidad elegimos el gauge en el cual se satisface que

$$\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t \quad (3)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4)$$

Entendemos por sistema cerrado (o aislado) a todo sistema que no intercambia materia ni carga eléctrica con el medio exterior, a la vez que no es afectado por campos externos y los campos con fuentes en su interior no influyen fuera de sus límites. Por otra parte, tampoco interactúan a través de efectos de contacto ya sea térmica o mecánicamente. En lo que sigue nos proponemos caracterizar las condiciones de frontera que deben satisfacer los campos  $\vec{E}(\vec{r}_s, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}_s, t)$  y el potencial vector  $\vec{A}(\vec{r}_s, t)$  en la superficie límite de un sistema cerrado constituido únicamente por un plasma conductor casi perfecto (conductividad  $\sigma$  muy grande aunque no infinita). Utilizaremos el supraíndice "e" para indicar los campos de la región exterior y el supraíndice "i" para los campos de la región interior (ambos debidos a fuentes internas), mientras  $\vec{r}_s$  denotará los puntos de la superficie límite.

La imposibilidad de interacción mecánica con el medio exterior mediante fuerzas de contacto hace necesaria la definición de una superficie límite rígida. Así la velocidad del plasma en la superficie límite debe ser tangente a la misma.

$$\vec{v}_\perp^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (5)$$

Por su parte, la anulación de los campos eléctrico y magnético (debidos a fuentes interiores) en la región externa, condicionan el potencial vector exterior  $\vec{A}^e(\vec{r}, t)$  de acuerdo con

$$\vec{E}^e(\vec{r}, t) = -\frac{\partial\vec{A}^e}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$\vec{B}^e(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}^e = 0, \quad (7)$$

donde se ha utilizado el gauge propuesto en (3) y (4). Las condiciones de contorno habituales para el campo electromagnético y las relaciones (6) y

(7) conducen a

$$\vec{E}_\parallel^i(\vec{r}_s, t) = 0, \quad (8)$$

$$\vec{B}_\perp^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (9)$$

Utilizando las condiciones (5), (8) y (9) podemos escribir la densidad de corriente  $\vec{J}^i(\vec{r}_s, t)$ , para el plasma, sobre la superficie como sigue

$$\begin{aligned} \vec{J}^i &= \sigma(\vec{E}^i + \vec{v}^i \times \vec{B}^i) \\ \vec{J}^i &= \sigma(\vec{E}_\perp^i + \vec{v}_\parallel^i \times \vec{B}_\parallel^i) = \vec{J}_\perp^i, \end{aligned} \quad (10)$$

de donde se concluye que

$$\vec{J}_\parallel^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (11)$$

La condición de sistema cerrado impide que existan corrientes que atraviesen la superficie, mientras que la neutralidad del plasma no admite puntos de acumulación de carga. En consecuencia podemos incluir también

$$\vec{J}_\perp^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (12)$$

La condición (11) exige la continuidad de la componente tangencial de la inducción magnética  $\vec{B}$ , y por lo tanto tenemos que

$$\vec{B}_\parallel^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (13)$$

Reemplazando este resultado y la condición (12) en (10) concluimos que

$$\vec{E}_\perp^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (14)$$

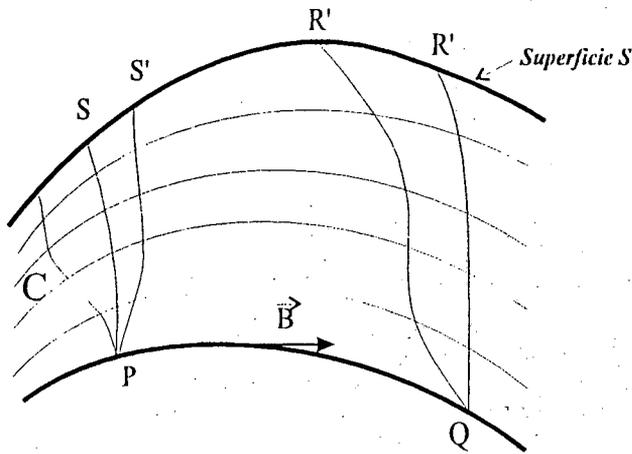
Combinando las condiciones (3), (8) y (14) obtenemos que

$$\frac{\partial\vec{A}^i(\vec{r}_s, t)}{\partial t} = 0; \quad (15)$$

además, dado que el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}_s, t)$  es continuo sobre la superficie (condición garantizada por (6), (8) y (14)) y que la inducción magnética  $\vec{B}(\vec{r}_s, t)$  es finita a ambos lados de la misma, concluimos que el potencial vector  $\vec{A}(\vec{r}_s, t)$  debe ser continuo en la superficie

$$\vec{A}^i(\vec{r}_s, t) = \vec{A}^e(\vec{r}_s, t). \quad (16)$$

Nótese que la condición impuesta acerca de la conductividad en este tratamiento no invalida el caso límite de conductividad infinita, si no que por el contrario permite visualizar el modo correcto de realizar el paso al límite. De este modo, todos los



resultados obtenidos en esta sección son válidos en plasmas conductores perfectos.

### III. CAMPOS FORCE-FREE LINEALES EN SISTEMAS CERRADOS

En esta sección analizaremos la compatibilidad entre las condiciones de frontera que caracterizan a un sistema cerrado y la estructura de campo force-free con  $\alpha$  constante, presentada por el estado de energía magnética mínima de acuerdo con el teorema de Woltjer. Según se ha probado en la nota sobre sistemas cerrados, la inducción magnética  $\vec{B}$  en la superficie límite debe ser nula.

$$\vec{B}(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (17)$$

Consideremos una curva cerrada PQRS construida mediante el siguiente mecanismo (ver figura):

- a) Elegimos arbitrariamente un tramo de curva sobre una línea de inducción magnética identificando sus extremos como P y Q.
- b) Tomamos cualquier curva simple C con extremos en el punto P y en la superficie límite del sistema. Luego construimos una superficie  $\Sigma$  formada por todas las líneas de inducción que tienen algún punto en común con dicha curva.
- c) Ahora construimos dos curvas unívocamente determinadas sobre la superficie  $\Sigma$  que pasan respectivamente por los puntos P y Q y son perpendiculares a las líneas de inducción sobre  $\Sigma$ . Llamamos a sus extremos sobre la superficie exterior S y R respectivamente.
- d) Finalmente elegimos el tramo RS como la traza de la superficie  $\Sigma$  sobre la superficie exterior.

Por la forma en que fueron elegidos los tramos QR, RS y SP, la circulación de  $\vec{B}$  sobre la curva cerrada PQRS satisface que

$$\oint_{PQRS} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{PQ} \vec{B} \cdot d\vec{l}. \quad (18)$$

Por otra parte, dado que el estado de energía mínima es force-free con  $\alpha$  constante, la ley de Ampère conduce a

$$\oint_{PQRS} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \int_{\Sigma'} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \alpha \int_{\Sigma'} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (19)$$

donde  $\Sigma'$  es la porción de la superficie  $\Sigma$  limitada por la curva PQRS. Por la forma en que fue elegida  $\Sigma$ ,  $\vec{B}$  resulta siempre perpendicular a  $d\vec{S}$ , por lo cual la ecuación (19) se reduce a

$$\oint_{PQRS} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (20)$$

De los resultados (18) y (20) se tiene que

$$\int_{PQ} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (21)$$

y dada la arbitrariedad en la elección del tramo PQ se deduce que

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = 0. \quad (22)$$

Así concluimos que la única solución force-free compatible con la condición de frontera impuesta por un sistema cerrado es la trivialmente nula. De esto se desprende que la helicidad asociada con este estado sólo puede ser nula.

Nótese que este resultado puede recuperarse aún en el caso en que se propaga una solución force-free no lineal donde  $\alpha$  en lugar de ser una constante sea una función de la posición.

### IV. HELICIDAD INICIAL Y PRESENTACIÓN DE LA PARADOJA

Comencemos por admitir la disponibilidad de un soporte físico que garantice las condiciones de contorno para un "sistema cerrado". El estado inicial quedará caracterizado una vez elegidos el campo de inducción magnética y la velocidad del plasma en todo el volumen del sistema. El primero de estos campos debe anularse sobre la frontera mientras que el segundo debe ser tangente a la misma. Estos campos deben satisfacer, respectivamente, las condiciones de anulación y de rigidez sobre la frontera. A continuación mostraremos que es posible elegir el campo de inducción magnética inicial de modo que su helicidad sea no nula. Para ello consideremos una colección arbitraria de tubos de inducción cerrados. Supongamos además que el campo es regular tanto en el interior como en la frontera de dichos tubos, mientras que lo elegimos idénticamente nulo en el resto del espacio. Si la superficie límite

del sistema contiene completamente a los tubos mencionados, la helicidad evaluada sobre todo el volumen será una medida del encadenamiento de las mismas y podrá resultar por lo tanto no nula por construcción.

La corriente quedará confinada al interior del sistema y podrá estimarse por medio de la ley de Ampère. Este mecanismo da cuenta del modo en que puede construirse el campo de inducción magnética inicial con helicidad no nula, compatible con las condiciones de contorno.

En este punto surge una inconsistencia entre las predicciones del teorema de Woltjer, la cual puede sintetizarse como sigue: para un sistema cerrado, entendiéndose como tal al que satisface las hipótesis del teorema, no pueden cumplirse simultáneamente la invariancia temporal de la helicidad magnética y la evolución hacia un estado de energía mínima del tipo force-free lineal. Según se ha visto, la helicidad puede elegirse inicialmente en forma arbitraria, mientras que en el estado de energía mínima dicha helicidad debe ser nula, consistente con el único estado force-free permitido por las condiciones de contorno.

Para evaluar las causas de esta paradoja es necesario someter a un análisis crítico la consistencia de las condiciones impuestas en la demostración del teorema. Nosotros intentamos insertar el problema en un marco más general, construyendo una visualización de los estados del sistema que tenga en cuenta todas sus restricciones topológicas. Luego extendemos el análisis a la situación real en que se admite una leve resistividad en el plasma. Finalmente exploramos tres aspectos cuestionables en las hipótesis del teorema:

- La helicidad magnética total no es el único invariante topológico del sistema<sup>(3),(4)</sup>.
- El congelamiento no puede ser sostenido frente a corrientes muy elevadas<sup>(5),(6)</sup>.
- Las condiciones de contorno pueden no ser compatibles con un estado force-free lineal.

## V. ESPACIO DE CONFIGURACIÓN

Consideremos todas las posibles configuraciones del campo de inducción magnética, que pueden darse en un plasma confinado en una cavidad de paredes rígidas con ciertas condiciones de contorno. Supongamos que cada una de estas configuraciones puede representarse por un punto en un espacio funcional de dimensión infinita, adecuadamente definido; en adelante nos referiremos a este espacio como "espacio de configuración". Si elegimos una configuración particular de la in-

ducción magnética, podemos determinar las helicidad diferenciales asociadas con cada una de sus líneas. Cualquier movimiento admitido por el plasma bajo la condición de congelamiento, llevará al sistema a estados vecinos que poseen los mismos invariantes topológicos. En este punto es conveniente notar que el plasma admite campos de deformaciones infinitesimales arbitrarios. Sin embargo, los campos de inducción magnética asociados están fuertemente condicionados por el congelamiento, de manera que sólo una pequeña variedad de configuraciones vecinas son accesibles. Una secuencia de deformaciones infinitesimales de este tipo dará lugar a una curva a la que llamaremos trayectoria en el espacio de configuración. Los estados conectados con cierto estado de referencia, mediante una trayectoria permitida, constituyen así un conjunto topológicamente equivalente. De este modo, el espacio de configuración queda dividido en celdas multidimensionales caracterizadas por sus invariantes topológicos. Sus correspondientes fronteras pueden entonces interpretarse como las superficies de transición entre configuraciones topológicamente diferentes.

Examinemos cualitativamente la evolución temporal de un sistema para el cual se especifica la inducción magnética, la velocidad y la densidad en el instante inicial. Dado que la conductividad es infinita, la trayectoria del sistema debe quedar confinada dentro de la celda que contiene a la configuración inicial del campo magnético. Este confinamiento sólo puede darse si cada vez que el sistema intenta atravesar una de las fronteras de la celda, aparecen sobre él fuerzas restauradoras tan grandes como sean necesarias para revertir su movimiento. Entonces podemos interpretar que, si una frontera es accesible para el sistema, existirá sobre ella una barrera energética infinita que aporta una fuerza de vínculo de origen magnético. Veremos más adelante que existen dos tipos de fronteras y que el sistema sólo puede intentar la aproximación a las de uno de estos tipos.

La disipación por efecto Joule no es posible en un plasma conductor perfecto, de manera que la energía total se conserva sobre cualquier trayectoria que el sistema elija espontáneamente (admitimos además que el plasma presenta viscosidad despreciable). A lo largo de dichas trayectorias, tendrá lugar el intercambio entre la energía magnética del campo y la energía cinética del plasma. En este sentido podemos interpretar que las fuerzas magnéticas promueven el acercamiento

del sistema a estados de menor energía magnética. Sin embargo, en general el sistema no podrá permanecer en el estado de energía magnética mínima debido a la ausencia de disipación, y en la mayoría de los casos ni siquiera podrá acceder a dicho estado.

Según ha sugerido Taylor<sup>(7)</sup>, los estados de energía magnética mínima asociados con una topología dada corresponden a configuraciones force-free no lineales. Además, el análisis de la variación segunda muestra que el paisaje energético es cóncavo hacia energías mayores sobre todo el espacio de configuración. De esto puede concluirse que cada celda de dicho espacio presenta una única energía mínima, que puede corresponder a un único estado o a un subconjunto conexo de estados force-free. Nótese que esta conclusión sólo es posible teniendo en cuenta que la energía tiende a infinito sobre todas las fronteras.

## VI. CARACTERIZACIÓN DE LAS FRONTERAS

Analicemos dos ejemplos sencillos que ponen de manifiesto la existencia de fronteras cualitativamente diferentes. En primer lugar, consideremos una configuración del campo de inducción compatible con las condiciones de contorno, y luego la configuración vecina que se obtiene multiplicando la primera por un factor escalar diferencialmente cercano a la unidad. Estas dos configuraciones no poseen las mismas helicidades diferenciales y por tanto, aunque son morfológicamente idénticas, pertenecen a diferentes celdas. Por otro lado, una situación distinta se da cuando las helicidades se modifican por una transición morfológica. Un ejemplo de ello se da cuando un tubo de flujo que presenta un nudo simple evoluciona hacia el extrangulamiento del mismo. En el límite se dará la rotura del encadenamiento definiendo una barrera cualitativamente diferente a la primera, a la que llamaremos barrera morfológica.

La condición de congelamiento define las barreras no morfológicas, de manera que no existe ningún campo de desplazamientos diferencial regular que lleve al sistema a atravesar una de dichas barreras. En general, todos los estados del espacio de configuración forman parte de barreras no morfológicas, pero las trayectorias permitidas tienen direcciones "paralelas" a las mismas. Por el contrario, las barreras morfológicas quedan determinadas por las condiciones iniciales. En este caso, la condición de congelamiento no impide que

ciertas secuencias de desplazamientos conduzcan al sistema hacia las barreras morfológicas, aunque es la responsable de que las mismas no puedan ser atravesadas.

Para visualizar la geometría de la celdas, daremos un ejemplo muy simplificado suponiendo que el espacio de configuración es tridimensional, mientras que una de dichas celdas puede representarse por un círculo de radio  $R$ . En este caso, la condición de congelamiento define las fronteras no morfológicas al confinar la celda en un plano. Por su parte, la circunferencia límite representa la frontera morfológica que queda determinada por las características del encadenamiento. Fijemos ideas considerando un sistema de referencia de manera que el origen coincida con el centro del círculo, y el eje  $z$  sea perpendicular al mismo. Es interesante notar que cada estado representado en esta celda está en contacto con estados no incluidos en la misma. En efecto, si el punto  $(x, y, 0)$  pertenece al círculo, existirá siempre un vecino arbitrariamente próximo en la posición  $(x, y, \epsilon)$  que resulta exterior al mismo. En este sentido decimos que todos los estados interiores al círculo forman parte de alguna frontera no morfológica. Las trayectorias permitidas por la condición de congelamiento están contenidas en el círculo, por lo cual son paralelas al mismo y naturalmente, a sus fronteras no morfológicas. Por su parte, la circunferencia límite admite la aproximación a través de trayectorias contenidas en el círculo, aunque llegar a la misma requeriría una energía magnética infinita.

Veamos ahora una posible distribución de celdas en la región próxima al origen. Supongamos que cada una de estas celdas es un círculo de radio  $R$  centrado en el eje  $z$  y contenido en un plano perpendicular al mismo. En este caso, las barreras morfológicas en conjunto constituyen una superficie cilíndrica, sobre la cual se desarrolla una barrera energética infinita. Los estados interiores a la misma resultan morfológicamente idénticos, aunque sus invariantes topológicos cambian con la coordenada  $z$  en factores globales.

## VII. CONFIGURACIONES DE PLASMAS LEVEMENTE RESISTIVOS

En la mayor parte de las aplicaciones astrofísicas de la magnetohidrodinámica resulta apropiado suponer que los plasmas son conductores perfectos, debido a que su resistividad resulta sumamente pequeña. La disipación por efecto Joule es virtualmente despreciable, con la

excepción de los casos en que el colapso de las estructuras topológicas desencadenan corrientes extremadamente altas. Esta última situación se presenta cuando el movimiento del plasma determina una trayectoria en el espacio de configuración que lleva al sistema hacia una barrera morfológica. Entonces, la pequeña resistividad invalida la condición de congelamiento a la vez que permite intensos efectos de disipación térmica.

Ahora daremos una imagen intuitiva acerca del fenómeno que ocurre cuando un plasma levemente resistivo evoluciona aproximándose a una barrera morfológica. Para ello imaginemos nuevamente la situación particular en que un tubo de inducción presenta un nudo simple. La aproximación a la frontera puede interpretarse como la deformación continua del nudo hasta convertirse en un punto. Si fuera válida la condición de congelamiento, la conservación del flujo diferencial asociado con el tubo conduciría a que resulten infinitas la inducción magnética, la corriente y la energía. Sin embargo, en el camino hacia la frontera morfológica, tienen lugar dos fenómenos que compiten impidiendo la aproximación. El primero consiste en la aparición de las fuerzas restauradoras que tienden a "invertir" el movimiento del plasma, llevándolo hacia energías magnéticas menores. Este efecto preserva las propiedades topológicas, privilegiando la pertenencia a la celda que contiene la configuración inicial. Por su parte, el segundo efecto consiste en la paulatina relajación de la condición de congelamiento, que tiene lugar a medida que las corrientes se intensifican. Esto puede interpretarse como la desnaturalización de las barreras no morfológicas en las proximidades de una barrera morfológica. De este modo, el sistema puede encontrar una puerta que le permita escapar de la celda, dando lugar a trayectorias que conectan celdas topológicamente diferentes.

Para ilustrar veremos ahora como se modifica la estructura de barreras en el espacio de configuración cuando se admite una pequeña resistividad. Para ello consideremos el ejemplo introducido en la sección anterior en donde las celdas se representan por círculos de radio  $R$ . La desaparición de la frontera no morfológica se dará en la región próxima a la circunferencia límite. Ésta puede representarse por la superficie comprendida entre las circunferencias de radios  $R$  y  $R' < R$ , donde  $R'$  será tanto más próximo a  $R$  cuanto más pequeña sea la resistividad. Repi-

tiendo esta representación sobre todas las celdas circulares, queda definido un canal de comunicación entre las mismas que ocupa el espacio entre las superficies cilíndricas de radios  $R'$  y  $R$ .

El paso siguiente consiste en distinguir las trayectorias cualitativamente diferentes que pueden darse en este caso. Consideremos que el sistema presenta una configuración inicial alejada de la frontera morfológica ( $r_0 \ll R'$ ). Si la energía cinética es suficientemente pequeña, la trayectoria descrita espontáneamente quedará confinada en la celda inicial dentro del círculo de radio  $R'$ . Por el contrario, energías cinéticas mayores pueden conducir a configuraciones de frontera, de manera que las trayectorias escapen de la celda inicial. Cuando ocurre esto, el sistema evoluciona irreversiblemente hacia estados de menor energía total. Las configuraciones accesibles por este camino son morfológicamente idénticas a la inicial, aunque la inducción magnética resulta localmente atenuada. La consiguiente pérdida de energía del sistema se disipa por efecto Joule. Por último, un tercer efecto puede distinguirse cuando la energía cinética inicial es extremadamente alta. Para comprender este efecto conviene observar que cada frontera morfológica, entendida en conjunto para todas las celdas morfológicamente equivalentes, tienen un límite finito. En el caso mencionado de energía cinética muy alta pueden darse trayectorias muy extendidas en direcciones "paralelas" a la frontera morfológica, de modo que existe la posibilidad de alcanzar regiones límite de dicha frontera. Entonces el sistema puede escapar de su "cápsula morfológica", a la que no regresará por ningún camino espontáneamente elegido.

## VIII. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En las hipótesis del teorema de Woltjer no se hace una caracterización completa de la topología del sistema, sino que sólo se impone su helicidad magnética total. De acuerdo con la visualización del espacio de los estados que hemos propuesto, existe un conjunto muy extendido de celdas topológicamente diferentes que comparten dicha helicidad total. La configuración inicial debe formar parte de cualquiera de estas celdas, pero una vez elegida, el congelamiento impedirá que el sistema abandone la celda correspondiente. Así, el estado de energía magnética mínima debe ser compatible con todos los invariantes topológicos del estado inicial; de manera que el sistema sólo puede exhibir una tendencia a aproximarse a un estado force-free no lineal incluído en la celda (esta

última afirmación la hemos demostrado en un trabajo reciente que aun no ha sido publicado).

La especificación incompleta de la topología inicial puede interpretarse como una supresión artificial de las fronteras, definiendo una celda cuya única característica es la helicidad magnética total. Sin embargo, no es claro que cualquier conjunto de condiciones de contorno garantice la existencia de estados force-free lineales en esta clase de celdas. Más aun, la condición de sistema cerrado impuesta sobre el teorema de Woltjer no admite una solución de este tipo.

Todo parece indicar que la paradoja puede resolverse incluyendo una caracterización más precisa de la topología, a la vez que deben modificarse las condiciones de contorno. Una condición de contorno adecuada puede obtenerse suponiendo que el sistema se encuentra confinado en una cavidad rígida de paredes perfectamente conductoras. Además, un tratamiento más realista debería admitir la supresión parcial de la condición de congelamiento cuando las corrientes son suficientemente elevadas.

### **Agradecimientos**

Quisiéramos expresar nuestro sincero agradecimiento por sus colaboraciones en la edición de este trabajo a M. F. Montero y M. V. Cardaci.

### **Referencias**

- 1 - Woltjer, L., 1958, Proceedings of the National Academy of Sciences, 44 , 489.
- 2 - Priest, E. R., 1982, Solar Magnetohydrodynamic, Reidel Publ. Company: London.
- 3 - Bhattacharjee, A. and Dewar, R. L., 1982, Phys. Fluids 25 , 887
- 4 - Taylor, J. B., 1974, Phys. Rev. Lett., 33 , 1139.
- 5 - Priest, E. R., 1990, in Basic Plasma Processes on the Sun, Priest, E. R. and Krishan V. (editors). IAU, Netherlands, pp 271-291
- 6 - Low, B. C., 1996, in Solar and Astrophysical Magnetohydrodynamic Flows, Tsinganos, K. C. (editor) Kluwers Academic Publishers, pp 109-131
- 7 - Taylor, J. B., 1986, Reviews of Modern Physics 58 , 741.