

SOLUCION DEL PROBLEMA DE LAS ALAS DE ALFVEN CON FUNCIONES CORRIENTE

A. M. Platzeck* and P. A. Sallago

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas Paseo del Bosque s/n (1900) La Plata
e-mail: amp@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar

En los plasmas espaciales la interacción entre un cuerpo conductor y un plasma magnetizado en movimiento relativo es frecuente; por ejemplo, el sistema Io-Júpiter. Las ondas de Alfvén originadas por tal interacción dan lugar a regiones de campos de inducción magnética perturbados con campos eléctricos y corrientes que reciben el nombre de alas de Alfvén. Estas son los lugares del espacio donde las ondas de Alfvén se suman en forma coherente. Varios autores han aplicado diversas metodologías para la solución de las alas de Alfvén cuando los campos de base son uniformes. En el presente trabajo se muestra que, haciendo uso del hecho que el problema tiene una simetría, es posible aplicar la metodología de funciones corriente en magnetohidrodinámica; o sea definir una variable ignorable y funciones corriente para las magnitudes con divergencia nula. Dentro de este esquema se analizan las distintas situaciones que se pueden presentar, como por ejemplo distintos ángulos entre la velocidad y el campo de inducción magnética de fondo.

The interaction between a conducting body and a magnetic plasma in relative motion occurs frequently in spatial plasmas; for example Io's interaction with the jovian plasma torus. The interaction generates Alfvén waves building up by constructive interference disturbed regions called Alfvén wings. This problem has been studied with different methods by other authors when the background fields are uniform.

Taking into account that the system has a symmetry we show in the present paper that in the MHD approximation the current function methodology can be used. We analyze within this frame the way in which the direction of the Alfvén wings depends on the relative angle between the background velocity and magnetic induction field.

I. INTRODUCCIÓN

La interacción entre cuerpos conductores y plasmas magnetizados en movimiento relativo tiene lugar en una variedad de situaciones en los plasmas espaciales. Tanto los sistemas constituidos por satélites artificiales moviéndose en la ionosfera^{(1),(2)}, en la magnetósfera terrestre aplicado a corrientes alineadas con el campo en arcos aurorales⁽³⁾, como el sistema Io - Júpiter^{(4),(5),(6),(7)}, son ejemplos de ello.

Al resolver las ecuaciones de la MHD para un sistema formado por un plasma magnetizado en reposo y un conductor en movimiento, cuando la única fuerza actuante sobre el sistema es la de Lorentz, los campos de base son uniformes y las perturbaciones son del tipo incompresible, se encuentra que se propagan ondas de Alfvén con velocidad de grupo en la dirección del campo de inducción magnética de fondo. Así como cuando una partícula se mueve en un medio con velocidad mayor que la velocidad de fase de los campos electromagnéticos emite radiación del tipo Cherenkov, y la zona donde las ondas se su-

man en forma coherente constituyen un cono, puede mostrarse que para las ondas de Alfvén, si se trata de una fuente puntual, estos lugares del espacio son líneas, llamadas alas de Alfvén, que nacen en la fuente. Además, de la misma forma que sólo existe radiación Cherenkov en el cono, sólo habrá propagación de ondas de Alfvén sobre las alas. En el caso en que la fuente no sea puntual, las alas de Alfvén son cilíndricas con sección igual a la sección de la fuente transversal a las alas.

II. MÉTODOS

Para estudiar este problema primero lo comparamos con el efecto Cherenkov y, tras mostrar que existe una dirección invariante, aplicamos la metodología de funciones corriente en MHD.

Comparación con el efecto Cherenkov

Para una partícula que se mueve con velocidad constante \vec{V} en la dirección \vec{e}_3 , en un medio dieléctrico, si la velocidad de la partícula es mayor que la velocidad de fase de las ondas elec-

tromagnéticas en el medio,

$$V/c > 1/\sqrt{\epsilon(\omega)}, \quad (1)$$

para algún ω , la carga emite radiación Cherenkov. Supongamos que el vector de onda \vec{k} de las ondas emitidas forma un ángulo θ con \vec{e}_3 ; la velocidad de fase aparente en la dirección \vec{e}_3 es por lo tanto

$$V_{ap} = c/\sqrt{\epsilon} \cos \theta. \quad (2)$$

Para que las ondas emitidas a lo largo de la trayectoria de la partícula interfieran constructivamente esta velocidad debe coincidir con la velocidad de la partícula, por lo que

$$\theta = \theta_c = \arccos[c/(V\sqrt{\epsilon})]. \quad (3)$$

Para determinar la posición a la que llega la perturbación hay que tener en cuenta la velocidad de grupo de las ondas en esa dirección para distintas frecuencias. Al tener el problema simetría de revolución queda determinado un cono; en el caso en que ϵ no depende de ω la velocidad de grupo coincide con la velocidad de fase y el ángulo del cono es $\pi/2 - \theta_c$.

Las ondas de Alfvén que se propagan en un plasma magnetizado tienen una velocidad de fase que depende del ángulo θ_B entre el vector \vec{k} y el campo de inducción magnética de base \vec{B}_0 ,

$$V_{fase} = \pm B_0 \cos \theta_B / \sqrt{4\pi\rho}. \quad (4)$$

Por lo tanto siempre habrá ondas para las cuales la velocidad \vec{V} de la fuente es mayor que la velocidad de fase. Además en este caso no habrá simetría de revolución. La condición de que la velocidad aparente en la dirección \vec{e}_3 deba coincidir con la velocidad de la fuente debe cumplirse también en este caso. Pero la velocidad de grupo de las ondas de Alfvén es un vector constante independiente del \vec{k} y que tiene la dirección de la inducción magnética \vec{B}_0

$$V_{grupo} = \pm B_0 / \sqrt{4\pi\rho} = \pm V_A. \quad (5)$$

La posición a la que llega una perturbación nacida a lo largo de la trayectoria de la fuente queda determinada por \vec{V}_A y \vec{V} y resulta una línea que tiene un extremo en la fuente, conformando una semirrecta contenida en el plano (\vec{B}_0, \vec{e}_3) que forma con \vec{e}_3 un ángulo α ,

$$\alpha = \arctan(V_A \sin \gamma / (V - V_A \cos \gamma)). \quad (6)$$

Esto constituye el ala de Alfvén.

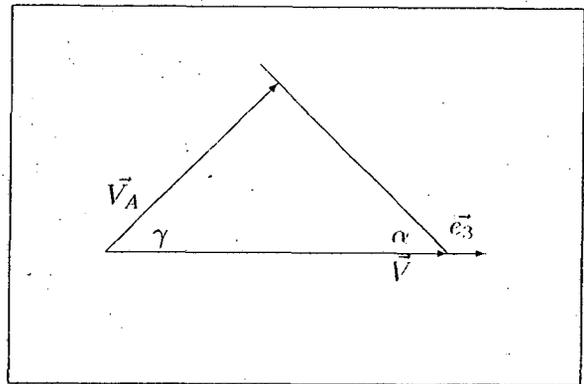


Figura 1: Esquema mostrando la posición a la que llega una perturbación nacida a lo largo de la trayectoria de la fuente

Neubauer⁽⁸⁾ (1980) encaró el problema utilizando un modelo analítico no lineal, mientras que McKenzie⁽⁹⁾ (1991) lo hizo utilizando funciones de Green.

Funciones corriente en la MHD

Con el fin de hallar la solución al problema con la metodología que utiliza funciones de Stokes, pasemos al sistema de referencia en que el conductor está quieto y el plasma se mueve con velocidad \vec{V}_0 , ($\vec{V}_0 = -\vec{V}$); dividimos el espacio en forma ficticia por medio de un plano que lo separe en los medios I y II. Tomamos la superficie de separación que contenga a \vec{V}_0 , sea perpendicular al plano que contiene a las alas y pase por la fuente. De esta forma cada una de las alas yace completamente en uno solo de los medios; en el medio I el ala de Alfvén está en la dirección $\vec{V}_0 + \vec{B}_0/\sqrt{4\pi\rho}$ y en el medio II de $\vec{V}_0 - \vec{B}_0/\sqrt{4\pi\rho}$. Además, usando este sistema de referencia el problema es estacionario y en cada medio las diferentes magnitudes físicas sólo pueden variar en la dirección perpendicular al ala.

Resolvamos primero el problema en el medio I. Elegimos el sistema de coordenadas de modo que el eje z esté en la dirección del ala, por lo que z será una variable ignorable. Para un problema estacionario con una variable ignorable se pueden definir funciones corriente para las magnitudes del problema que tengan divergencia nula.

El sistema de ecuaciones que gobierna al plasma esta constituido por:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (7)$$

$$\rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \vec{J} \times \vec{B}/c, \quad (8)$$

$$\frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}/c, \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (11)$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B}c/4\pi. \quad (12)$$

Para los plasmas espaciales y astrofísicos en general se puede considerar que, el número de Reynolds magnético, $R_m \gg 1$, siempre que la longitud característica del fenómeno no sea pequeña. Realizando un análisis de escalas, cuando $R_m \gg 1$, el miembro izquierdo de (9) resulta ser del orden de $VB/(cR_m)$, que es mucho menor que BV/c . Esto permite que se desprecie el término \vec{J}/σ de la ley de Ohm.

Tomando el rotor de (8), se tiene que

$$\rho \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{W}) = \vec{\nabla} \times (\vec{J} \times \vec{B}/c), \quad (13)$$

donde \vec{W} es la vorticidad.

Reemplazando la ley de Ohm en (10), resulta

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{V}) = 0. \quad (14)$$

Utilizamos coordenadas ortogonales α, β, z , donde z es la variable ignorable; es necesario distinguir entre las componentes covariantes y contravariantes de los vectores $B^\alpha, B_\alpha, B^\beta, B_\beta$, mientras que $B_z = B^z$.

De (11), se puede ver que existe una función corriente $\psi(\alpha, \beta)$ para el campo de inducción, llamada flujo magnético, tal que

$$B^\alpha = (1/\sqrt{g})\partial\psi/\partial\beta, \quad (15)$$

$$B^\beta = (-1/\sqrt{g})\partial\psi/\partial\alpha, \quad (16)$$

donde g es el determinante del tensor métrico.

De (12), (15) y (16)

$$J^\alpha = (1/\sqrt{g})(c/4\pi)\partial B_z/\partial\beta, \quad (17)$$

$$J^\beta = (-1/\sqrt{g})(c/4\pi)\partial B_z/\partial\alpha, \quad (18)$$

$$J^z = (-c/4\pi)\nabla^2\psi, \quad (19)$$

por lo que la función corriente de \vec{J} es $cB_z/4\pi$.

De (7), puede observarse que para $(\rho \vec{V})$ habrá una función corriente, $\chi = \chi(\alpha, \beta)$.

$$\rho V^\alpha = (1/\sqrt{g})\partial\chi/\partial\beta, \quad (20)$$

$$\rho V^\beta = (-1/\sqrt{g})\partial\chi/\partial\alpha. \quad (21)$$

La vorticidad \vec{W} tiene su función corriente, de modo que

$$W^\alpha = (1/\sqrt{g})\partial V_z/\partial\beta, \quad (22)$$

$$W^\beta = (-1/\sqrt{g})\partial V_z/\partial\alpha, \quad (23)$$

$$W^z = -\nabla^2\left(\frac{\chi}{\rho}\right). \quad (24)$$

Usando las ecuaciones (15) a (24) se puede mostrar que el conjunto de ecuaciones (7) a (12) que gobierna al plasma queda reducido a las ecuaciones (13) y (14) y éstas resultan equivalentes al siguiente conjunto de relaciones entre Jacobianos entre las funciones corriente (Palumbo⁽¹⁰⁾, 1993):

$$[\chi, \psi] = \partial\chi/\partial\alpha\partial\psi/\partial\beta - \partial\chi/\partial\beta\partial\psi/\partial\alpha = 0, \quad (25)$$

$$[V_z, \psi] - [B_z/(\rho), \chi] = 0, \quad (26)$$

$$[B_z/(4\pi), \psi] + [\chi, V_z] = 0, \quad (27)$$

$$[J_z/c, \psi] - [W_z, \chi] = 0. \quad (28)$$

Hemos supuesto $E_z = 0$ y tenido en cuenta que la densidad es constante. De la ecuación (25) se ve fácilmente que si $\psi \neq \text{cte.}$, la función corriente de $(\rho \vec{V})$ es función del flujo magnético

$$\chi = \chi(\psi); \quad (29)$$

usando este resultado, las ecuaciones (26) y (27) se pueden integrar, obteniéndose

$$\frac{B_z}{4\pi} - \chi' V_z = F_1(\psi), \quad (30)$$

$$V_z - \chi' \frac{B_z}{\rho} = F_2(\psi), \quad (31)$$

donde $\chi' = d\chi/d\psi$.

De (30) y (31)

$$B_z = (F_1(\psi) - \chi' F_2(\psi))/(1/4\pi - \chi'^2/\rho), \quad (32)$$

$$V_z = (F_1(\psi)\chi'/\rho + F_2(\psi)/4\pi)/(1/4\pi - \chi'^2/\rho); \quad (33)$$

resulta entonces que si la densidad ρ es constante y si $\chi'^2 \neq \rho/4\pi$, B_z y V_z son funciones de ψ .

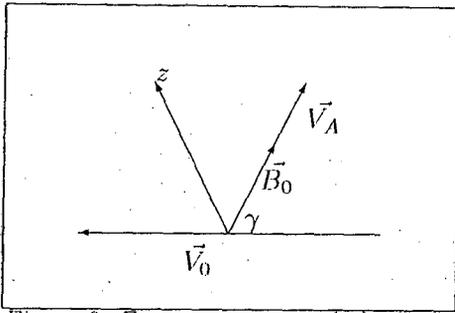


Figura 2: Esquema mostrando la dirección del ala de Alfvén en el medio I.

Alas de Alfvén en el formalismo de las funciones corriente

La situación es distinta si $\chi'^2 = \rho/4\pi$; de (15) y (20) se ve que en este caso

$$V^\alpha = \chi'/\rho B^\alpha = -B^\alpha/\sqrt{4\pi\rho} \quad (34)$$

$$V^\beta = \chi'/\rho B^\beta = -B^\beta/\sqrt{4\pi\rho} \quad (35)$$

una perturbación de Alfvén, en la que

$$\vec{V}_1 = -\vec{B}_1/\sqrt{4\pi\rho},$$

tendrá entonces $\chi'^2 = \rho/4\pi$, debiendo ser además nulo el valor de $F_2(\psi_1)$ debido a la perturbación (ver ec.(31)). Por ser una perturbación de Alfvén la componente B_{1z} se obtiene de la condición $|B| = \text{cte.}$, o sea

$$B_{1z} = \sqrt{B_0^2 - B_\alpha B^\alpha - B_\beta B^\beta} - B_{0z}. \quad (36)$$

Si esta perturbación ocurre en un plasma cuyos campos de base \vec{B}_0 y \vec{V}_0 son uniformes, las componentes contravariantes α y β de \vec{B}_0 y \vec{V}_0 , con la elección hecha para el eje z , cumplen también las relaciones (34) y (35); en cambio las componentes z son tales que

$$\begin{aligned} F_2(\psi_0) &= V_{0z} + B_{0z}/\sqrt{4\pi\rho} = \\ &= \sqrt{V_0^2 + V_A^2 - 2V_0V_A \cos(\gamma)} = V_R. \end{aligned} \quad (37)$$

Entonces para el ala de Alfvén en el medio I las funciones $\chi(\psi)$, $F_1(\psi)$ y $F_2(\psi)$ serán

$$\chi(\psi) = -\sqrt{\rho/4\pi}\psi, \quad (38)$$

$$F_1(\psi) = -\sqrt{\rho/4\pi}V_R, \quad (39)$$

$$F_2(\psi) = V_R. \quad (40)$$

Por otro lado, de la relación entre Jacobianos (28) y teniendo en cuenta las expresiones para J_z y W_z (ecuaciones (19) y (24)) se obtiene la siguiente ecuación diferencial para ψ (Palumbo⁽¹⁰⁾, 1993),

$$\nabla^2\psi(-1/4\pi + \chi'^2/\rho) + (\chi'/\rho)\chi''|\vec{\nabla}\psi|^2 = F_3(\psi). \quad (41)$$

En el caso que estamos tratando, al ser ρ constante $\chi'^2 = \rho/4\pi$, resulta

$$F_3(\psi) = 0, \quad (42)$$

y la ecuación (41) se satisface para un ψ arbitrario. Las soluciones para ψ y por lo tanto para los campos \vec{V} y \vec{B} dependen de los campos de fondo que existan y de la densidad de corriente J_z que resulte de hacer cumplir las condiciones de contorno entre el ala y la fuente conductora existente.

El problema en el medio II se resuelve en forma similar teniendo en cuenta que la dirección invariante estará dada en este caso por $\vec{V}_0 - \vec{B}_0/\sqrt{4\pi\rho}$ y eligiendo un nuevo sistema de coordenadas de modo que el eje z' esté en esta dirección. Los campos de inducción en el medio I y en el medio II fuera de la región de las alas serán los mismos, mientras que diferirán dentro de ellas. Las condiciones de contorno sobre la discontinuidad se podrán hacer cumplir debido a la presencia de la fuente sobre la cual pueden existir corrientes superficiales.

En general las alas de Alfvén no serán simétricas excepto que los campos de fondo sean perpendiculares entre sí. Cuando \vec{V}_0 y \vec{B}_0 tienden a ser paralelos, las alas se pliegan en la dirección de \vec{V}_0 si

$$|\vec{B}_0/\sqrt{4\pi\rho}| < |\vec{V}_0|,$$

mientras que un ala queda en la dirección de \vec{V}_0 y la otra se acerca a $(-\vec{B}_0)$ si

$$|\vec{B}_0/\sqrt{4\pi\rho}| > |\vec{V}_0|.$$

Cuando \vec{V}_0 y \vec{B}_0 son antiparalelos, las alas se pliegan en la dirección de \vec{V}_0 si

$$|\vec{B}_0/\sqrt{4\pi\rho}| < |\vec{V}_0|,$$

mientras que un ala queda en la dirección de \vec{V}_0 y la otra se acerca a la dirección de \vec{B}_0 si

$$|\vec{B}_0/\sqrt{4\pi\rho}| > |\vec{V}_0|.$$

Si $|\vec{B}_0/\sqrt{4\pi\rho}| = |\vec{V}_0|$ ya sea si son paralelos o antiparalelos, solamente queda un ala en la dirección de \vec{V}_0 .

Ejemplo

Para ejemplificar supongamos un ala de Alfvén de sección circular. Usaremos coordenadas cilíndricas (r, φ, z) , con z coincidente con el eje del ala. Proponiendo para la densidad de corriente la expresión

$$J_z = C(r - R_1) \cos \varphi \quad (43)$$

para $r < R_C$

$$J_z = 0, \quad (44)$$

para $r > R_C$, donde R_C es el radio del ala y R_1 es un radio a determinar. Con esta densidad de corriente, la corriente neta a través del ala es nula.

De (19) resulta que

$$\nabla^2 \phi = (-4\pi/c)C(r - R_1) \cos \varphi \quad (45)$$

para $r < R_C$.

La solución de esta ecuación es la solución de la homogénea más una solución particular.

Para $r < R_C$

$$\psi_H = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (r/R_C)^n \cos(n\varphi + \alpha_n) \quad (46)$$

y

$$\psi_P = (-4\pi C r^2/c)(r/8 - R_1/3) \cos \varphi. \quad (47)$$

Para $r > R_C$, la solución es sólo la parte homogénea y además debe coincidir con ψ_0 correspondiente a los campos de fondo. Para un \vec{B}_0 en el plano (x, z)

$$\psi_0 = r B_{0X} \sin \varphi. \quad (48)$$

Se deben hacer cumplir las condiciones de contorno para el campo de inducción; si imponemos que no existan láminas de corriente en la superficie del ala, deben ser continuos tanto la componente normal como la tangencial. Para ello deben ser continuos ψ y $\vec{\nabla}\psi$.

Estas condiciones se satisfacen con

$$b_0 = 0, \quad (49)$$

$$\alpha_1 = \arctan(B_{0X} 2c/\pi C (R_C)^2), \quad (50)$$

$$a_1 = \sqrt{(B_{0X} R_C)^2 + (\pi C R_C^3/2c)^2}, \quad (51)$$

$$a_n = 0 \quad \text{para } n > 1, \quad (52)$$

y resulta además que $R_1 = 3R_C/4$.

Las componentes físicas de los campos de inducción de perturbación en el interior del ala son entonces:

$$B_1^r = \frac{\pi C}{2c}(r^2 + R_C^2 - 2rR_C) \sin \varphi, \quad (53)$$

$$B_1^\varphi = \frac{\pi C}{2c}(3r^2 + R_C^2 - 4rR_C) \cos \varphi, \quad (54)$$

$$B_1^z = \sqrt{(B_0)^2 - (B^r)^2 - (B^\varphi)^2} - B_{0z}. \quad (55)$$

La velocidad de perturbación se obtiene de

$$\vec{V}_1 = -\vec{B}_1/\sqrt{4\pi\rho},$$

y las componentes r y φ de la densidad de corriente usando que $cB_z/4\pi$ es la correspondiente función de Stokes (17)-(18).

III. Conclusiones

En este trabajo se muestra la forma de resolver el problema de las alas de Alfvén usando las funciones corriente para los campos $\vec{B}, \vec{J}, \vec{V}$ y \vec{W} , cuando se tiene un conductor que se mueve a velocidad con stante en un plasma magnetizado con campo de inducción \vec{B}_0 uniforme.

Las soluciones quedan sujetas a los campos no perturbados que se propongan y a la componente z de la densidad de corriente compatible con la fuente existente y las condiciones de contorno.

Esta metodología abre la puerta para investigar a qué corresponde la situación en que $(\chi')^2 = \rho/4\pi$ pero $F_2(\psi_0)$ no es constante. En este caso los campos de fondo no serán constantes. En particular si estos campos dependen de una coordenada que sea perpendicular a los mismos, se puede nuevamente separar en forma ficticia el espacio en dos medios I y II y se abre la posibilidad de construir alas de Alfvén con estos campos de fondo no uniformes.

Agradecimientos

Quisiéramos expresar nuestro sincero agradecimiento por sus colaboraciones en la edición de este trabajo a M. F. Montero y M. V. Cardaci.

Referencias

- 1 - Drell, S.D., H. M. Forley, and M. A. Ruderman. J. Geophys. Res., **70**, 3131-3146 (1965).
- 2 - Dobrowolny, M. and P. Veltri. Astron. Astrophys., **167**, 179-185 (1986).
- 3 - Mallinckrodt, A. J., and C. W. Carlson. J. Geophys. Res., **83**, 1426-1432 (1978).

- 4 - Goertz, C. K. J. Geophys. Res., **85**, 2949-2956 (1980).
- 5 - Acuña, M. H., F. M. Neubauer, and N. F. Ness. J. Geophys. Res. **86**, 8513-8521 (1981).
- 6 - Wolf-Gladrow, D. A., F. M. Neubauer, and M. Lusse. J. Geophys. Res., **92**, 9949-9961 (1987).
- 7 - Hastings, D. E., A. Barnett, and S. Olbert, J. Geophys. Res., **93**, 1945-1960 (1988).
- 8 - McKenzie, J. F., J. Geophys. Res., **96**, 9491-9501 (1991).
- 9 - Neubauer F. M., J. Geophys. Res., **95**, 1171-1178 (1980).
- 10 - Palumbo L. J., Término de Hall y Simetría Helicoidal en Flujos MHD Estacionarios, tesis doctoral, biblioteca de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP, (1993).

CEILAP
CITEFA - CONICET
ZUFRIATEGUI Y VARELA
1603 - VILLA MARTELLI
REPUBLICA ARGENTINA