ISSN (EN LINEA): 1850 - 1158

Efecto de la masa inducida sobre la aceleración de cuerpos de baja densidad

Julio Gratton[1,*] y Carlos Alberto Perazzo[2,**]

[1] *INFIP–CONICET, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA, Ciudad Universitaria, Pab. I, 1428 Buenos Aires.*

[2] *Universidad Favaloro, Solís 453, 1078 Buenos Aires.*

En los textos de Física elemental se menciona habitualmente que cuando un objeto se desplaza en un fluido, éste ejerce sobre el cuerpo además del empuje, fuerzas de arrastre (ya sea viscoso o turbulento) y eventualmente fuerzas de sustentación. Sin embargo es mucho menos mencionado el efecto de la masa inducida que existe cuando el móvil es acelerado. La masa inducida es del orden de la masa del fluido desplazado por el móvil, por lo tanto su efecto es del mismo orden que el del empuje. Aquí mostramos como introducir a los alumnos en este tema en forma sencilla analizando el movimiento de cuerpos esféricos.

In the basic textbooks of Physics it is usually mentioned that when a body moves within a fluid, in addition to the buoyancy force, the latter exerts on the body a drag force (turbulent or viscous) and eventually lift forces. However no mention is usually made of the induced mass effect that exist when the body is accelerated. The order of magnitude of the induced mass is that of the mass of the displaced fluid, so that its effect is of the same order as that of the buoyancy. Here we show how to introduce the subject in a simple way to the students considering the motion of spherical bodies.

I. INTRODUCCIÓN

Cuando un cuerpo de masa m que se mueve en un fluido se acelera, el medio ejerce sobre el mismo una fuerza debida a que también se aceleran porciones del fluido para que el cuerpo se abra paso. En otras palabras, el medio gana energía cinética a expensas del trabajo realizado para acelerar un cuerpo sumergido. El tema se puede encontrar en tratados como [1, 2] pero salvo excepciones (ver por ejemplo [3]) no figura en textos introductorios porque la teoría correspondiente requiere el uso de tensores.

Resumimos ahora brevemente los resultados de la teoría. Qué porciones del fluido se aceleran y qué aceleraciones sufre cada una es un asunto muy complicado, pero si se ignora la viscosidad se puede mostrar que la fuerza $\mathbf{f}$ que el fluido ejerce sobre un cuerpo de volumen V que se mueve con la velocidad $\mathbf{u}$ está dada por

$$f_i = -\rho_f \left(\alpha_{ij} \frac{du_j}{dt} - V \frac{du_i}{dt} \right). \tag{1}$$

Aquí los subíndices i, j identifican las componentes de $\mathbf{f}$ y $\mathbf{u}$ y las 9 cantidades α_{ij} son las componentes de un tensor simétrico. Para nuestros fines alcanza con saber que las α_{ij} son cantidades cuyo valor depende de la geometría del cuerpo y del campo de velocidad del fluido lejos del mismo, y cuyo orden de magnitud está dado por V. Por ejemplo, en el caso particular de una esfera de radio R que se mueve en un fluido de extensión infinita se encuentra que

$$\alpha_{ij} = \frac{3}{2} V \delta_{ij}. \tag{2}$$

En este caso la (1) se reduce a

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} \rho_f V \frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{3}$$

de modo que $\mathbf{f}$ es paralela a $d\mathbf{u}/dt$. En general, sin embargo, $\mathbf{f}$ y $d\mathbf{u}/dt$ no son paralelos.

Si el cuerpo sufre una aceleración $\mathbf{a}$ por la acción de una fuerza $\mathbf{F}$ como la gravedad, la flotación, el arrastre, etc., la ecuación de movimiento es entonces

$$\mathbf{F} + \mathbf{f} = m\mathbf{a}. \tag{4}$$

Usando la (1) esta ecuación se puede escribir como

$$\left[(m - \rho_f V)\, \delta_{ij} + \rho_f \alpha_{ij} \right] a_j = (m\delta_{ij} + \mathcal{M}_{ij}) a_j = F_i. \tag{5}$$

Luego el cuerpo se acelera como si en vez de tener la masa m tuviera una *masa aparente* que se obtiene de sumar a m el tensor

$$\mathcal{M}_{ij} = \rho_f \alpha_{ij} - \rho_f V \delta_{ij}, \tag{6}$$

que da cuenta de la reacción que el fluido acelerado ejerce sobre el cuerpo. El tensor $\mathcal{M}_{ij}$ se llama tensor de *masa inducida*. Para una esfera $\mathcal{M}_{ij}$ se reduce al escalar

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \rho_f V. \tag{7}$$

La masa inducida es, en este caso, igual a la mitad de la masa del fluido desplazado por la esfera.

Como se puede apreciar de la (6) la importancia del efecto de masa inducida está dada por la relación $r = m_f/m$ entre la masa de fluido desplazada por el cuerpo y

[*] Investigador del CONICET; Correo electrónico: `jgratton@tinfip.lfp.uba.ar`

[**] Investigador del CONICET; Correo electrónico: `perazzo@favaloro.edu.ar`

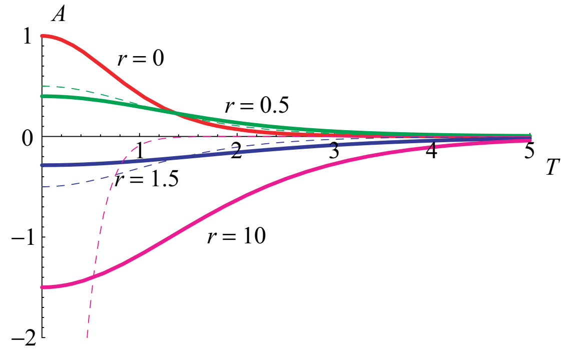

Figura 1: Aceleración como función del tiempo. Las líneas discontinuas indican la aceleración si no se hubiera tomado en cuenta la masa inducida.

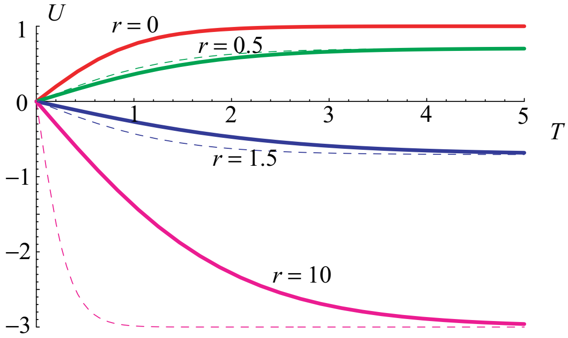

Figura 2: Velocidad como función del tiempo. Las líneas discontinuas indican la velocidad si no se hubiera tomado en cuenta la masa inducida.

la masa del mismo. Para cuerpos que se mueven en el aire en la mayoría de los casos tendremos que $r << 1$, luego el efecto será muy pequeño, pero en el caso de objetos cuya densidad media es muy baja (por ejemplo un globo) puede ser importante. Para cuerpos que se mueven en el agua se debe siempre incluir la masa inducida en la dinámica. Un ejemplo particularmente llamativo es el de una burbuja esférica que asciende en el agua, como ocurre en un vaso que contiene una bebida gasificada. En este caso $r = \rho_f/\rho_{gas} \approx 800$. Por lo tanto la masa inducida es 400 veces mayor que la masa de la burbuja.

Las consideraciones anteriores se aplican al diseño de embarcaciones dado que se debe tomar en cuenta la energía necesaria para acelerar la masa inducida. Para un barco la masa inducida puede fácilmente llegar a ser $1/4$ o $1/3$ de su masa y por lo tanto representa una importante inercia.

II. MOVIMIENTO DE CUERPOS ESFÉRICOS

Consideremos un cuerpo esférico de masa m sumergido en un fluido de densidad ρ_f, que es acelerado sólo por el peso y la flotación. Este problema es sencillo porque el tensor de masa inducida se reduce a un escalar. Tomando la coordenada vertical x creciente hacia abajo, la ecuación de movimiento es

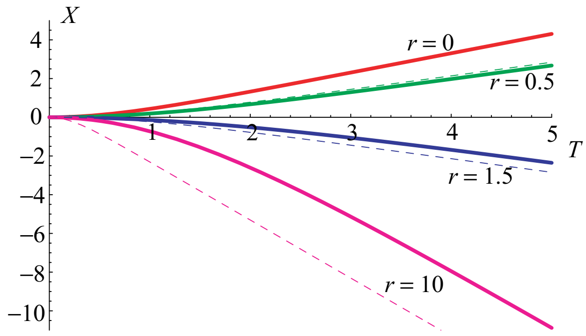

Figura 3: Posición como función del tiempo. Las líneas discontinuas indican la posición si no se hubiera tomado en cuenta la masa inducida.

$$(m + \mathcal{M})a = (m - m_f)g + F_a, \tag{8}$$

donde $\mathcal{M}$ es la masa inducida, m_f es la masa del fluido desplazada por la presencia del objeto, g es la aceleración de la gravedad, F_a es la fuerza de arrastre y

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} m_f. \tag{9}$$

Supondremos arrastre turbulento, de modo que

$$F_a = -\mathrm{sign}(u)\frac{\pi}{8} C_a \rho_f \ell^2 u^2, \tag{10}$$

donde C_a es el coeficiente de arrastre (para una esfera $C_a \approx 0{,}5$ para $\mathcal{R} \approx 10^2 - 10^5$) y ℓ es el diámetro del objeto. Si $u(0) = 0$ entonces $\mathrm{sign}(u) = \mathrm{sign}(1 - r)$. Claramente, si $r < 1$ el peso es mayor que el empuje y el cuerpo se acelera hacia el fondo, viceversa, si $r > 1$ el empuje prevalece y el cuerpo se acelera hacia arriba.

Para $r \ll 1$ se pueden despreciar tanto el empuje como el efecto de la masa inducida. Esto es lo que se hace habitualmente en los textos de enseñanza. En este caso el cuerpo alcanza una velocidad límite dada por

$$u_0 = \sqrt{\frac{mg}{\frac{\pi}{8} C_a \rho_f \ell^2}} = \sqrt{\frac{g\ell}{C_a r}} \tag{11}$$

Para resolver la (8) y estudiar el efecto de la masa inducida vamos a adimensionalizar las variables del siguiente modo:

$$U = u/u_0, \quad T = tg/u_0, \quad A = a/g, \quad X = xg/u_0^2. \tag{12}$$

La ecuación diferencial para U resulta entonces

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)\frac{dU}{dT} = 1 - r - \mathrm{sign}(1 - r)U^2. \tag{13}$$

De aquí junto con la condición inicial $X(0) = U(0) = 0$ se obtiene:

$$A = \frac{1 - r}{1 + \frac{r}{2}} \,\mathrm{sech}^2\left[\mathrm{sign}(1 - r)\frac{\sqrt{|1 - r|}}{1 + \frac{r}{2}} T\right] \tag{14}$$

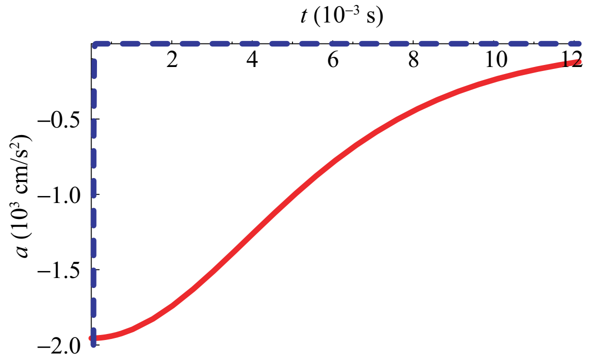

Figura 4: Aceleración de una burbuja de aire de 1 mm de diámetro en agua tomando en cuenta la masa inducida (línea llena) y sin tomarla en cuenta (línea de trazos).

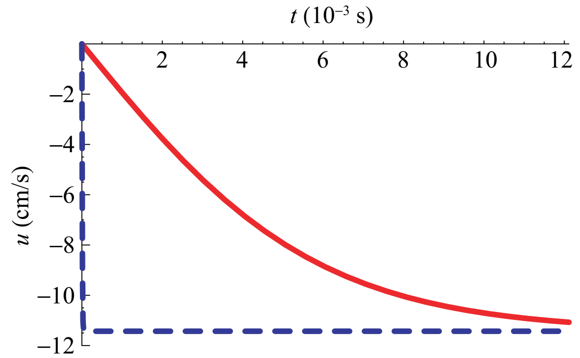

Figura 5: Velocidad de una burbuja de aire de 1 mm de diámetro en agua tomando en cuenta la masa inducida (línea llena) y sin tomarla en cuenta (línea de trazos).

$$U = \sqrt{|1-r|}\ \tanh\left[\operatorname{sign}(1-r)\frac{\sqrt{|1-r|}}{1+\frac{r}{2}}T\right] \tag{15}$$

$$X = \frac{1+\frac{r}{2}}{\operatorname{sign}(1-r)}\ln\left\{\cosh\left[\operatorname{sign}(1-r)\frac{\sqrt{|1-r|}}{1+\frac{r}{2}}T\right]\right\} \tag{16}$$

En las figuras 1–3 se muestran las soluciones (14–16) para diferentes valores de r. Para apreciar el error que se comete si no se toma en cuenta la masa inducida hemos dibujado con líneas de trazos el resultado de calcular A, U y X omitiendo el término de masa inducida en (8).

En las figuras 4–6 mostramos los resultados para el movimiento de una burbuja de 1 mm de diámetro en agua. En estas figuras también se muestra como sería el movimiento si no existiera la masa inducida. Se puede observar que el efecto es muy importante al comienzo del fenómeno, pero que no es fácil de observar porque la fase de aceleración dura apenas 10^{-2} segundos.

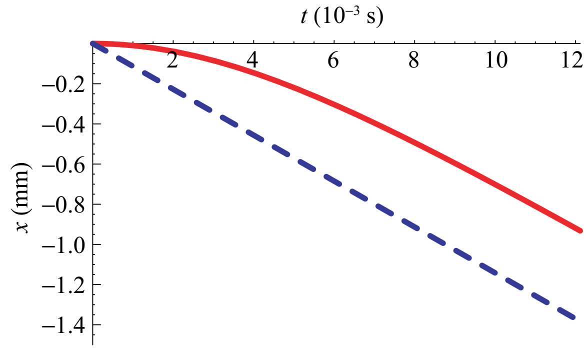

Figura 6: Posición de una burbuja de aire de 1 mm de diámetro en agua tomando en cuenta la masa inducida (línea llena) y sin tomarla en cuenta (línea de trazos).

III. CONCLUSIONES

El ejemplo aquí mostrado permite poner de manifiesto mediante cálculos sencillos el rol de la masa inducida en el movimiento de cuerpos esféricos bajo la acción de su peso, del empuje y del arrastre. Se observa que la masa inducida influye sólo durante la fase de aceleración y su efecto es importante cuando la densidad media del objeto es comparable o mucho menor que la del fluido en el que está sumergido. Por ejemplo, una burbuja tiene una aceleración inicial de $2g$, pero si no se tuviera en cuenta la masa inducida dicha aceleración sería de $800g$. Sin embargo, dado que la fase de aceleración es muy corta, esta diferencia es difícil de observar.

Agradecimientos

Agradecemos el subsidio PICTO FONCYT/UF 21360 BID OC/AR 1728 del FONCYT y la Universidad Favaloro.

[1] Curso de Física Teórica vol. 6: *Mecánica de Fluidos*, Landau, L.D. y Lifshitz, E.M., Reverté, 1991.

[2] *An Introduction to Fluid Dynamics*, Batchelor, G.K., Cambridge University Press, 2000.

[3] *Introducción a la Mecánica de Fluidos*, Gratton, J., http://www.lfp.uba.ar/Julio_Gratton/fluidos/Fluidos.html, 2003.