

## Disipación en cuerdas vibrantes y tubos de Kundt

Tatiana Alonso Amor, María Belén Farías, Martín Mansilla, Esteban Martínez, Vera Brudny, and Silvia Ledesma  
*Departamento de Física J. J. Giambiagi, FCEyN, UBA\**

Se presenta aquí un análisis del amortiguamiento en dos casos canónicos que se suelen plantear en los primeros laboratorios: modos normales longitudinales en columnas de gas (tubos de Kundt) y modos transversales en cuerdas. En el primer caso se muestra que es posible modificar algunos parámetros relacionados con los materiales de los tubos para obtener diferentes amortiguamientos. Para esto se utilizan tubos de Kundt cubriendo sus paredes con materiales de distinto rozamiento. Se muestra que el resultado es consistente en el sentido que se obtiene un mayor amortiguamiento cuanto mayor es el rozamiento. En el caso de las cuerdas, se realiza un análisis dimensional que permite establecer la dependencia del amortiguamiento con algunos parámetros del problema. Para esto se utilizan distintas tanzas de nylon multifilamento. En todos los casos el amortiguamiento es medido a través del ancho de las campanas de resonancia.

**Palabras clave:** sistemas resonantes - disipación - cuerdas vibrantes - tubos de Kundt.

We analyze the damping effects for normal modes in Kundt tubes and in vibrating strings, two systems that are usually studied in undergraduate laboratory courses. We show that in the case of Kundt tube it is possible to modify the damping effects by changing the inner lining of the tube. For the vibrating string system we develop a dimensional analysis that allows us to establish the dependence of the damping coefficient on different variables involved in the system. We present an experimental confirmation of these predictions for multifilament nylon strings. In both cases the damping coefficient is measured through the study of resonance curves.

**Keywords:** resonant systems - damping - vibrating string - Kundt tube.

### I. INTRODUCCIÓN

Generalmente en las prácticas de laboratorios elementales o en las primeras materias en las que se desarrolla el tema de modos normales en sistemas continuos poco se discute de la disipación de energía o, equivalentemente, del amortiguamiento presente en los sistemas físicos reales. Típicamente hay dos ejemplos que se plantean en las primeras materias: cuerdas vibrantes y tubos de Kundt [1–3]. El modelado de estos dos experimentos no es muy sencillo desde el punto de vista teórico por varias razones. Por empezar, los experimentos se realizan bajo condiciones de forzamiento, es decir se generan ondas estacionarias ayudándose en una perturbación externa que debe ser modelada adecuadamente. Además, sobre todo en el caso de las cuerdas vibrantes, el fenómeno puede fácilmente presentar un comportamiento gobernado por una ecuación diferencial no lineal [4–6]. Otro punto a tener en cuenta es que las condiciones de contorno pueden no estar bien definidas, lo que agrega una dificultad adicional a la hora de comprender el fenómeno. Por último, aún suponiendo que se dan las condiciones como para que el fenómeno tenga una respuesta lineal, puede ser extremadamente complicado modelar separadamente los efectos que producen amortiguamiento en el sistema. El problema de entender cómo depende el amortiguamiento de los parámetros presentes en cuerdas y tubos es en todo caso un desafío interesante desde el punto de vista pedagógico, que usualmente no es abordado.

En este trabajo presentamos un estudio sobre el amortigua-

miento en sistemas de cuerdas vibrantes y tubos de Kundt. Ambos fenómenos estudiados tienen puntos en común, ya que se trata de ondas estacionarias y modos normales generados por un forzamiento externo, pero hay algunas diferencias que vale la pena evidenciar y por esto encontraremos el análisis para cada caso en forma separada. En el caso de tubos de Kundt, existen diversos parámetros de la configuración experimental que dan como resultado un cambio en el coeficiente de amortiguamiento, tales como el radio del tubo, la temperatura del aire, las condiciones de rozamiento en el pistón, el recubrimiento en las paredes, etc. Estudios detallados de la dinámica del fluido en las cercanías de contornos con distintas características pueden encontrarse en [7]. Sin pretender realizar un análisis exhaustivo de cómo depende el amortiguamiento de estos parámetros, nos proponemos mostrar un caso donde el coeficiente de amortiguamiento puede ser modificado en forma notoria utilizando una variación muy sencilla de la configuración experimental que usualmente se utiliza en los laboratorios de enseñanza, que consiste en modificar el rozamiento en las paredes del tubo utilizando recubrimientos de distintos materiales en su parte interna. Para ambos experimentos se presenta en la sección II el modelo teórico y las hipótesis consideradas. En la sección III presentamos un análisis dimensional del problema de la cuerda amortiguada. En la sección IV mostramos los dispositivos experimentales y en la sección V discutimos los resultados obtenidos. Por último, en la sección VI presentamos nuestras conclusiones.

### II. ECUACIÓN DE ONDAS PARA UN SISTEMA FORZADO

Dos ejemplos canónicos de sistemas mecánicos continuos cuyo comportamiento, bajo ciertas restricciones, puede ser descrito por una ecuación de ondas clásica son las cuerdas y

\*Electronic address: ledesma@df.uba.ar; Este trabajo fue realizado con el apoyo de la Universidad de Buenos Aires, a través de los subsidios X118 y X023

los sistemas gaseosos unidimensionales [1, 8]. En ambos casos existen uno o más parámetros del sistema que responden a la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial^2 t} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial^2 x} = 0, \quad (1)$$

En el caso de una cuerda,  $\psi(x, t)$  representa el desplazamiento transversal de la misma respecto de su posición de equilibrio. En una columna gaseosa,  $\psi(x, t)$  puede representar la presión del gas, su densidad, o la compresión longitudinal. En ambos casos  $x$  representa una coordenada espacial que describe un punto del sistema y  $t$ , el tiempo. La velocidad de propagación de la onda  $c$  es función de parámetros propios de cada sistema. Para una cuerda de densidad lineal  $\rho_l$  sometida a una tensión  $T$ ,  $c^2 = \frac{T}{\rho_l}$ , mientras que para una columna de gas caracterizada por su módulo de compresibilidad en volumen  $\kappa$  y densidad volumétrica  $\rho_v$ , resulta  $c^2 = \frac{\kappa}{\rho_v}$ . Consideraremos que estos sistemas están limitados en el espacio, y que por lo tanto la coordenada  $x$  toma valores entre 0 y  $L$ , la longitud total del sistema. En los extremos del sistema existirá algún tipo de restricción física al movimiento, que se traducirá en una condición de contorno.

Si consideramos ahora que estos sistemas pueden estar forzados por una excitación  $F(t)$ , deberemos agregar el término correspondiente. Nos interesa especialmente considerar los posibles mecanismos de amortiguamiento que puedan existir en estos sistemas. Si bien el origen físico de estos mecanismos puede ser diverso (rozamiento interno; rozamiento en las paredes del tubo, en el caso del gas; rozamiento con el aire, rozamiento el sistema de sujeción, en el caso de la cuerda) modelaremos todos ellos con un término proporcional a la velocidad del sistema en cada punto,  $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$ , a través de un coeficiente  $\gamma$ . La ecuación de ondas resulta entonces de la forma:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial^2 t} + \gamma \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial^2 x} = F(x, t). \quad (2)$$

Para modelar el tipo de forzamiento que utilizaremos en los sistemas que estudiaremos experimentalmente, consideraremos que la excitación está aplicada en un punto  $x = x_0$  del sistema y tiene una dependencia temporal armónica, con frecuencia  $\omega$ , de la forma

$$F(x, t) = f_0 \cos(\omega t) \delta(x - x_0). \quad (3)$$

En el caso de la cuerda, consideraremos ambos extremos permanecen fijos durante todo el movimiento, es decir que  $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$ .

Nos interesa estudiar las soluciones estacionarias al problema forzado. Para estas soluciones, la dependencia temporal será de la forma

$$\psi(x, t) \propto (A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)) \quad (4)$$

Para la parte espacial, sabemos que las funciones

$$u_n(x) = \sin(k_n x) \quad (5)$$

con  $k_n = n \frac{\pi}{L}$  son una base completa para desarrollar funciones en el intervalo  $[0, L]$  que se anulan en los extremos,

$$\psi(x = 0, t) = \psi(x = L, t) = 0 \quad (6)$$

Podemos entonces desarrollar la solución general en función de esta base:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega t) + B_n \sin(\omega t)) \sin(k_n x) \quad (7)$$

Si introducimos esta forma de solución en la ecuación [2] y agrupamos los términos en  $\cos(\omega t)$  y  $\sin(\omega t)$ , resulta:

$$\sum (A_n (c^2 k_n^2 - \omega^2) + B_n \gamma \omega) \sin(k_n x) = f_0 \delta(x - x_0) \quad (8)$$

$$\sum (B_n (c^2 k_n^2 - \omega^2) - A_n \gamma \omega) \sin(k_n x) = 0 \quad (9)$$

Proyectamos sobre la base multiplicando por  $\sin(k_m x)$  a ambos lados de las igualdades e integrando en  $x$  entre 0 y  $L$ . Como

$$\int_0^L f_0 \delta(x - x_0) \sin(k_m x) dx = f_0 \sin(k_m x_0) \quad (10)$$

resulta

$$(A_n (c^2 k_n^2 - \omega^2) + B_n \gamma \omega) \frac{2}{L} = f_0 \sin(k_m x_0) \quad (11)$$

$$B_n (c^2 k_n^2 - \omega^2) - A_n \gamma \omega = 0 \quad (12)$$

De las Ecs. (11) y (12) despejamos  $A_n(\omega)$  y  $B_n(\omega)$ , obteniendo

$$A_n = \frac{L f_0 \sin(k_m x_0) (c^2 k_n^2 - \omega^2)}{2 ((c^2 k_n^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)} \quad (13)$$

$$B_n = -\frac{L f_0 \sin(k_m x_0) \gamma \omega}{2 ((c^2 k_n^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)} \quad (14)$$

Cuando la frecuencia de excitación  $\omega$  se aproxime a alguna de las frecuencias propias del sistema,  $\omega_n = c k_n = c n \frac{\pi}{L}$ , y siempre que  $\gamma$  sea lo suficientemente pequeño, los términos dominantes en la Ec. (7) serán aquellos proporcionales a  $A_N$ ,  $B_N$ , donde  $N$  es el índice correspondiente a la frecuencia resonante. En estos casos la forma del desplazamiento de la cuerda coincidirá con la del modo propio excitado y observarán nodos (puntos fijos) en las posiciones  $x_j = \frac{j}{N} L$ , con  $0 \leq j \leq N$ . Para frecuencias cercanas a las correspondientes a una resonancia, la amplitud del movimiento de la cuerda presentará una forma funcional dada por [1]:

$$A(\omega) = (A_N^2 + B_N^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{A_0}{(\gamma^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_N^2)^2)^{1/2}}, \quad (15)$$

Esta expresión nos permitirá obtener una determinación experimental del coeficiente de amortiguamiento  $\gamma$  a partir de las

mediciones de amplitud en las proximidades de una frecuencia de resonancia.

La perturbación representada por la Ec. (7) coincide, para pequeños amortiguamientos, con las soluciones que suelen presentarse en los libros de texto para cuerdas forzadas en un punto  $x_0$  con una excitación armónica [3]:

$$\psi(x, t) = A \sin(k(L - x)) \cos(\omega t), \quad (16)$$

válida para  $x_0 \leq x \leq L$  y donde

$$A = \frac{A_0}{\sin(k(L - x_0))} \quad (17)$$

para un excitador que provee una amplitud  $\psi(x_0, t) = A_0 \cos(\omega t)$  y

$$A = -\frac{F_0}{T_0 k \cos(k(L - x_0))} \quad (18)$$

para un excitador que provee una fuerza  $T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t) = F_0 \cos(\omega t)$ .

El tipo de excitación y la posición del excitador determinan qué modo propio del sistema entrará en resonancia. Tomemos por ejemplo el caso de la cuerda fija en sus dos extremos con un excitador ubicado en la mitad de su longitud. Si la excitación que éste provee puede ser caracterizada por una fuerza armónica, el sistema resonará en el modo fundamental. En cambio, si el excitador transmite una variación armónica en amplitud, el modo resonante será el que corresponde al primer armónico. No obstante ello, en este último caso si la frecuencia coincide con la del modo fundamental el sistema oscilará pero lo hará con una amplitud mucho menor que la que se obtendría en resonancia. En este sentido podríamos decir que la respuesta en la misma forma funcional en  $x, t$  para el caso de excitación en fuerza o excitación en amplitud, pero está modificada por un factor de escala que depende de la frecuencia de excitación.

### III. ANÁLISIS DIMENSIONAL CUERDAS AMORTIGUADAS

Nos interesa estudiar si es posible establecer la dependencia del coeficiente de amortiguamiento  $\gamma$  con otras variables del problema, como el radio de la cuerda, o la densidad de la misma, por ejemplo. Un procedimiento utilizado muy comúnmente para determinar la dependencia de una magnitud física de los demás parámetros del problema consiste en analizar su dependencia dimensional (Teorema  $\pi$  de Buckingham [9]). Dados los parámetros involucrados en la Ec. 2, podemos conjeturar que el coeficiente de amortiguamiento podría depender de la frecuencia de excitación  $\omega$ , de la tensión de equilibrio  $T$ , del radio de la cuerda  $R$  o bien de la sección de la misma,  $A$ , y de la densidad lineal de masa  $\rho_l$ . Es decir,

$$\gamma = \gamma(\omega, T, R, A, \rho_l) \quad (19)$$

Supondremos entonces que  $\gamma$  depende de alguna potencia de estas variables, de modo que

$$\gamma \propto \omega^\alpha T^\beta R^\nu A^\delta \rho_l^\mu \quad (20)$$

Queremos determinar las constantes  $\alpha, \beta, \nu, \delta, \mu$  de manera tal la combinación de variables propuestas resulte en dimensiones correctas para  $\gamma$ .

Si  $T$  representa una unidad de tiempo,  $M$  una unidad de masa,  $L$  una unidad de longitud, y puesto que

$$[\gamma] = \frac{1}{T} \quad (21)$$

deberá satisfacerse que

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{1}{T}\right)^\alpha \left(\frac{ML}{T^2}\right)^\beta L^\nu L^{2\delta} \left(\frac{M}{L}\right)^\mu \quad (22)$$

Esto implica que

$$\alpha + 2\beta = 1 \quad (23)$$

$$\beta + \mu = 0 \quad (24)$$

$$\beta + \nu + 2\delta - \mu = 0 \quad (25)$$

Si suponemos que  $\gamma$  no depende de la frecuencia (hipótesis justificada porque estamos trabajando en un rango chico de frecuencias), resulta

$$\beta = 1/2 \quad (26)$$

$$\nu + 2\delta + 1 = 0 \quad (27)$$

Por lo tanto,

$$\nu = 0 \Rightarrow \delta = -1/2 \quad (28)$$

o bien

$$\delta = 0 \Rightarrow \nu = -1 \quad (29)$$

Por ambos caminos se concluye que

$$\gamma \propto T_0^{\frac{1}{2}} \rho_l^{-\frac{1}{2}} R^{-1} \propto cR^{-1} \quad (30)$$

donde la constante de proporcionalidad es adimensional.

En conclusión, si suponemos que el coeficiente de amortiguamiento no depende de la frecuencia, si mantenemos constante la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda resulta

$$\gamma \propto 1/R \quad (31)$$

En cambio, si se mantienen constantes el radio de la cuerda y su densidad lineal, deberá cumplirse que

$$\gamma \propto T_0^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

Por otra parte, si se mantienen constantes tanto la tensión aplicada  $T_0$  como la densidad volumétrica  $\rho_v$ , y puesto que  $\rho_l = \rho_v A$ , resulta

$$\gamma \propto 1/R^2 \quad (33)$$

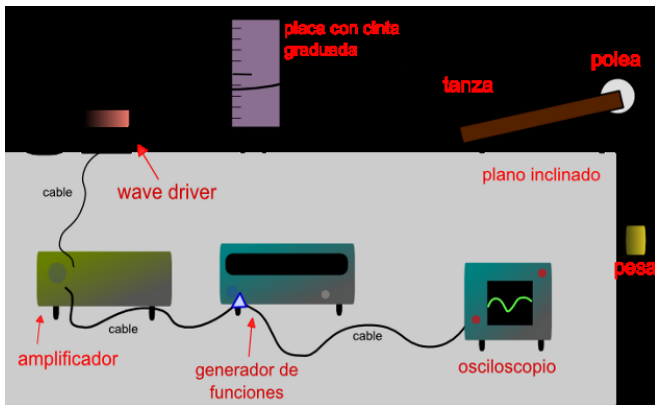


Figura 1: Montaje experimental para las cuerdas vibrantes

#### IV. MONTAJE EXPERIMENTAL

Tanto en el caso de la cuerda como en el de los gases se trata de generar en el sistema ondas estacionarias utilizando un generador de funciones para alimentar un vibrador mecánico que consiste en un parlante modificado. Cuando la frecuencia de excitación es cercana a una frecuencia de resonancia del sistema la perturbación es máxima. Al moverse levemente por debajo o por encima de dichas frecuencias la perturbación va decayendo siguiendo una ley como la expresada en las Ec. (31) y (32). Se trata entonces de generar montajes que permitan medir estas campanas de resonancia.

##### A. Cuerdas

Las cuerdas que se usan son tanzas de nylon multifilamento (NH) atadas en uno de sus extremos a un poste y reaseguradas con una nuez. En el otro extremo se cuelga un platillo con pesas ayudándose de un plano inclinado que cuenta con una roldana. Cerca del extremo del poste se coloca un vibrador mecánico (wave driver - Mechanical vibrator SF-9324, Pasco Scientific) alimentado por un generador digital (Tektronix CFG253) y un amplificador digital. La amplitud de oscilación de la cuerda se mide utilizando una cámara digital Panasonic Lumix DMC-LZ8 en modo video. En este modo se registran 50 cuadros por segundo. Para analizar las imágenes se utilizaron los cuadros obtenidos para la máxima oscilación de la cuerda y se midieron los apartamientos con una escala graduada registrada en el mismo cuadro. En la Fig. 1 puede verse un esquema del dispositivo experimental utilizado.

Cabe destacar que en este caso dependiendo de la tensión el fenómeno se vuelve rápidamente no lineal y en este caso las campanas de resonancia son altamente asimétricas [4–6]. Sin embargo para tensiones suficientemente altas se puede considerar como válida la aproximación lineal. En todas las mediciones se constató que la forma de la campana respondía al caso lineal.

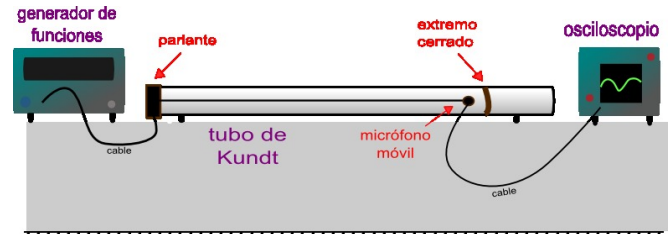


Figura 2: Montaje experimental.

##### B. Tubos de Kundt

El dispositivo experimental utilizado se muestra en la figura 2. Se utilizó un tubo de Kundt marca Pasco, con paredes de acrílico, un parlante en un extremo y un micrófono incorporado a una barra que permite deslizarlo a lo largo de la extensión del tubo. Para alimentar al parlante se utilizó un generador de funciones digital (HP-33120 A). Los datos se registraron desde el micrófono incorporado al tubo de Kundt, con una interfaz MPLI y con un osciloscopio digital (Tektronix TDS 1012B), y fueron analizados con el software Origin. Todas las mediciones se realizaron con el pistón situado de manera que la longitud del tubo, medida desde el parlante hasta el pistón, fuese de 80 cm.

En primer lugar se calibró el sistema parlante+micrófono del tubo de Kundt, buscando conocer su respuesta en amplitud para distintas frecuencias. Para ello se tomaron mediciones de la amplitud de presión medida por el micrófono en el rango de frecuencias en el que se trabajaría luego (0-2000 Hz), colocando al micrófono próximo al parlante, fuera del tubo de Kundt.

Para estudiar las resonancias del tubo se tomaron mediciones de la amplitud de presión en función de la frecuencia, para valores de entre 0 y 1900 Hz. Las mediciones se realizaron colocando el micrófono en el extremo cerrado del tubo (el extremo contrario al parlante) pues éste resultó siempre ser un máximo de presión.

Luego de caracterizar el tubo sin recubrir, se procedió a recubrir las paredes del tubo con distintos materiales, para estudiar su influencia en la disipación. Los materiales utilizados, además de las paredes del tubo, fueron: papel, film alveolar y fieltro. Se midió para cada caso la segunda campana de resonancia observada, con la intención de averiguar el coeficiente de amortiguamiento  $\gamma$  por dos medios distintos: estudiando la variación del ancho de la campana, y el corrimiento de la frecuencia a la que se produce el pico de resonancia.

#### V. RESULTADOS Y DISCUSIONES

##### A. Cuerdas

Se estudió la dependencia del coeficiente de amortiguamiento con la tensión y con el radio de las cuerdas trabajando alrededor de la frecuencia del modo fundamental. Para una tensión de  $(5,7 \pm 0,1)$  N se variaron los diámetros de las

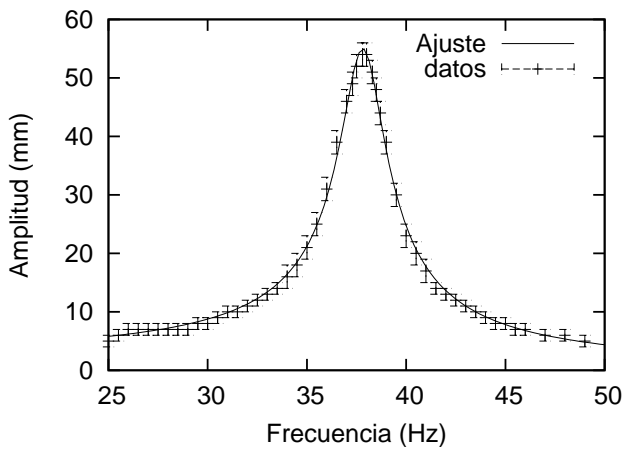


Figura 3: Amplitud vs. frecuencia para una cuerda de 0.3 mm de diámetro, sometida a una tensión de  $(5,7 \pm 0,1)$  N. Los puntos corresponden a los datos experimentales; la línea continua corresponde a la función dada por la Ec. (15). Del ajuste de la curva se obtiene un valor de  $\gamma = (2,26 \pm 0,03)$  Hz con  $\chi_n^2 = 0,66$ .

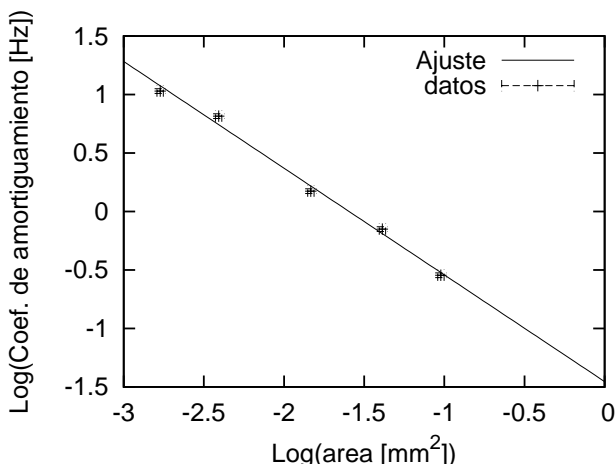


Figura 4: Logaritmo del coeficiente de amortiguamiento vs. logaritmo del área de la cuerda. El ajuste corresponde a la función  $a \text{Log}[R^2] + b$ , con  $a = -0,91 \pm 0,04$ .

cuerdas utilizándose 0.25, 0.3, 0.4, 0.5 y 0.6 mm. A modo de ejemplo, en la figura 3 se muestra una de las curvas de resonancia obtenidas, para la cuerda de 0.3 mm de diámetro. Se realizó el ajuste de la curva experimental a la función dada por la Ec. (15). En nuestro caso se trabajó en las proximidades del primer modo normal, correspondiente a una frecuencia  $\omega_0 = (37 \pm 1)$  Hz, y se barrieron frecuencias entre 25 y 0 Hz. Del ajuste correspondiente se obtiene el coeficiente de amortiguamiento  $\gamma = (2,26 \pm 0,03)$  Hz.

Para cada una de las cuerdas se realizó el ajuste correspondiente, obteniéndose en cada caso los valores del coeficiente de amortiguamiento. En la figura 4 se muestra la dependencia del coeficiente de amortiguamiento con el área de la cuerda. Puede observarse que, tal como se predijo a través del análisis dimensional, el coeficiente de amortiguamiento decae con la inversa del área.

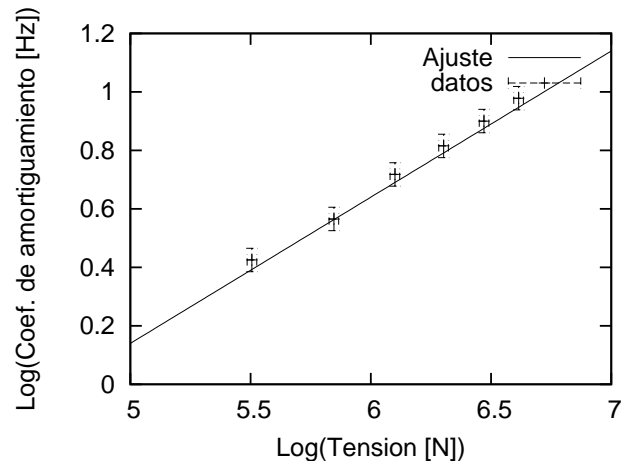


Figura 5: Logaritmo del coeficiente de amortiguamiento vs. logaritmo de la tensión aplicada al sistema en el reposo. El ajuste corresponde a la función  $a \text{Log}[T] + b$  con  $a = 0,50 \pm 0,01$ .

Para estudiar la dependencia del coeficiente de amortiguamiento con la tensión se trabajó con una cuerda de 0,6 mm y tensiones de 1,7, 2,7, 3,7, 4,7, 5,7, 6,7 y 7,7 N. Cabe destacar que, dentro del margen de error, la velocidad de propagación de la perturbación se mantiene constante dentro de este rango de tensiones. En la Fig. 5 se muestran los valores obtenidos para el coeficiente de amortiguamiento en función de la raíz cuadrada de la tensión. Se observa que se reproduce la dependencia lineal predicha por el análisis dimensional.

En la Fig. 7 se muestra a modo ilustrativo como evoluciona la figura que va formando la cuerda desde la frecuencia del modo fundamental hasta la frecuencia del primer modo excitado. Este es un buen punto para remarcar en un laboratorio de enseñanza ya que suele pasar desapercibido por los alumnos. Al excitar con un forzamiento armónico, siempre se generan ondas estacionarias en la cuerda, es decir siempre la cuerda tendrá una forma armónica dada por las expresiones Ec. (7) o Ec. (16), aunque no se esté en resonancia. Cuando la frecuencia se acerca a la correspondiente a un modo propio, la amplitud del movimiento se magnifica y el sistema entra en resonancia. Es por eso que si la amplitud de oscilación del forzamiento es pequeña ese fenómeno podría pasar desapercibido. Se puede ver tanto en el experimento como en las simulaciones numéricas realizadas a partir del modelo teórico que en la frecuencia del modo fundamental el nodo está cerca del excitador y el antinodo tiene una gran amplitud. A medida que la frecuencia crece el antinodo decrece su amplitud y el nodo cercano al excitador parece “caminar” hacia el centro de la cuerda hasta que cuando llega al centro la amplitud de los antinodos comienza a crecer formándose el primer modo excitado. A partir de la Ec. (16) puede verse que los nodos estarán en posiciones  $x_{nodo}$  que satisfagan la relación  $\sin(k(L - x_{nodo})) = 0$  y por lo tanto debe cumplirse que

$$L - x_{nodo} = \frac{c\pi}{\omega} \quad (34)$$

Para distintas frecuencias, se determinó experimentalmente la posición en la que se ubicaba este nodo. Se muestra en la Fig.

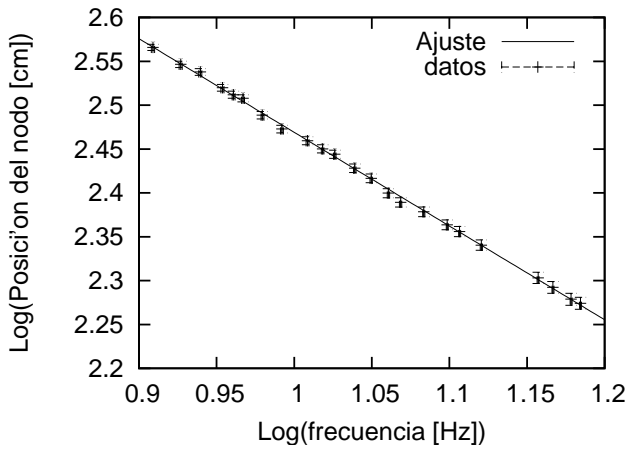


Figura 6: Logaritmo de la posición del nodo (medida desde el extremo fijo) en función del logaritmo de la frecuencia, para una cuerda de 0.7 mm de diámetro. Las frecuencias varían entre las que corresponden al modo fundamental y al primer armónico.

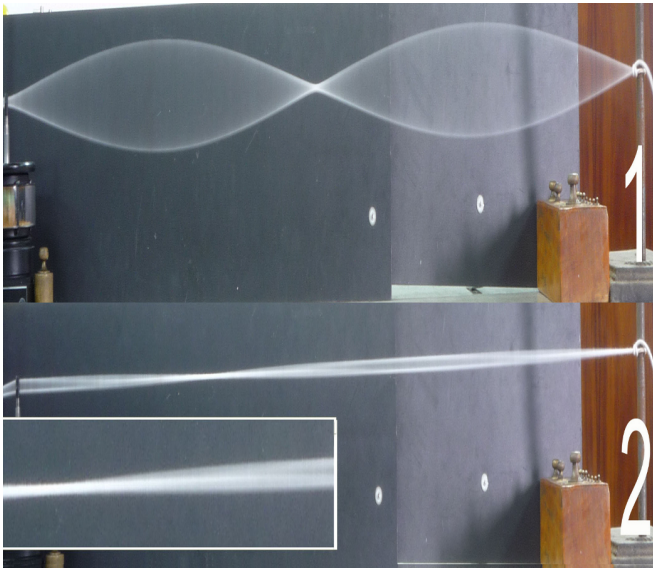


Figura 7: 1) Cuerda oscilando en el primer armónico. 2) Oscilación en un modo estacionario para una frecuencia entre la fundamental y el primer armónico; se observa un nodo en una posición intermedia (véase el zoom).

6 el logaritmo de la posición de los nodos medida desde el extremo fijo de la cuerda en función del logaritmo de la frecuencia. Del ajuste de los datos experimentales puede observarse que se obtiene una recta de pendiente  $-1$ , en concordancia con la Ec. (34).

### B. Tubo de Kundt

En primer lugar se estudió la respuesta en frecuencia del sistema parlante-micrófono y se encontró que ésta era aproximadamente constante a partir de una frecuencia de alrededor

de 200 Hz. Para frecuencias mayores a 200 Hz se encontró que el rango dinámico era lineal dentro de los errores de medición para las amplitudes usadas.

En la figura 8 se muestra la curva de resonancia medida para el tubo cerrado, con el pistón a una distancia de 80 cm del parlante y sin ningún recubrimiento en las paredes.

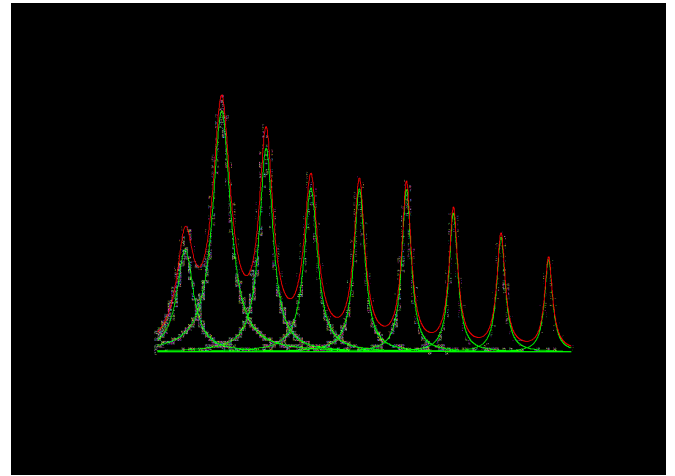


Figura 8: Curva de resonancia con tubo cerrado,  $L = 80$  cm, sin recubrimiento.

Puede notarse que el primer máximo tiene una amplitud menor de lo esperable, si se asume un decaimiento de la forma  $1/\omega$  para la amplitud de los máximos, como lo indica la Ec. (15). Esta anomalía se debe a una alinealidad ya mencionada en la respuesta en frecuencia del parlante utilizado.

El resultado de las mediciones realizadas de la segunda campana de resonancia con distintos materiales recubriendo las paredes del tubo se ilustra en la figura 9. Se ajustaron a las curvas obtenidas sendas campanas lorentzianas; los resultados se encuentran detallados en el cuadro I.

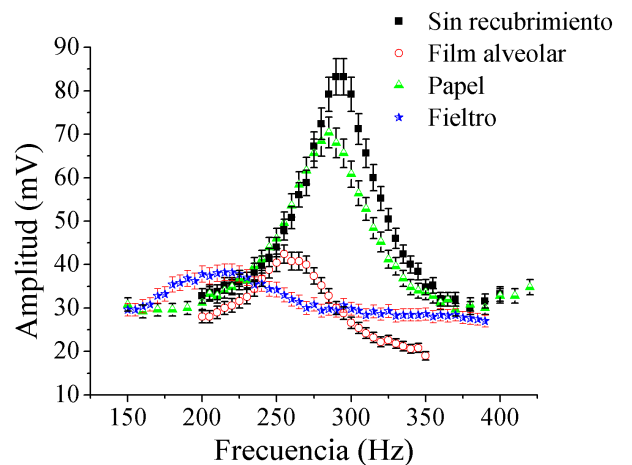


Figura 9: Segundas campanas de resonancia medidas para el tubo sin recubrimiento en sus paredes, y recubierto con papel, film alveolar y filtro. Se observan los efectos del ensanchamiento de las campanas y el corrimiento hacia abajo de las frecuencias de resonancia.

| Material          | Resonancia (Hz) | Ancho (Hz) |
|-------------------|-----------------|------------|
| Sin recubrimiento | 291             | 51         |
| Papel             | 284             | 57         |
| Film alveolar     | 256             | 82         |
| Paño Lenci        | 213             | 87         |

Cuadro I: Resultados del ajuste de campanas lorentzianas a las campanas de resonancia para distintos materiales.

Tal como indica la experiencia, el material que presenta un mayor amortiguamiento sonoro es el fieltro, seguido del film alveolar (plástico de burbujas), el papel y por último el tubo sin recubrimiento. Se ha intentado cuantificar el amortiguamiento mediante dos métodos distintos: el corrimiento en las frecuencias de resonancia, y la variación del ancho de las campanas.

Al medir las variaciones de presión en los extremos del tubo, se registró siempre un máximo en el extremo del pistón, por lo que se deduce que dicha condición de contorno corresponde a la de tubo cerrado. Sin embargo, la condición de contorno en el extremo del parlante no está bien definida. Allí se observó presión nula para bajas frecuencias (modo fundamental), y un máximo de presión para altas frecuencias (a partir del cuarto modo normal), existiendo condiciones intermedias para las frecuencias entre las mencionadas. De esto se deduce que, para el máximo estudiado, la frecuencia del tubo sin amortiguar debe estar entre las frecuencias correspondientes a la segunda resonancia de un tubo ideal con dicho extremo cerrado ( $f = 425$  Hz) y abierto ( $f = 321$  Hz). Calculando dichas cotas para el corrimiento se obtuvieron los datos expuestos en el cuadro II.

| Material          | $\gamma_{\text{mín}}-\gamma_{\text{máx}}$ corrimiento (Hz) |
|-------------------|--|
| Sin recubrimiento | 270-620  |
| Papel             | 300-630  |
| Film alveolar     | 390-680  |
| Paño Lenci        | 480-730  |

Cuadro II: Coeficientes de amortiguamiento calculados a partir de los corrimientos en las frecuencias de resonancia.

Un segundo método de estimación del coeficiente de amortiguamiento se basa en la determinación del ancho de las campanas de resonancia, que está relacionado con  $\gamma$  por medio de la Ec. (15). Los resultados obtenidos de calcular los anchos de las campanas medidas se muestran en el cuadro III.

| Material          | $\gamma$ ancho (Hz) |
|-------------------|---------------------|
| Sin recubrimiento | 320                 |
| Papel             | 360                 |
| Film alveolar     | 510                 |
| Paño Lenci        | 550                 |

Cuadro III: Coeficientes de amortiguamiento calculados a partir de los anchos de las campanas.

Como puede observarse, los coeficientes de amortiguamiento calculados por ambos métodos coinciden satisfactoriamente, más aún teniendo en cuenta la naturaleza aproximada de los métodos utilizados. La validez de los resultados obtenidos mediante el primer método está limitada por la de la hipótesis efectuada respecto de la frecuencia no amortiguada de rozamiento. En cuanto al segundo, debe señalarse que, si bien se ha ajustado una única curva de resonancia a los datos obtenidos para cada campana, las mismas son en realidad superposiciones de infinitas curvas. En el análisis realizado, por lo tanto, se desprecia la influencia de las campanas adyacentes, lo cual ocasiona una inexactitud en el ancho de los máximos.

## VI. CONCLUSIONES

El tema de modos normales en sistemas continuos suele plantearse en las primeros cursos de Física. Por lo general, se estudia experimentalmente a estos sistemas introduciendo una excitación externa de frecuencia variable. Cuando la frecuencia de excitación coincide con la de un modo propio el sistema entra en resonancia. Claro está que el modelado de un sistema físico real requiere que se considere que en el proceso hay disipación de energía que produce una disminución de la respuesta que se esperaría en una resonancia *ideal*. La constante de amortiguamiento es un parámetro que permite estimar cuánto se aparta el sistema del caso sin pérdidas. Identificar en cada problema cuáles son los parámetros que influyen sobre la constante de amortiguamiento y modelar cómo depende esta constante de los diversos parámetros es un problema que puede ser complejo pero que merece ser introducido y discutido en un laboratorio de enseñanza. Simultáneamente, aparecen dificultades en el modelado de las situaciones de laboratorio que complican este análisis. Por un lado, tanto las condiciones de contorno reales como el forzamiento utilizado en la práctica pueden ser difíciles de modelar. Adicionalmente, en algunos casos los fenómenos se apartan rápidamente del modelo lineal comportándose de formas poco esperadas.

En este trabajo se muestra un análisis dimensional para el caso de la cuerda que puede ser fácilmente implementado con cuerdas de distintos grosores y modificando la tensión. Para el caso de tubos de Kundt se muestran resultados para experimentos realizados con tubos standard que pueden ser fácilmente recubiertos con diversos materiales de sencilla adquisición.

- [1] F. Crawford, *Berkeley Physics Course, Vol. 3 (Waves)* (McGraw-Hill College, 1968).
- [4] N. Molteni, T. C. y Tuffillaro, *Am. J. Phys.* **72**, 1157 (2004).
- [5] A. Nayfeh and D. Mook, *Nonlinear Oscillations* (John Wiley, 1995).
- [6] R. Narasimha, *J. Sound Vib.* **8**, 134 (1968).
- [7] S. Flügge, ed., *Handbuch der Physik, Cap. 1, "Linear Acoustic Theory"*, M.Morse y K.U. Ingard (Springer-Verlag, 1961).

- [2] O. Martínez, *Ondas: es Física* (EUDEBA, 2009).
- [3] A. P. French, *Vibraciones y Ondas* (Reverté, España, 2006).
- [8] S. Nettel, *Wave Physics - Oscillations, Solitons, Chaos* (Springer, 1997).
- [9] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, 1977).