

VERIFICACIONES EXPERIMENTALES DE LA TEORÍA DE PROPAGACIÓN DE ERRORES

Raúl T. Mainardi*

Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF)- Universidad Nacional de Córdoba.
Ciudad Universitaria – 5000 Córdoba - Argentina
e-mail: mainardi@famaf.unc.edu.ar

En este trabajo se presentan dos simples experimentos para verificar la teoría de propagación de errores. La relación entre las magnitudes medidas está provista por la ecuación para la conexión de resistencias en serie en el primer experimento y por la ecuación para la conexión de resistencias en paralelo en el segundo experimento. Dos conjuntos de 100 resistencias cada uno, se combinan entre sí tomando, en forma aleatoria, un elemento de cada conjunto a la vez conectándolos, primero en serie y luego en paralelo, con lo que se generan dos nuevos conjuntos de valores de resistencias. Los valores medios y las varianzas de las distribuciones de los valores medidos, para cada conjunto, permiten verificar la propagación de errores.

Two simple experiments that allow the validation of the theory of the propagation of errors are presented in this paper. The relation between the measured magnitudes is given by the connection of resistors in series equation, for the first experiment, and by the connection of resistors in parallel equation for the second experiment. Two sets of 100 resistors each are combined, taking randomly one element of each set at a time, to generate two new sets of 100 resistors as the result of the connection of resistors in series and in parallel. Mean values and variances of the measured values for each set allow the validation of the theory.

INTRODUCCIÓN

La teoría de propagación de errores establece que si una magnitud R depende de magnitudes R_1 y R_2 a través de la relación $R=R(R_1,R_2)$ la varianza σ^2 del valor medio de R viene dada por la ecuación⁽¹⁾:

$$\sigma^2 = (\partial R/\partial R_1)^2 \times \sigma_1^2 + (\partial R/\partial R_2)^2 \times \sigma_2^2 \quad [1]$$

en donde la varianza de R_1 es σ_1^2 y la de R_2 es σ_2^2 .

Dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en serie producen una resultante:

$$R_s = R_1 + R_2. \quad [2]$$

en donde el subíndice s es por conexión en serie. Aplicando la ecuación [2] a la ecuación [1], obtenemos:

$$\sigma_s^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \quad [3]$$

Si ahora se considera el caso de las resistencias conectadas en paralelo tendremos que la resultante es:

$$R_p = R_1 \times R_2 / [R_1 + R_2] \quad [4]$$

Similarmente, de la aplicación de la ecuación [4] a la ecuación [1] obtenemos:

$$[\sigma_p]^2 = [R_p/R_1]^4 \times \sigma_1^2 + [R_p/R_2]^4 \times \sigma_2^2 \quad [5]$$

En estas ecuaciones no hemos considerado la covarianza⁽¹⁾ ya que suponemos que los conjuntos de resistencias R_1 y R_2 producen datos estadísticamente

independientes. Sin embargo, si a pesar de todo se calcula dicha covarianza, se observa que no es nula y que disminuye rápidamente, en ambos experimentos, hasta que para $N=100$ es completamente despreciable en el cálculo de la varianza resultante.

MATERIALES.

Para estos experimentos es necesario contar con un tester digital de al menos tres dígitos y medio y dos conjuntos de 100 resistencias que se adquieren en comercios de electrónica. El costo de estos elementos es muy accesible y para el análisis de los datos es suficiente usar una calculadora científica.

La selección de los valores de las resistencias a utilizar no es crítico aunque para hacer más evidente los efectos de la propagación de errores a la resistencia resultante es necesario adecuar los valores de las resistencias a medir con la escala a seleccionar en el tester. Así si usamos la escala de $2K\Omega$, usaremos resistencias menores a $1K\Omega$, tal que al sumarlas en serie no superen el rango de la escala del tester, optimizando de esta manera el número de dígitos disponible. Existe, además, la presunción de que al cambiar de escala pueden aparecer errores sistemáticos que desvirtúen el objetivo de este experimento.

Es importante resaltar que debemos reconocer dos clases de errores experimentales. En primer lugar, los errores instrumentales son aquellos que surgen de una falta de precisión en el instrumento de medición, incluyendo al observador y en segundo lugar las incertezas estadísticas que pueden estar asociadas a la medición de una dada cantidad en sistemas similares (por ejemplo tiempos de oscilación de péndulos físicos,

o tiempos de vida media nucleares, etc.), o en procesos industriales de fabricación, en los que un parámetro dado del producto final (un espesor, una longitud, una resistencia, etc.) no se obtiene con mucha precisión. En este trabajo los errores instrumentales se consideran despreciables ya que la apreciación del tester es mucho menor que las fluctuaciones del proceso de fabricación, siendo estas últimas las responsables del ancho significativo de las distribuciones de valores medidos.

RESULTADOS

Se adquirieron dos paquetes de resistencias de 820Ω "al 5%", según la jerga electrónica. La distribución de los valores obtenidos son mostrados en las Figuras 1 y 2.

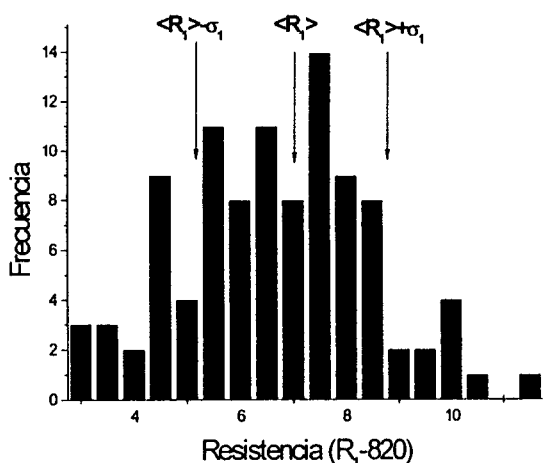


Figura 1. Histograma de los datos experimentales del primer conjunto de resistencias.

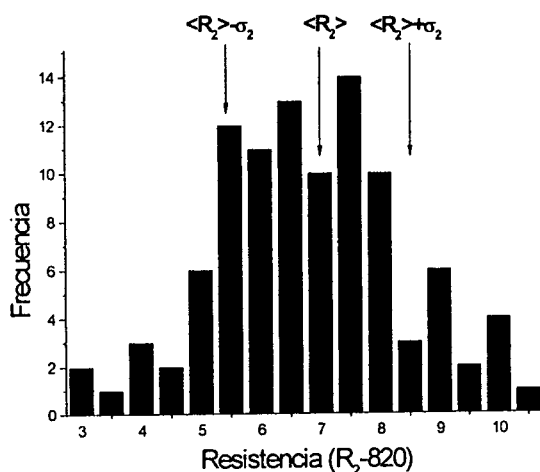


Figura 2. Histograma de los datos experimentales del segundo conjunto de resistencias

Los parámetros estadísticos que representan los datos de las Figuras 1 y 2 están listados en la Tabla 1. Se puede pensar que el proceso de fabricación es

bastante estable al producir un valor medio constante, pero a veces funciona mejor ya que la varianza en un conjunto es mayor que en el otro.

$\langle R_1 \rangle$	σ_1^2	$\langle R_2 \rangle$	σ_2^2	$\sigma_1^2 + \sigma_2^2$
826,88	3,11	827,00	2,45	5,56

Tabla 1. Resultados de las mediciones para los dos conjuntos de resistencias. Todas las magnitudes tienen unidades de Ohms.

En las Figuras 3 y 4 se muestran los resultados de las mediciones de las resistencias conectadas en serie y en paralelo respectivamente. En la Tabla 2 se listan los parámetros estadísticos que representan a cada distribución. Realzados en negrita están los valores calculados y medidos de la varianza resultante para cada experimento.

$\langle R_s \rangle$	σ_s^2	$\langle R_1 \rangle + \langle R_2 \rangle$	σ_s^2 (Ec.3)
1654,00	5,44	1653,88	5,56

$\langle R_p \rangle$	σ_p^2	$\langle R_1 \rangle / 2$	$\langle R_2 \rangle / 2$	σ_p^2 (Ec.5)
413,45	0,36	413,44	413,50	0,35

Tabla 2. Resultados de las mediciones para el caso de la conexión de resistencias en serie (arriba) y en paralelo (abajo). Todas las magnitudes tienen unidades de Ohms.

Se puede fácilmente mostrar en forma analítica que:

$$\langle R_s \rangle = \langle R_1 \rangle + \langle R_2 \rangle$$

y también que:

$$\langle R_p \rangle = \langle R_1 \rangle / 2 = \langle R_2 \rangle / 2$$

ya que para el conjunto de resistencias utilizadas $\langle R_1 \rangle = \langle R_2 \rangle$ dentro del 0,2% de diferencia relativa.

Si se realiza el experimento con un conjunto para el cual $\langle R_1 \rangle \neq \langle R_2 \rangle$, esta ecuación para $\langle R_p \rangle$ puede generalizarse sin inconvenientes.

En la tabla 2, parte superior, podemos observar que las diferencias entre σ_s^2 medido directamente y σ_s^2 obtenido por propagación (Ec.3) son muy pequeñas. El tester nos da la primera cifra decimal para las mediciones. Los valores calculados de resistencias y varianzas se dan con dos cifras decimales para que se pueda apreciar mejor la diferencia entre valores calculados y medidos, siendo que estas diferencias están en la segunda cifra decimal. Una conclusión similar podemos sacar para σ_p^2 , observando la parte inferior de la tabla 2. Esto nos permite decir que la ley de propagación de errores se verifica con altísima precisión.

Un último aspecto a resaltar en estas consideraciones es que en algunos textos^(3,4) se propone

que las incertezas, para el caso de suma de magnitudes, se propagan como:

$$\sigma_s = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Para este experimento el valor de σ_s medido es $2,33\Omega$. El valor que se obtiene de esta última ecuación es $3,33\Omega$, mientras que el de la ecuación [3] es $2,36\Omega$. Con lo que vemos que el experimento respalda lo expresado en la ecuación 1.

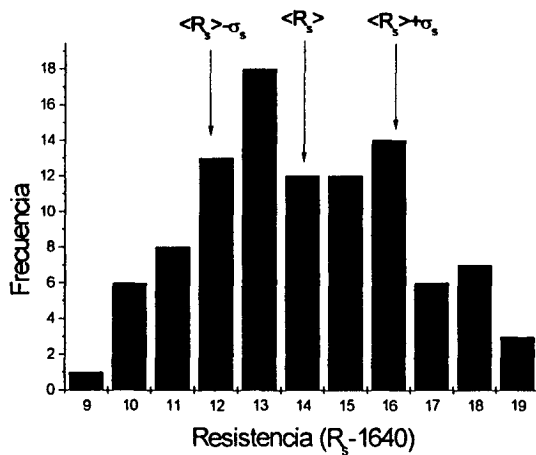


Figura 3. Histograma de los datos experimentales obtenidos de las resistencias conectadas en serie.

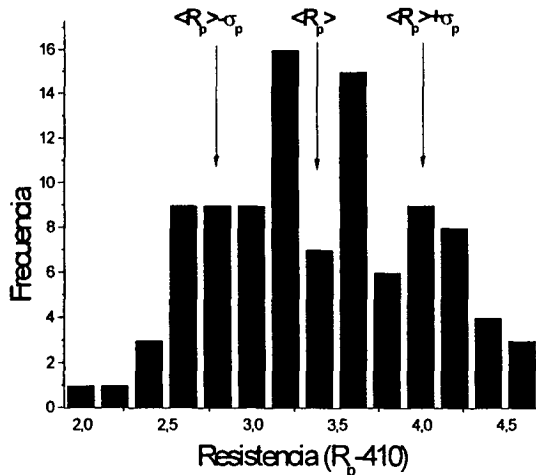


Figura 4. Histograma de los datos experimentales obtenidos de las resistencias conectadas en paralelo.

CONCLUSIONES

Esta verificación experimental de la ecuación de propagación de errores, implementada como una simple práctica de laboratorio de alto contenido didáctico, brinda la oportunidad de demostrar este concepto no siempre bien asimilado por los alumnos.

No existen en las materias básicas de física ejemplos con relaciones entre cantidades medidas tan complicadas como las que provee la conexión de resistencias en paralelo. Para el caso de la suma de resistencias en serie existen relaciones similares como

la medición de espesores de láminas con un calibre y luego la medición de dos láminas superpuestas, o también el pesar objetos similares y luego pesarlos de a dos a la vez, etc., es decir el instrumento con el que se miden la magnitudes R_1 y R_2 es el mismo con el que se mide la magnitud resultante, R . En algunos libros de texto⁽²⁾ se describen experimentos de propagación de errores en los que para la medición de las magnitudes primarias se utiliza un instrumento de medición y para la magnitud derivada uno totalmente distinto, lo que no permite una efectiva verificación de la teoría.

Otro aspecto digno de mención es que podemos "fabricar" distribuciones estadísticas de las magnitudes medidas seleccionando resistencias de valores tales que la forma sea triangular, rectangular, semicircular, etc. Para cualquiera de estas formas podemos calcular el valor medio y la varianza de la distribución y verificar que la teoría de propagación de errores es válida independientemente de la forma de las distribuciones.

Es menester destacar que la medición de una única resistencia 100 veces produciría una distribución muy angosta, con un ancho del orden de la apreciación del tester. La realización de estos experimentos con dichas distribuciones no produciría resultados tan llamativos y convincentes como los presentados en este trabajo.

La fe ciega en la teoría de propagación de errores que los profesores despiertan en los estudiantes de física, es necesario fundamentarla en hechos concretos como los que ofrecen los experimentos descritos en este trabajo. Experimentos simulados por computadora han sido descritos anteriormente⁽⁵⁾, pero una vez más es necesario resaltar que son preferibles experimentos reales, que contribuyen a desarrollar los hábitos de paciencia y disciplina para medir, que luego serán parte de la vida de un físico.

REFERENCIAS.

- ¹P.R. Bevington and D.K. Robinson *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. (WCB/McGraw-Hill, New York, 1992), pp. 42-43.
- ²H. D. Young. *Statistical Treatment of Experimental Data*. (McGraw-Hill Book Company, New York, 1962), pp. 4-6
- ³Ref. 2, pp. 7-8
- ⁴W. Edwards Deming. *Statistical Adjustment of Data*. (Dover Publications, Inc., New York, 1964), p. 38.
- ⁵Mark A. Peterson, "Error Analysis by Simulation," *Am. J. Phys.* 59 (4), 355-357 (1991).