

## Corrientes viscogravitatorias en dos capas fluidas superpuestas

Carlos Alberto Perazzo<sup>1,\*</sup> y Julio Gratton<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Universidad Favaloro, Solís 453, 1078 Buenos Aires.

<sup>2</sup>INFIP-CONICET, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA, Ciudad Universitaria, Pab. I, 1428 Buenos Aires.

Con el propósito de obtener relaciones sencillas que describan el engrosamiento de la corteza terrestre debido al movimiento convergente de dos placas litosféricas, estudiamos aquí el flujo convergente de dos líquidos Newtonianos superpuestos de diferentes densidades y viscosidades. Evaluamos las fuerzas que actúan sobre un tramo de la capa superior, y planteamos el balance de fuerzas. La componente vertical del balance nos lleva a la condición de isostasia. La componente horizontal permite obtener la razón de aspecto del relieve producido por la convergencia. Finalmente de la conservación de la masa obtenemos leyes de escala para el ancho y la altura del relieve.

With the purpose of obtaining simple relationships that describe the thickening of the Earth's crust due to the convergent motion of two lithospheric plates, we study the flow of two superimposed layers of Newtonian liquids with different densities and viscosities. We evaluate the forces over a segment of the upper layer, and we impose the balance of forces. The vertical component of the balance condition leads to the isostasy condition. The horizontal component allows to derive the aspect ratio of the relief produced by the convergence. Finally, from the conservation of mass we obtain scaling laws for the width and the height of the ridge.

### I. INTRODUCCIÓN

Recientemente investigamos la formación de una cresta debida al flujo convergente de una capa líquida apoyada sobre un substrato móvil [1–3] y encontramos para tiempos  $T$  pequeños un régimen autosemejante en el cual la altura y el ancho del relieve escalan como  $T^{1/2}$  independientemente de la reología y de la asimetría del flujo. Para tiempos grandes se alcanza otro régimen autosemejante en el que la altura y el ancho siguen las leyes de escala obtenidas en [4]. Este tipo de problema tiene interés por su relación con la formación de cordilleras debido al acortamiento y espesamiento de la corteza que ocurre en la colisión de dos placas continentales o cuando una placa oceánica es subducida debajo de un continente. Sin embargo el modelo de una única capa líquida sobre un substrato móvil no es adecuado para describir este proceso debido a que la litosfera es esencialmente una estructura de dos capas en que la corteza (más viscosa) reposa sobre el manto superior (más denso y menos viscoso) y está separada de éste por la discontinuidad de Mohorovičić (denominada Moho). En las escalas temporales de la orogénesis la litosfera está en equilibrio hidrostático local (una condición denominada isostasia) lo que implica que la topografía regional visible está acompañada por una correspondiente “antitopografía” del Moho (denominada raíz). Una explicación más detallada puede encontrarse en [5].

Por este motivo recientemente hemos investigado la formación de crestas en un modelo de dos capas y he-

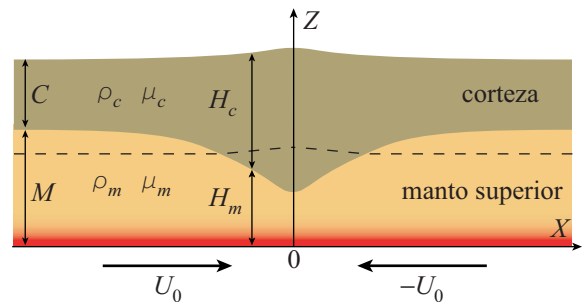


Figura 1: Geometría del modelo de dos capas. La línea de trazos representa una isobara.

mos mostrado que con buena aproximación el fenómeno es autosemejante y que la altura y el ancho del relieve crecen en proporción a la raíz cuadrada del tiempo [6].

En este trabajo mostramos por medio de argumentos físicos sencillos que dichas leyes de escala provienen del balance de fuerzas que actúan sobre la corteza, que se deben básicamente a la gravedad, el empuje de Arquímedes y las fuerzas de origen viscoso ejercidas por el manto superior debidas al flujo convergente de la litosfera.

### II. BALANCE DE FUERZAS SOBRE LA CORTEZA EN EL MODELO DE DOS CAPAS

Sea una película líquida constituida por dos capas (figura 1). La capa superior (corteza) tiene viscosidad  $\mu_c$ , densidad  $\rho_c$  y espesor  $H_c(X, T)$ . La capa inferior (manto superior) tiene viscosidad  $\mu_m$ , densidad  $\rho_m$  y espesor  $H_m(X, T)$ . Valores típicos para una placa continental son  $\rho_c \approx 2,7 \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho_m \approx 3,2 \text{ g/cm}^3$ , y  $\mu_c \gg \mu_m$ .

Inicialmente ambas capas son uniformes y  $H_c(X, 0) = C$  y  $H_m(X, 0) = M$ . Para modelar la tracción basal que

\*Investigador del CONICET; Correo electrónico: perazzo@favaloro.edu.ar

\*\*Investigador del CONICET; Correo electrónico: jgratton@tinfiplfp.uba.ar

se supone impulsa el movimiento de las placas suponemos que en  $T = 0$  la base de la litosfera ( $Z = 0$ ) se pone en movimiento con una velocidad  $U_0 > 0$  para  $x < 0$  y  $-U_0$  para  $x > 0$ . Suponemos además que se cumple la isostasia, luego para  $0 \leq Z \leq H_m$  la presión no depende de  $X$ .

Notar que, a medida que aumenta el espesor de la corteza, parte de la masa del manto litosférico cruza la frontera entre la litosfera y la capa subyacente del manto (llamada astenosfera). Por lo tanto la masa del manto litosférico no se conserva. Este modelo es análogo al de Royden [7], pero es más sencillo porque trata la corteza como una única capa y la condición de tracción basal se cumple en la base de la litosfera y no en el Moho.

Por último suponemos que el flujo es lento y está dominado por la viscosidad y que la pendiente de la superficie libre es muy pequeña, de modo que la componente horizontal de la velocidad es mucho mayor que la componente vertical, y que su gradiente vertical es mucho mayor que el horizontal. Entonces la presión es hidrostática.

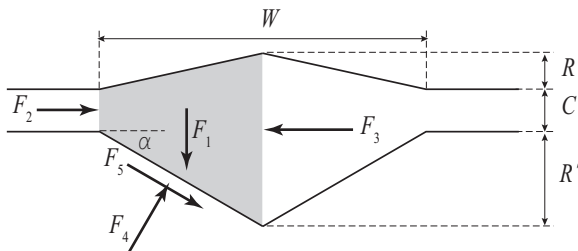


Figura 2: Fuerzas sobre un tramo de la corteza.  $F_1$  es el peso,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$  son debidas a la presión hidrostática y  $F_5$  es la fuerza viscosa ejercida por el manto superior.

En la figura 2 se muestra un tramo de la corteza y las fuerzas (por unidad de longitud transversal) que actúan sobre él. Para simplificar vamos a suponer que el perfil de la cordillera (y por ende también el de la raíz) es triangular, cosa que por otra es una buena aproximación a los perfiles reales [6]. Llamamos  $W$  al ancho del relieve,  $R$  a su altura máxima y  $R'$  a la profundidad máxima de la raíz. El peso de dicho tramo de la corteza es

$$F_1 = \frac{1}{2} \rho_c g W \left[ C + \frac{1}{2} (R + R') \right]. \quad (1)$$

Sobre la cara izquierda actúa la fuerza  $F_2$  debida a la presión, dada por

$$F_2 = \int_0^C \rho_c g y dy = \frac{1}{2} \rho_c g C^2, \quad (2)$$

y sobre la cara derecha actúa  $F_3$ , dada por

$$F_3 = \int_0^{C+R+R'} \rho_c g y dy = \frac{1}{2} \rho_c g (C + R + R')^2. \quad (3)$$

La presión sobre la cara oblicua de la raíz da lugar a una

fuerza  $F_4$ , cuya componente horizontal es

$$F_{4x} = \int_C^{C+R'} [\rho_c g C + \rho_m g (y - C)] dy = \rho_c g R' \left( C + \frac{\rho_m R'}{2 \rho_c} \right), \quad (4)$$

mientras que su componente vertical es

$$F_{4y} = F_{4x} \cot \alpha = \frac{1}{2} \rho_c g W \left( C + \frac{\rho_m R'}{2 \rho_c} \right). \quad (5)$$

Finalmente sobre dicha cara actúa la fuerza viscosa, cuya componente horizontal se puede estimar como

$$F_{5x} = \mu_m \frac{U_0 W}{M}, \quad (6)$$

suponiendo que  $R' \ll M$ .

La componente vertical de la condición de equilibrio es  $F_1 = F_{4y}$ , dado que el flujo es esencialmente horizontal (pues  $R, R' \ll W$ ) y entonces la componente vertical de la fuerza viscosa se puede despreciar. Resulta así

$$\rho_c R = (\rho_m - \rho_c) R'. \quad (7)$$

Esta es la condición de isostasia y permite eliminar  $R'$  para obtener ecuaciones sólo en términos de la altura  $R$  del relieve visible. Para los valores dados anteriormente se obtiene  $R' = 5,4R$ .

Llamando  $F_p = F_3 - F_2 - F_{4x}$  a la suma de todas las fuerzas horizontales debidas a las diferencias de presión resulta

$$F_p = \frac{1}{2} \rho_c g R \left( 2C + \frac{\rho_m R}{\rho_m - \rho_c} \right). \quad (8)$$

La componente horizontal de la condición de equilibrio es  $F_p = F_{5x}$  de donde se obtiene

$$\mu_m \frac{U_0 W}{M} = \frac{1}{2} \rho_c g R \left( 2C + \frac{\rho_m R}{\rho_m - \rho_c} \right). \quad (9)$$

Finalmente esta expresión se reduce a

$$\mu_m \frac{U_0 W}{M} = \rho_c g R C, \quad (10)$$

si  $C \gg \rho_m R / 2(\rho_m - \rho_c)$ . Con los datos dados anteriormente esta condición equivale a  $C \gg 3,3R$ , lo que se cumple razonablemente bien puesto que  $C \approx 30$  km y en ninguna cordillera  $R$  supera los 5 km.

De (10) podemos obtener la razón de aspecto  $\theta = W/R$  de la cordillera como

$$\theta = \frac{2 \rho_c g C M}{\mu_m U_0}. \quad (11)$$

Por lo tanto  $\theta$  es constante mientras se cumpla que  $R' \ll M$  y  $C \gg \rho_m R / 2(\rho_m - \rho_c)$ .

### III. LEYES DE ESCALA

La conservación de la masa implica que

$$2U_0CT = \frac{1}{2}W(R + R'). \quad (12)$$

De ésta y las ecuaciones (7) y (10) obtenemos

$$R = U_0 \sqrt{\frac{2\mu_m(\rho_m - \rho_c)}{gM\rho_m\rho_c}} \sqrt{T}, \quad (13)$$

y

$$W = 2C \sqrt{\frac{2gM\rho_c(\rho_m - \rho_c)}{\mu_m\rho_m}} \sqrt{T}. \quad (14)$$

Es interesante destacar que el relieve  $R$  no depende del espesor de la corteza y es directamente proporcional a la velocidad de convergencia. Por otra parte, el ancho  $W$  no depende de  $U_0$  y es proporcional al espesor de la corteza.

### IV. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el análisis precedente hemos supuesto que el problema tiene simetría plana y que la longitud de la cordillera es infinita. Por lo tanto se puede aplicar sólo a formaciones montañosas lineales o aproximadamente lineales cuya longitud sea mucho mayor que el ancho. Por otra parte es razonable pensar que vale sólo para cordilleras jóvenes

en las cuales la erosión no ha modificado sustancialmente el relieve.

Los parámetros que determinan la razón de aspecto dada por (11) difieren poco de una cordillera a otra. La velocidad de convergencia  $U_0$  en general es de algunos centímetros por año, pero puede variar apreciablemente de un caso a otro y casi seguramente es esta variación la que puede dar lugar a diferencias importantes en la razón de aspecto. Con estas salvedades, los valores de  $\theta$  que se obtienen de (11) no son inconsistentes con los datos observacionales.

Las leyes de escala (13) y (14) difieren de las obtenidas en [4]. La discrepancia se debe principalmente a que en dicho trabajo el esfuerzo viscoso fue estimado de modo diferente, al considerar que el gradiente de velocidad ocurre en un espesor del orden de la profundidad de la raíz, y no del orden de todo el manto litosférico como se hizo en el presente trabajo.

Corresponde mencionar que otros autores [8] han realizado estimaciones análogas a las que presentamos aquí, pero basadas en un modelo diferente, por lo que los resultados obtenidos para la razón de aspecto difieren de los nuestros. Sin embargo, la incertidumbre en los valores de los parámetros reológicos de la litosfera no permite discernir cuál es el modelo que mejor reproduce los valores observados de la razón de aspecto.

#### Agradecimientos

Agradecemos el subsidio PICTO FONCYT/UF 21360 BID OC/AR 1728 del FONCYT y la Universidad Favalaro.

- 
- [1] C. A. Perazzo and J. Gratton, *Phys. Fluids* **20**, 043103 (2008).  
 [2] C. A. Perazzo and J. Gratton, *J. Phys.: Conf. Ser.* **166**, 012012 (2009).  
 [3] J. Gratton and C. A. Perazzo, *J. Phys.: Conf. Ser.* **166**, 012011 (2009).  
 [4] J. Gratton, *J. Geophys. Res.* **94**, 15627 (1989).  
 [5] J. Gratton and C. A. Perazzo, *Anales AFA* **19**, 3 (2008).  
 [6] C. A. Perazzo and J. Gratton, *ArXiv e-prints* (2009), 0907.2347.  
 [7] L. Royden, *J. Geophys. Res. (Solid Earth)* **101**, 17679 (1996).  
 [8] O. Vanderhaeghe, S. Medvedev, P. Fullsack, C. Beaumont, and R. Jamieson, *Geophys. J. Int.* **153**, 27 (2003).