

ESTRUCTURA DE VÍNCULOS EN EL MÉTODO DE FADDEEV-JACKIW

E. C. Manavella

*Instituto de Física Rosario, Bv. 27 de Febrero 210 Bis, Rosario, Argentina
y Departamento de Física (UNR), Av. Pellegrini 250, Rosario, Argentina
e-mail: manavell@ifir.edu.ar*

Se introduce un método para la determinación de la estructura de vínculos en el contexto de la generalización supersimétrica del formalismo de cuantificación de Faddeev-Jackiw y desde el punto de vista de la teoría de campos. En particular, se muestra cómo los vínculos de primera clase aparecen en forma directa utilizando los modos cero de la supermatriz simpléctica modificada. Por otro lado, este algoritmo se aplica a un modelo simple no relativista clásico para la interacción electromagnética de materia fermiónica y a otro modelo de similares características pero utilizando fermiones compuestos. Además, los resultados son comparados con los obtenidos por medio del formalismo Hamiltoniano de Dirac.

A method for the determination of the constraint structure within the context of the supersymmetric generalization of the Faddeev-Jackiw quantization formalism and from the point of view of field theory is introduced. In particular, it is shown as the first-class constraints appearing in direct form by using the zero-modes of the modified symplectic supermatrix. On the other hand, this algorithm is applied to a classical nonrelativistic simple model for the electromagnetic interaction of fermionic matter and to another model with same characteristics but using composite fermions. Furthermore, the results are compared with those obtained by means of the Dirac Hamiltonian formalism.

I. INTRODUCCIÓN

En 1988, Faddeev y Jackiw (FJ) [1] propusieron un formalismo que permite realizar la cuantificación canónica de sistemas vinculados.

Más tarde, en 1990, Govaerts [2] desarrolló la generalización supersimétrica del algoritmo de FJ incluyendo variables dinámicas de Grassmann. Este último trabajo fue aplicado luego en distintos modelos [3].

Otro método frecuentemente utilizado para llevar a cabo la cuantificación canónica de sistemas vinculados es el de Dirac [4, 5].

Debemos señalar que en el formalismo de FJ el número de vínculos obtenidos es, en general, menor que en el de Dirac.

El propósito de este trabajo es analizar un método para la determinación de la estructura completa de vínculos de un sistema dinámico arbitrario, en el contexto de la generalización citada recién y desde el punto de vista de la teoría de campos. Para ello, utilizaremos los principales resultados obtenidos en Ref. [2], bajo dicho punto de vista.

El artículo está organizado como sigue. En Sec. II, se describe cómo se obtienen los vínculos en dicha generalización. Luego, en Sec. III, se indica la forma de encontrar la estructura completa de vínculos. Más tarde, en Sec. IV, se aplican los resultados obtenidos a un modelo simple. A continuación, en Sec. V, se procede análogamente con un modelo que utiliza partículas compuestas. Finalmente, en Sec. VI, damos nuestras conclusiones.

II. VÍNCULOS Y SUPERMATRIZ SIMPLÉCTICA

A continuación, desarrollaremos la generalización supersimétrica del método de FJ [2], en el contexto de la teoría de campos.

En teoría de campos, la densidad Lagrangiana de primer orden más general puede ser escrita como sigue:

$$\mathcal{L}(\Xi, \dot{\Xi}) = \dot{\Xi}^A K_A(\Xi) - \mathcal{V}(\Xi), \quad (2.1)$$

donde las funciones espacio-temporales Ξ^A son las variables de campo independientes, las funcionales K_A son los coeficientes de la 1-forma canónica $K(\Xi) = K_A(\Xi)d\Xi^A$ y la funcional \mathcal{V} es la densidad de potencial.

El conjunto de variables Ξ^A está constituido por el conjunto original de variables de campo más un conjunto de variables de campo auxiliares necesarias para llevar la densidad Lagrangiana original en la forma de primer orden (2.1). Así, las variables Ξ^A definen un espacio de configuración extendido del sistema dinámico.

El índice compuesto A toma valores sobre los diferentes rangos del conjunto de variables.

La paridad Grassmanniana de las variables Ξ^A será denotada por $|A| = 0$ (resp. $|A| = 1 \pmod{2}$) para una variable Grassmanniana par (resp. impar).

De Ec. (2.1), se deduce que \mathcal{V} tiene paridad Grassmanniana par y K_A tiene paridad Grassmanniana $|A|$.

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange correspondientes a la densidad Lagrangiana (2.1) se escriben como sigue:

$$\int d^2y \left[(-1)^{|B|} M_{AB}(x, y) \dot{\Xi}^B(y) - \frac{\delta \mathcal{V}(y)}{\delta \Xi^A(x)} \right] = 0, \quad (2.2)$$

donde δ denota derivada funcional.

En todo este trabajo, las derivadas con respecto a Ξ^A son siempre derivadas por izquierda.

En Ec. (2.2), M_{AB} es la supermatriz simpléctica, sus elementos están dados por

$$M_{AB}(x, y) = \frac{\delta K_B(y)}{\delta \Xi^A(x)} - (-1)^{|A||B|} \frac{\delta K_A(x)}{\delta \Xi^B(y)}. \quad (2.3)$$

Estas cantidades son los coeficientes de la 2-forma simpléctica $M(\Xi) = dK(\Xi)$, donde d representa el operador derivada exterior. En otras palabras, M_{AB} son las componentes de $\text{curl}K$, donde $K = (K_A)$.

Cuando la supermatriz M_{AB} es no singular, existe una única supermatriz $(M^{AB})^{-1}$, inversa de M_{AB} , que verifica

$$\int d^2z M_{AB}(x, z) (M^{BC})^{-1}(z, y) = \delta_A^C \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.4a)$$

o, equivalentemente,

$$\int d^2z (M^{AB})^{-1}(x, z) M_{BC}(z, y) = \delta_C^A \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.4b)$$

En esta situación, de Ecs. (2.2) y (2.4b), encontramos

$$\dot{\Xi}^A(x) = (-1)^{|A|} \int d^2y d^2z (M^{AB})^{-1}(x, z) \frac{\delta \mathcal{V}(y)}{\delta \Xi^B(z)}. \quad (2.5)$$

Consideraremos que el conjunto de variables simplécticas se particiona $\Xi^A = (\varphi^a, \chi^p)$ y similarmente el conjunto de componentes de la 1-forma canónica se particiona $K_A = (k_a, l_p = 0)$.

El índice compuesto A toma valores sobre el conjunto $A = (a, p)$, donde $A = 1, \dots, N, a = 1, \dots, l$ y $p = 1, \dots, m$ ($m < N$).

Definimos lo siguiente:

(i) φ^a son las variables de campo originales cuyos términos cinéticos en la densidad Lagrangiana tienen coeficientes distintos de cero k_a . En esta definición, incluimos también toda otra variable de campo cuyo coeficiente k_a pueda ser generado adicionando a la Lagrangiana una derivada total con respecto al tiempo. En este caso, estas variables de campo auxiliares agrandan el espacio de configuración. De aquí en adelante, estas variables serán llamadas variables de campo no singulares, y así la supermatriz $l \times l$ asociada \bar{M}_{ab} , subsupermatriz de la supermatriz simpléctica (2.3), es, en general, no singular.

(ii) χ^p son las variables de campo originales cuyos términos cinéticos en la densidad Lagrangiana tienen coeficientes iguales a cero l_p . De aquí en adelante, estas variables serán llamadas variables de campo singulares.

Así, la densidad Lagrangiana (2.1) puede ser escrita

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{\varphi}^a k_a - \mathcal{V}^{(0)}, \quad (2.6)$$

donde $\mathcal{V}^{(0)} = \mathcal{V}$, y la supermatriz (2.3), en notación compacta, se escribe

$$M_{AB}^{(0)} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Podemos escribir $M_{AB}(x, y) = M'_{AB}(x) \delta(\vec{x} - \vec{y})$ y así Ec. (2.2) queda

$$(-1)^{|B|} M'_{AB}(x) \dot{\Xi}^B(x) = \int d^2y \frac{\delta \mathcal{V}^{(0)}(y)}{\delta \Xi^A(x)}. \quad (2.8)$$

En esta situación, existen m modos cero por izquierda independientes $u_{\mathcal{I}}, \mathcal{I} = 1, \dots, m$, de la supermatriz $M_{AB}^{(0)}$, donde cada $u_{\mathcal{I}}$ es un supervector fila con N elementos $u_{\mathcal{I}}^A$, de paridad Grassmanniana $|A|$. Así, los modos cero por izquierda verifican la siguiente ecuación:

$$u_{\mathcal{I}}^A(x) M'_{AB}(x) = 0, \quad (2.9)$$

donde $A, B = 1, \dots, N$.

De Ec. (2.8), después de la multiplicación por izquierda por los modos cero $u_{\mathcal{I}}^A$ de la supermatriz singular, podemos obtener los vínculos $\Phi_{\mathcal{I}}$ (de paridad Grassmanniana $|\mathcal{I}|$) en el formalismo de FJ. Estos están dados por

$$\Phi_{\mathcal{I}}(x) = u_{\mathcal{I}}^A(x) \int d^2y \frac{\delta \mathcal{V}^{(0)}(y)}{\delta \Xi^A(x)} = 0. \quad (2.10)$$

Luego, introducimos estos vínculos en la densidad Lagrangiana por medio de adecuados multiplicadores de Lagrange $\lambda^{\mathcal{I}}$ (de paridad Grassmanniana $|\mathcal{I}|$) y repetimos el procedimiento anterior.

Para esto, redefinimos las variables $\lambda^{\mathcal{I}}$ como

$$\lambda^{\mathcal{I}} = \xi^{\mathcal{I}} \quad (2.11)$$

y agrandamos una vez más el espacio de configuración considerando el conjunto de variables de campo $\Xi^A = (\varphi^a, \chi^p, \xi^{\mathcal{I}})$.

Además, para las componentes de la 1-forma canónica, consideramos $K_A = (k_a, l_p = 0, -\Phi_{\mathcal{I}})$.

Ahora, el índice compuesto A toma valores sobre el conjunto $A = (a, p, \mathcal{I})$, donde $A = 1, \dots, N, a = 1, \dots, l, p = 1, \dots, m$ y $\mathcal{I} = 1, \dots, n$.

Así, la densidad Lagrangiana en primera iteración se escribe en la forma

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{\varphi}^a k_a - \xi^{\mathcal{I}} \Phi_{\mathcal{I}} - \mathcal{V}^{(1)}, \quad (2.12)$$

donde la nueva densidad potencial es por definición $\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}|_{\Phi_{\mathcal{I}}=0}$.

Buscando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}^{(1)}$, encontramos que Ec. (2.2) es verificada por la supermatriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}$ considerando la densidad potencial $\mathcal{V}^{(1)}$, siendo

$$M_{AB}^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab} & M_{a\Sigma} \\ M_{\Lambda b} & M_{\Lambda\Sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

donde \bar{M}_{ab} , como dijimos, es una subsupermatriz $l \times l$ no singular, construida en base al conjunto original de variables de campo, $M_{a\Sigma}$ es una subsupermatriz $(m+n) \times l$ y $M_{\Lambda\Sigma}$ es una subsupermatriz $(m+n) \times (m+n)$.

Las matrices $M_{a\Sigma}$, $M_{\Lambda b}$ y $M_{\Lambda\Sigma}$ se escriben

$$M_{a\Sigma}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\delta\Phi_T(y)}{\delta\varphi^a(x)} \end{pmatrix}, \quad (2.14a)$$

$$M_{\Lambda b}(x, y) = \begin{pmatrix} (-1)^{|Z||b|} & \frac{\delta\Phi_T(x)}{\delta\varphi^b(y)} \end{pmatrix}, \quad (2.14b)$$

$$M_{\Lambda\Sigma}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\delta\Phi_T(y)}{\delta\chi^p(x)} \\ (-1)^{|Z||q|} \frac{\delta\Phi_T(x)}{\delta\chi^q(y)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14c)$$

Así, si $M_{AB}^{(1)}$ es no singular, ésta y su inversa $(M^{(1)AB})^{-1}$ deben verificar Ecs. (2.4).

Por otro lado, tenemos que la supermatriz $(M^{(1)AB})^{-1}$ verifica Ec. (2.5) considerando la densidad potencial $\mathcal{V}^{(1)}$.

Cuando la supermatriz (2.13) es singular, este procedimiento debe ser repetido. En cada paso iterativo, el espacio de configuración es agrandado y la supermatriz simpléctica es modificada.

De esta manera, las sucesivas supermatrices simplécticas $M_{AB}^{(k)}$ tienen la forma general dada en Ecs. (2.13) y (2.14) con una dimensión mayor en cada paso.

Cuando no son generados nuevos vínculos, el procedimiento iterativo finaliza.

En teorías de campos invariantes de gauge, la supermatriz M_{AB} , obtenida cuando el procedimiento iterativo finaliza, es singular.

En lo que sigue, escribiremos a la matriz M_{AB} conteniendo, en general, derivadas de la función delta de Dirac. Debemos hacer notar que estas derivadas no deben ser tenidas en cuenta en el cálculo de vínculos, en Ec. (2.10), pero sí cuando se consideren ecuaciones que involucren paréntesis de Poisson.

III. ESTRUCTURA DE VÍNCULOS

Ahora, vamos a señalar una propiedad de la supermatriz simpléctica M_{AB} .

De Ec. (2.1), encontramos que los momentos conjugados respecto de las variables de campo Ξ^A , $P_A = \delta\mathcal{L}^{(0)}/\delta\dot{\Xi}^A$, satisfacen los vínculos primarios

$$\Gamma_A = P_A - K_A = 0. \quad (3.1)$$

Sobre el espacio de fases asociado (Ξ^A, P_A) , están definidos los paréntesis de Poisson generalizados fundamentales [6]

$$\begin{aligned} [P_A(x), P_B(y)] &= -(-1)^{|A|} [P_B(y), \Xi^A(x)] \\ &= (-1)^{|A|} \delta_B^A \delta(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

con todos los otros paréntesis nulos.

Es fácil probar que los paréntesis de Poisson entre los vínculos primarios son [2]

$$[\Gamma_A(x), \Gamma_B(y)] = M_{AB}(x, y). \quad (3.3)$$

Además, encontramos que la supermatriz M_{AB} , obtenida cuando el procedimiento iterativo finaliza, también satisface Ec. (3.3). En este caso, las funciones Γ_A definen los vínculos primarios y secundarios.

Considerando los modos cero v_i^A de la supermatriz M_{AB} , se ve rápidamente, de Ec. (3.3), que los vínculos asociados

$$v_i^A \Gamma_A = 0 \quad (3.4)$$

son de primera clase. Como es bien sabido, estos vínculos están relacionados a las simetrías de gauge del modelo. Así, los vínculos remanentes, linealmente independientes, compatibles con el modelo, entre los vínculos (3.1) son de segunda clase.

Los modos cero de la supermatriz M_{AB} están dados por

$$v_i^A(x) = \int d^2y v_i^A(x, y), \quad (3.5)$$

donde

$$v_i^A(x, y) M_{AB}(x, y) = 0. \quad (3.6)$$

IV. MODELO SIMPLE

A continuación, vamos a aplicar los resultados obtenidos a un modelo simple.

Consideremos una teoría de campos clásica no relativista con simetría de gauge $U(1)$ para la interacción electromagnética de partículas fermiónicas en (2+1) dimensiones. Consideraremos que este sistema puede ser descrito por la siguiente densidad Lagrangiana singular:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f^{em} + \mathcal{L}_{em}, \quad (4.1)$$

donde \mathcal{L}_f^{em} se escribe

$$\mathcal{L}_f^{em} = i\psi^\dagger \mathcal{D}_0 \psi + \frac{1}{2m} \psi^\dagger \vec{\mathcal{D}}^2 \psi \quad (4.2a)$$

y \mathcal{L}_{em} se expresa

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.2b)$$

En Ec. (4.2b), los índices griegos toman los valores $\mu, \nu = 0, 1, 2$.

En este trabajo, empleamos unidades naturales, donde $\hbar = c = 1$, y consideramos a la métrica Minkowskiana como $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$.

En Ec. (4.2a), la derivada covariante, que involucra al campo de gauge $U(1)$ electromagnético A_μ , se escribe como $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ y designamos $\vec{\mathcal{D}}^2 = \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2$. El campo de materia ψ es un campo espinorial cargado que describe partículas fermiónicas con carga $-e$ y m es la masa de las partículas.

Un sistema bosónico puede ser considerado de esta misma manera, la única diferencia es que, en este caso, el campo de materia es un campo escalar cargado.

Usando la expresión para la derivada covariante, podemos reescribir Ec. (4.2a) en la forma

$$\mathcal{L}_f^{em} = i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger\partial_0\psi + i\frac{\tau-1}{2}\partial_0\psi^\dagger\psi + e\psi^\dagger A_0\psi + \frac{1}{2m}\psi^\dagger\bar{D}^2\psi. \quad (4.3)$$

En esta ecuación, el término fermiónico cinético está escrito en la forma general usando el parámetro arbitrario τ , la cual es la manera usual para obtener expresiones simétricas para los momentos canónicamente conjugados correspondientes a los campos de materia ψ^\dagger y ψ [5].

Ahora, vamos a buscar los vínculos del modelo que se obtienen por aplicación directa del método de FJ.

Así, el punto de partida es escribir la densidad Lagrangiana (4.1) en la forma de primer orden (2.1).

El conjunto original de variables de campo está dado por $(A_\mu, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha)$. De esta manera, tenemos

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{A}_i k_A^i + \dot{\psi}_\alpha^\dagger k_\alpha + \dot{\psi}_\alpha k_\alpha^\dagger - \mathcal{V}^{(0)}. \quad (4.4)$$

En esta ecuación, la densidad potencial es

$$\mathcal{V}^{(0)} = -\frac{1}{2}P^i P_i - A_0 \partial_i P^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - e\psi^\dagger A_0\psi - \frac{1}{2m}\psi^\dagger\bar{D}^2\psi, \quad (4.5)$$

donde $P^i = \delta\mathcal{L}/\delta\dot{A}_i$, y los coeficientes son

$$k_A^i = P^i, \quad (4.6a)$$

$$k_\alpha = i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha, \quad (4.6b)$$

$$k_\alpha^\dagger = -i\frac{\tau+1}{2}\psi_\alpha^\dagger, \quad (4.6c)$$

$$l_A^0 = 0. \quad (4.6d)$$

En Ecs. (4.4-6), los índices latinos toman los valores $i, j = 1, 2$ y el índice griego toma los valores $\alpha = 1, 2$.

Además, notemos que, en Ec. (4.4), fue necesario introducir como variables de campo las componentes espaciales del momento conjugado canónico P^μ del campo A_μ .

Por esto, el conjunto inicial de variables de campo está dado por $(A_\mu, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha)$.

De acuerdo a las definiciones dadas en Sec. II y debido a que podrían ser generados coeficientes k_i para las variables de campo P^i , éstas son variables de campo no singulares.

Así, la supermatriz simpléctica singular 9×9 $M_{AB}^{(0)}$, definida en Ec. (2.3), es una matriz bosónica y tiene la forma

$$M_{AB}^{(0)} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

En esta ecuación, la submatriz no singular 8×8 que llamamos \bar{M}_{ab} se construye con el conjunto de variables de campo no singulares $(A_i, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha)$ y está dada por

$$\bar{M}_{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & g_{ij} & 0 & 0 \\ -g_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\delta_{\alpha\beta} \\ 0 & 0 & -i\delta_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.8)$$

De Ec. (2.9), encontramos el siguiente modo cero de la matriz (4.7):

$$u_1 = (0_i, 0_i, 0_\alpha, 0_\alpha, 1)u_1, \quad (4.9)$$

correspondiente a la variable de campo singular A_0 . En esta ecuación, u_1 es una cantidad bosónica arbitraria y $0_\alpha = 0, \dots, 0$ a veces.

Luego, usando Ec. (2.10) con la densidad potencial $\mathcal{V}^{(0)}$, dada en Ec. (4.5), encontramos el vínculo

$$\Phi_1 = \partial_i P^i + e\psi^\dagger\psi = 0. \quad (4.10)$$

Ahora, debemos repetir este procedimiento.

Así, la densidad Lagrangiana en primera iteración es

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{A}_i k_A^i + \dot{\psi}_\alpha^\dagger k_\alpha + \dot{\psi}_\alpha k_\alpha^\dagger - \xi^1 \Phi_1 - \mathcal{V}^{(1)}, \quad (4.11)$$

donde

$$\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}^{(0)}|_{\Phi_1=0} = -\frac{1}{2}P^i P_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2m}\psi^\dagger\bar{D}^2\psi. \quad (4.12)$$

El espacio de configuración extendido está ahora establecido por el siguiente conjunto de variables de campo: $(A_i, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha, A_0, \xi^1)$.

Usando Ecs. (2.13) y (2.14), calculamos la supermatriz simpléctica modificada 10×10 $M_{AB}^{(1)}$, obtenida después de la primera iteración,

$$M_{AB}^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab} & L \\ N & O \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

donde \bar{M}_{ab} es la matriz (4.8), L es la supermatriz 8×2

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \partial_i^x \\ 0 & -e\psi_\alpha(x) \\ 0 & e\psi_\alpha^\dagger(x) \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.14a)$$

N es la supermatriz 2×8

$$N(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_j^x & e\psi_\beta(x) & -e\psi_\beta^\dagger(x) \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.14b)$$

y O es la matriz nula 2×2 .

Para obtener Ecs. (4.13) y (4.14) hemos considerado

$$\varphi^a = (A_i, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha), \quad (4.15a)$$

$$\chi^p = (A_0). \quad (4.15b)$$

Por medio de Ec. (2.9), puede mostrarse que la supermatriz (4.13) posee los siguientes modos cero:

$$u_2 = (0_i, 0_i, ie\psi_\alpha^\dagger, -ie\psi_\alpha, 0, 1)u_2, \quad (4.16a)$$

$$u_3 = (0_i, 0_i, 0_\alpha, 0_\alpha, 1, 0)u_3, \quad (4.16b)$$

donde u_2 y u_3 son cantidades bosónicas arbitrarias.

Ahora, usando una vez más Ec. (2.10) con la densidad potencial $\mathcal{V}^{(1)}$, dada en Ec. (4.12), encontramos que no existen nuevos vínculos. Por esto, el procedimiento iterativo finaliza.

Es fácil ver que la supermatriz (4.13) es singular, como corresponde a un modelo con simetría de gauge.

Se puede demostrar que el número de vínculos encontrados aquí es menor que el correspondiente al método de Dirac.

Finalmente, vamos a obtener la estructura de vínculos de este modelo.

Las presentes variables de campo son

$$\Xi^A = (A_i, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha, A_0, \xi^1) \quad (4.17)$$

y las correspondientes funciones Γ_A , definidas en Ec. (3.1), son

$$\Gamma_A = \left(-P^i, -A_i, \pi_\alpha - i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha, \pi_\alpha^\dagger + i\frac{\tau+1}{2}\psi_\alpha^\dagger, P^0, \Phi_1 \right), \quad (4.18)$$

donde π_α y π_α^\dagger son los momentos conjugados de las variables de campo ψ_α^\dagger y ψ_α , respectivamente.

Encontramos que los modos cero de la supermatriz (4.13) coinciden con aquéllos que aparecen en Ecs. (4.16).

Así, obtenemos el siguiente conjunto final de vínculos:

(i) Los dos vínculos de primera clase bosónicos dados por

$$\Sigma_1 = \frac{i}{e}\partial_i P^i + \psi\pi^\dagger - \psi^\dagger\pi = 0, \quad (4.19a)$$

$$\Sigma_2 = P^0 = 0. \quad (4.19b)$$

(ii) El vínculo de segunda clase bosónico definido por Φ_1 , y podemos completar esta estructura con los cuatro vínculos de segunda clase fermiónicos dados por

$$\Omega_\alpha = \pi_\alpha - i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha = 0, \quad (4.20a)$$

$$\Omega_\alpha^\dagger = \pi_\alpha^\dagger + i\frac{\tau+1}{2}\psi_\alpha^\dagger = 0. \quad (4.20b)$$

Es fácil mostrar que la presente estructura de vínculos y la encontrada por medio del formalismo de Dirac coinciden.

V. MODELO DE PARTÍCULAS COMPUESTAS

Vamos a considerar una teoría de campos clásica no relativista con simetría de gauge $U(1) \times U(1)$ para la interacción electromagnética de partículas compuestas en (2+1) dimensiones. En particular, analizaremos un sistema de fermiones compuestos (FCs). Consideraremos que este sistema puede ser descrito por la siguiente densidad Lagrangiana singular [7]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{fc}^{em} + \mathcal{L}_{em}, \quad (5.1)$$

donde \mathcal{L}_{fc}^{em} se escribe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fc}^{em} = & i\psi^\dagger \mathcal{D}_0 \psi + \frac{1}{2m_b} \psi^\dagger \vec{\mathcal{D}}^2 \psi - \mu \psi^\dagger \psi \\ & + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}} \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho \end{aligned} \quad (5.2a)$$

y \mathcal{L}_{em} es

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(A) F^{\mu\nu}(A). \quad (5.2b)$$

En Ecs. (5.2), los índices griegos toman los valores $\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2$.

Además, consideramos $\varepsilon^{012} = \varepsilon^{12} = 1$.

En Ec. (5.2a), la derivada covariante, la cual involucra tanto al campo de gauge $U(1)$ de Chern-Simons a_μ como al campo de gauge $U(1)$ electromagnético A_μ , se escribe en la forma $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ia_\mu - ieA_\mu$ y designamos, como en Sec. IV, $\vec{\mathcal{D}}^2 = \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2$. El campo de materia ψ es un campo espinorial cargado que describe FCs. La carga del electrón se toma como $-e$. m_b es la masa efectiva de los electrones y μ es el potencial químico de los mismos. $\tilde{\phi}$ es la intensidad del tubo de flujo, en unidades del cuanto de flujo 2π . (La carga ficticia de cada partícula que interactúa con el campo de gauge ficticio ha sido elegida como de intensidad uno.)

Un sistema de bosones compuestos puede ser considerado de manera similar, la única diferencia es que, en este caso, el campo de materia es un campo escalar cargado.

Usando la expresión para la derivada covariante, podemos reescribir Ec. (5.2a) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cf}^{em} = & i\frac{\tau+1}{2} \psi^\dagger \partial_0 \psi + i\frac{\tau-1}{2} \partial_0 \psi^\dagger \psi \\ & + \psi^\dagger (a_0 + eA_0) \psi + \frac{1}{2m_b} \psi^\dagger \vec{\mathcal{D}}^2 \psi - \mu \psi^\dagger \psi \\ & + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}} \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ahora, vamos a buscar los vínculos del modelo que se obtienen por aplicación directa del método de FJ.

Así, el punto de partida es escribir la densidad Lagrangiana (5.1) en la forma de primer orden (2.1).

El conjunto original de variables de campo está dado por $(a_\mu, A_\mu, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha)$. De esta manera, tenemos

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{a}_i k_A^i + \dot{A}_i k_A^i + \dot{\psi}_\alpha^\dagger k_\alpha + \dot{\psi}_\alpha k_\alpha^\dagger - \mathcal{V}^{(0)}. \quad (5.4)$$

En esta ecuación, la densidad potencial es

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(0)} = & -\frac{1}{2\pi\phi}\varepsilon^{ij}a_0\partial_ia_j - \frac{1}{2}P^iP_i - A_0\partial_iP^i \\ & + \frac{1}{4}F_{ij}(A)F^{ij}(A) + \mu\psi^\dagger\psi - \psi^\dagger(a_0 + eA_0)\psi \\ & - \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\bar{D}^2\psi, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde $P^i = \delta\mathcal{L}/\delta\dot{A}_i$, y los coeficientes son

$$k_\alpha^i = \frac{1}{4\pi\phi}\varepsilon^{ij}a_j, \quad (5.6a)$$

$$k_A^i = P^i, \quad (5.6b)$$

$$k_\alpha = i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha, \quad (5.6c)$$

$$k_\alpha^\dagger = -i\frac{\tau+1}{2}\psi_\alpha^\dagger, \quad (5.6d)$$

$$l_\alpha^0 = 0, \quad (5.6e)$$

$$l_A^0 = 0. \quad (5.6f)$$

En Ecs. (5.4-6), los índices latinos toman los valores $i, j = 1, 2$ y el índice griego toma los valores $\alpha = 1, 2$.

Además, notemos que, en Ec. (5.4), fue necesario introducir como variables de campo las componentes espaciales del momento conjugado canónico P^μ del campo A_μ .

Por esto, el conjunto inicial de variables de campo está dado por $(a_\mu, A_\mu, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha)$.

De acuerdo a las definiciones dadas en Sec. II y debido a que podrían ser generados coeficientes k_i para las variables de campo P^i , éstas son variables de campo no singulares.

Así, la supermatriz simpléctica singular 12×12 $M_{AB}^{(0)}$, definida en Ec. (2.3), es una matriz bosónica y tiene la forma

$$M_{AB}^{(0)} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

En esta ecuación, la submatriz no singular 10×10 que llamamos \bar{M}_{ab} se construye mediante el conjunto de variables de campo no singulares $(a_i, A_i, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha)$ y está dada por

$$\bar{M}_{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi\phi}\varepsilon^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & -g_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\delta_{\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 0 & -i\delta_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \times \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.8)$$

De Ec. (2.9), encontramos los siguientes modos cero de la matriz (5.7):

$$u_1 = (0_i, 0_i, 0_i, 0_\alpha, 0_\alpha, 1, 0)u_1, \quad (5.9a)$$

$$u_2 = (0_i, 0_i, 0_i, 0_\alpha, 0_\alpha, 0, 1)u_2, \quad (5.9b)$$

correspondientes a las variables de campo singulares a_0 y A_0 , respectivamente. En estas ecuaciones, u_1 y u_2 son cantidades bosónicas arbitrarias.

Luego, usando Ec. (2.10) con la densidad potencial $\mathcal{V}^{(0)}$, dada en Ec. (5.5), encontramos los vínculos

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi\phi}\varepsilon^{ij}\partial_ia_j + \psi^\dagger\psi = 0, \quad (5.10a)$$

$$\Phi_2 = \partial_iP^i + e\psi^\dagger\psi = 0. \quad (5.10b)$$

Ahora, debemos repetir este procedimiento.

Así, la densidad Lagrangiana en primera iteración es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} = & \dot{a}_i k_\alpha^i + \dot{A}_i k_A^i + \dot{\psi}_\alpha^\dagger k_\alpha + \dot{\psi}_\alpha k_\alpha^\dagger - \xi^1\Phi_1 - \xi^2\Phi_2 \\ & - \mathcal{V}^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(1)} = & \mathcal{V}^{(0)}|_{\Phi_1=\Phi_2=0} = -\frac{1}{2}P^iP_i + \frac{1}{4}F_{ij}(A)F^{ij}(A) \\ & + \mu\psi^\dagger\psi - \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\bar{D}^2\psi. \end{aligned} \quad (5.12)$$

El espacio de configuración extendido está ahora establecido por el siguiente conjunto de variables de campo: $(a_i, A_i, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha, a_0, A_0, \xi^1, \xi^2)$.

Usando Ecs. (2.13) y (2.14), calculamos la supermatriz simpléctica modificada 14×14 $M_{AB}^{(1)}$, obtenida después de la primera iteración,

$$M_{AB}^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab} & L \\ N & O \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

donde \bar{M}_{ab} es la matriz (5.8), L es la supermatriz 10×4

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2\pi\phi}\varepsilon^{ik}\partial_k^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_i^x \\ 0 & 0 & -\psi_\alpha(x) & -e\psi_\alpha(x) \\ 0 & 0 & \psi_\alpha^\dagger(x) & e\psi_\alpha^\dagger(x) \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.14a)$$

N es la supermatriz 4×10

$$N(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\pi\phi}\varepsilon^{jk}\partial_k^x & 0 & 0 & 0 & \psi_\beta(x) & -\psi_\beta^\dagger(x) \\ 0 & 0 & 0 & \partial_j^x & e\psi_\beta(x) & -e\psi_\beta^\dagger(x) \end{pmatrix} \times \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (5.14b)$$

y O es la matriz nula 4×4 .

Para obtener Ecs. (5.13) y (5.14) hemos considerado

$$\varphi^a = (a_i, A_i, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha), \quad (5.15a)$$

$$\chi^p = (a_0, A_0), \quad (5.15b)$$

$$\Phi_{\mathcal{I}} = (\Phi_1, \Phi_2). \quad (5.15c)$$

Por medio de Ec. (2.9), puede verse que la supermatriz (5.13) tiene los siguientes modos cero:

$$u_3 = (0_i, 0_i, 0_i, i\psi_\alpha^\dagger, -i\psi_\alpha, 0, 0, 1, 0)u_3, \quad (5.16a)$$

$$u_4 = (0_i, 0_i, 0_i, ie\psi_\alpha^\dagger, -ie\psi_\alpha, 0, 0, 0, 1)u_4, \quad (5.16b)$$

$$u_5 = (0_i, 0_i, 0_i, 0_\alpha, 0_\alpha, 1, 0, 0, 0)u_5, \quad (5.16c)$$

$$u_6 = (0_i, 0_i, 0_i, 0_\alpha, 0_\alpha, 0, 1, 0, 0)u_6, \quad (5.16d)$$

donde $u_k, k = 3, \dots, 6$, son cantidades bosónicas arbitrarias.

Ahora, usando una vez más Ec. (2.10) con la densidad potencial $\mathcal{V}^{(1)}$, dada en Ec. (5.12), encontramos que no existen nuevos vínculos. De esta manera, el procedimiento iterativo finaliza.

Se puede demostrar que el número de vínculos obtenidos aquí es menor que el correspondiente a Ref. [7], donde es utilizado el método de Dirac.

Finalmente, vamos a obtener la estructura de vínculos de este modelo.

Las presentes variables de campo son

$$\Xi^A = (a_i, A_i, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha, a_0, A_0, \xi^1, \xi^2) \quad (5.17)$$

y las correspondientes funciones Γ_A , definidas en Ec. (3.1), son

$$\Gamma_A = \left(p^i - \frac{1}{4\pi\phi} \epsilon^{ij} a_j, -P^i, -A_i, \pi_\alpha - i \frac{\tau-1}{2} \psi_\alpha, \right. \\ \left. \pi_\alpha^\dagger + i \frac{\tau+1}{2} \psi_\alpha^\dagger, p^0, P^0, \Phi_1, \Phi_2 \right), \quad (5.18)$$

donde π_α y π_α^\dagger son los momentos conjugados de las variables de campo ψ_α^\dagger y ψ_α , respectivamente.

Encontramos que los modos cero de la supermatriz (5.13) coinciden con aquéllos que aparecen en Ecs. (5.16).

En base a esto y usando además Ec. (3.4), obtenemos el siguiente conjunto final de vínculos:

(i) Los cuatro vínculos de primera clase bosónicos dados por

$$\Sigma_1 = \frac{i}{2\pi\phi} \epsilon^{ij} \partial_i a_j + \psi\pi^\dagger - \psi^\dagger\pi = 0, \quad (5.19a)$$

$$\Sigma_2 = \frac{i}{e} \partial_i P^i + \psi\pi^\dagger - \psi^\dagger\pi = 0, \quad (5.19b)$$

$$\Sigma_3 = p^0 = 0, \quad (5.19c)$$

$$\Sigma_4 = P^0 = 0. \quad (5.19d)$$

(ii) Los dos vínculos de segunda clase bosónicos definidos por Φ_1 y Φ_2 , y podemos completar esta estructura con los cuatro vínculos de segunda clase fermiónicos dados por

$$\Omega_\alpha = \pi_\alpha - i \frac{\tau-1}{2} \psi_\alpha = 0, \quad (5.20a)$$

$$\Omega_\alpha^\dagger = \pi_\alpha^\dagger + i \frac{\tau+1}{2} \psi_\alpha^\dagger = 0. \quad (5.20b)$$

Es fácil mostrar que la presente estructura de vínculos y la correspondiente a Ref. [7], obtenida utilizando el método de Dirac, son alternativas.

VI. CONCLUSIONES

Hemos presentado un método para la obtención de la estructura de vínculos en el contexto de la generalización supersimétrica del método de cuantificación de FJ. Esto ha sido realizado en base al trabajo de Ref. [2], en el ámbito de la teoría de campos.

Los vínculos de primera clase aparecen en forma directa utilizando los modos cero de la supermatriz simpléctica modificada.

Hemos aplicado este desarrollo a un modelo de campos simple no relativista clásico que describe la interacción electromagnética de materia fermiónica en (2+1) dimensiones.

A continuación, procedimos en forma análoga con un modelo de campos no relativista clásico con simetría de gauge $U(1) \times U(1)$ que describe la interacción electromagnética de FCs en (2+1) dimensiones.

Debido a que los modelos analizados poseen simetría de gauge, las supermatrices simplécticas obtenidas luego de finalizar el procedimiento iterativo resultaron ser singulares.

Comparando los resultados presentes con los obtenidos por medio del formalismo Hamiltoniano de Dirac, podemos concluir lo siguiente:

(i) Para ambos modelos analizados, el número de vínculos encontrados en forma directa en base al método de FJ es menor que en el citado formalismo.

(ii) Para el primer modelo, la estructura final de vínculos obtenida aquí y la correspondiente al método de Dirac son iguales. En cambio, para el segundo modelo, dichas estructuras resultaron ser alternativas.

REFERENCIAS

- [1] Faddeev L. D. and Jackiw R., *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1692 (1988).
- [2] Govaerts J., *Int. J. Mod. Phys. A* **5**, 3625 (1990).
- [3] Foussats A., Repetto C., Zandron O. P., and Zandron O. S., *Class. Quantum Grav.* **14**, 269 (1997); *Int. J. Theor. Phys.* **36**, 55 (1997); **36**, 2923 (1997); *Ann. Phys. (NY)* **268**, 225 (1998); Manavella E. C., Repetto C. E., and Zandron O. P., *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1837 (1999).

[4] Dirac P. A. M., *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950);
Lectures on Quantum Mechanics (Yeshiva University
Press, New York, 1964).

[5] Sundermeyer K., *Constrained Dynamics* (Lec-
ture Notes in Physics **169**, Springer-Verlag, Berlin,
1982).

[6] Casalbuoni R., *Nuov. Cim. A* **33**, 115, 389
(1976).

[7] Manavella E. C., *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 1453
(2001).