

DENSIDAD ELECTRÓNICA EN LÁSERES DE CO₂ DE FLUJO TRANSVERSAL

Ríos I. J. , González M. G. y Santiago G. D.

Laboratorio de Láser - Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires
Paseo Colón 850 - (1063) Ciudad de Buenos Aires - Argentina
e-mail: gsantia@fi.uba.ar

La densidad electrónica es un parámetro fundamental en los láseres de CO₂, dado que la misma tiene efecto sobre la ganancia del medio y por lo tanto determina la salida de potencia. En los láseres de CO₂ de flujo transversal se observa un "efecto de soplado" de la descarga que está íntimamente relacionado con el transporte de gas a través de la zona de excitación. En este trabajo se muestra que el efecto mencionado es consecuencia de la influencia que tiene el flujo sobre la densidad electrónica luego de resolver la ecuación diferencial que describe el fenómeno. Por otro lado teniendo en cuenta la variación en el número de moléculas, provocado por el cambio de temperatura en la dirección del flujo y en condiciones de campo eléctrico constante, la densidad electrónica aumenta indefinidamente restringiendo así la longitud posible de la descarga. La expresión analítica de esta última es muy compleja, pero mediante algunas aproximaciones, se obtiene una sencilla ecuación que finalmente se compara con la simulación numérica del problema.

The electron density plays an essential role in CO₂ for it influences the gain and output power. The discharge in transverse-flow lasers shows a tendency to blow toward the direction of the gas flow. This effect is intimately related to the gas transport through the excitation zone. In the present article it is shown this fact arises as a consequence of the interaction between electron density net generation rate and gas speed coupled in a differential equation. In addition, taking into account the decrease of neutral molecule density along the excitation zone, the electron density tends to grow indefinitely, thus shortening the effective discharge length. Analytical solutions are too complex but, by means of some approximations, a simple good-accuracy relationship is found.

I. INTRODUCCIÓN

Los láseres de CO₂ de flujo transversal rápido son excitados generalmente con descargas eléctricas. En este tipo de láseres el parámetro más importante es la densidad electrónica puesto que la misma determina la característica de la ganancia de pequeña señal del medio.

En primera instancia, suele considerarse que el flujo del gas sólo afecta las moléculas y no a los electrones debido a la escasa masa que estos poseen. Esto implicaría que la descarga no se vería afectada por la velocidad del gas. Sin embargo, en los láseres de CO₂ de flujo transversal se observa un "efecto de soplado" que está íntimamente relacionado con la velocidad de la mezcla y no es consistente con la suposición anterior.

En este trabajo se muestra que el efecto mencionado es consecuencia de la influencia que tiene el flujo sobre la densidad electrónica. Puesto que este fenómeno se manifiesta en la zona inicial de la descarga, no es necesario tener en cuenta la variación en el número de moléculas que provoca el cambio de temperatura en la dirección del flujo.

Luego se tiene en cuenta esta variación para mostrar como, en condiciones de campo eléctrico constante, la densidad electrónica aumenta indefinidamente restringiendo así la longitud posible de la descarga.

II. DENSIDAD ELECTRÓNICA

Para poder hallar la densidad electrónica es necesario resolver la ecuación de balance electrónica dada por⁽¹⁾:

$$\frac{dn_e}{dt} = D_A \cdot \nabla^2 n_e + (\alpha - a) \cdot v_d \cdot n_e - a_i \cdot n_e^2 \quad (1)$$

donde D_A es el coeficiente de difusión ambipolar, α es el coeficiente de ionización, a es el coeficiente de recombinación por "attachment", a_i es el coeficiente de recombinación ión-electrón y v_d es la velocidad de deriva de los electrones. En el caso de láseres de flujo transversal rápido se puede despreciar el término difusivo ya que difiere en varios órdenes de magnitud respecto del resto de los términos.

Por otra parte en este tipo de láseres debe analizarse la densidad electrónica en función de la posición, luego la ecuación resulta:

$$\frac{dn_e}{dx} = \frac{A(x)}{V(x)} \cdot n_e + \frac{B}{V(x)} \cdot n_e^2 \quad (2)$$

donde $A(x) = (\alpha - a) \cdot v_d$, $B = -a_i$ y $V(x)$ es la velocidad de la mezcla.

En consecuencia, para resolver la ecuación (2) es necesario conocer la variación de la velocidad respecto de la posición y la característica de la función $A(x)$.

III. VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD

A partir de las ecuaciones de conservación de la masa, del momentum, de energía y de estado^[2] se llega a la expresión de la variación de la temperatura con respecto a la posición.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\frac{dQ}{dx}}{\delta \cdot \left(C_{pm} + \frac{Rm \cdot V^2}{Rm \cdot T - V^2} \right)} \quad (3)$$

donde δ es la densidad del gas, Rm es la constante de los gases por unidad de masa, C_{pm} es la capacidad calorífica por unidad de masa del gas a presión constante y Q es la cantidad de calor entregada por unidad de volumen.

En este tipo de láseres el aporte de calor según x es constante ($dQ/dx=Q_0$) y el término cinético es despreciable frente a la capacidad calorífica. Teniendo en cuenta esto y la expresión de la densidad del gas se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{Q_0}{C_{pm}} \cdot \left(\sum_j \frac{P_j}{Rm_j} \right)^{-1} \quad (4)$$

donde j es el subíndice que representa las distintas componente del gas, P_j es la presión del gas j y Rm_j es la constante del gas j por unidad de masa.

En este caso el miembro a la derecha de la (4) es prácticamente una constante que a partir de ahora pasará a llamarse k_T ^[3].

De esta manera la temperatura puede ser aproximada como:

$$T(x) = T_0 \cdot \exp[k_T \cdot x] \quad (5)$$

En consecuencia la velocidad se escribe de la siguiente manera:

$$V(x) = V_0 \cdot \exp[k_V \cdot x] \quad (6)$$

Una vez conocida la forma funcional de la velocidad respecto de la posición sólo es necesario conocer la dependencia de la función $A(x)$ con el campo eléctrico.

IV. FUNCIÓN $A(x)$

La función $A(x) = (\alpha - a) \cdot v_d$ expresa el incremento en la población de electrones debida al balance entre ionización y recombinación por "attachment". Los coeficientes que componen esta función fueron ampliamente estudiados por Lowke, Phelps e Irwin^[4] para distintas mezclas y un gran rango de E/N . Si bien existen gráficos, obtenidos a partir de simulaciones numéricas, para encontrar los valores de estos coeficientes no es posible (dada la complejidad del problema) dar una

expresión analítica cerrada de los mismos. Por esta razón y para evitar una sobrecarga computacional es conveniente aproximar la curva $A(x)$ mediante alguna función. Para mezclas $CO_2:N_2:He$ se encontró como función aproximada:

$$A(x) = N \cdot [A_0 \cdot \exp[C \cdot \ln(E/N) + \mathcal{G}] - A_1] \quad (7)$$

donde $A_1 = A_0 \cdot \exp[C \cdot \ln(E_0/N_0) + \mathcal{G}]$, E_0 es el campo que se establece en el plasma para un número de moléculas igual al inicial N_0 y finalmente \mathcal{G} , C y A_0 son tres constantes cuyos respectivos valores dependen de las proporciones de la mezcla a utilizar.

V. DENSIDAD DE MOLÉCULAS CONSTANTE

El comportamiento inicial (x pequeño) de la densidad electrónica está dominado por el campo eléctrico y la velocidad inicial del flujo. En consecuencia para poder analizar esta característica de arranque puede considerarse la cantidad de moléculas constante igual a N_0 . En este caso, con campo eléctrico constante, la solución de la ecuación (2) es más sencilla puesto que $A(x)$ no varía con la posición. Así se obtienen:

$$n_e(x) = \frac{A}{B} \cdot \frac{\exp(W \cdot (1 - \exp[-k_V \cdot x]))}{C - \exp(W \cdot (1 - \exp[-k_V \cdot x]))} \quad (8)$$

donde

$$W = \frac{A}{V_0 \cdot k_V} \quad \text{y} \quad C = \frac{B \cdot n_e(0) + A}{B \cdot n_e(0)}$$

Estrictamente el valor de $n_e(0)$ es la densidad electrónica en $x=0$ provocada por los efectos fotoeléctrico, fotoionización, entre otros. Dicho valor es muy pequeño comparado con los valores de la densidad electrónica en la descarga.

El valor final de la densidad electrónica será:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n_e(x) = \frac{A \cdot \exp[W]}{B \cdot (C - \exp[W])} \quad (9)$$

Si la velocidad del flujo es cero, o sea W tiende a infinito resulta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty, W \rightarrow \infty} n_e(x) = -\frac{A}{B} = \frac{(\alpha - a) \cdot v_d}{a_i} \quad (10)$$

Esto coincide con la forma en que se calcula la densidad electrónica estacionaria en un láser que no tiene flujo transversal^[1]. Lo cual muestra que la solución obtenida es consistente.

En la figura 1 se observa la densidad electrónica en función de la posición para distintas velocidades iniciales. Aquí se puede apreciar el "efecto de soplado" provocado por el flujo del gas. Cuanto mayor es la velocidad inicial tanto mayor es la distancia en la cual se alcanza el valor final de la densidad electrónica.

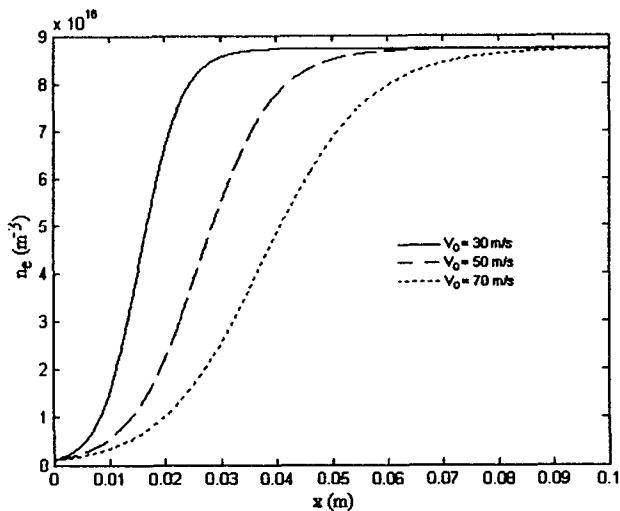


Figura 1. Densidad electrónica para E/N constante.

La explicación a ese fenómeno surge fácilmente del análisis de la ecuación (2). En esta se ve que la velocidad del gas (la velocidad de los iones) disminuye el factor de generación de electrones ($A(x)/V(x)$), mientras que el de recombinación ($a_i/V(x)$) varía muy poco por ser $a_i=1 \times 10^{-13}$ m³/s un valor muy pequeño. En consecuencia cuanto mayor es la velocidad inicial, la generación de electrones es más reducida y por lo tanto es necesario mayor distancia para alcanzar el valor final.

VI. DENSIDAD DE MOLÉCULAS VARIABLE

La variación de la temperatura en la descarga provoca una variación en la densidad de moléculas en la dirección del flujo que se puede escribir como:

$$N(x) = N_0 \cdot \exp[-k_v \cdot x] \quad (11)$$

Como se mencionó, esta disminución de la densidad de moléculas con la posición no afecta el comportamiento inicial de la densidad electrónica.

Conforme se avanza en la zona de descarga, la disminución de la densidad de moléculas se hace más notoria y esto afecta fuertemente la ecuación (7). En este caso $A(x)$ no resulta constante como en el caso anterior y la solución para la ecuación (2) se vuelve complicada. La expresión (2) es una ecuación de Bernoulli, por lo tanto puede reducirse a una ecuación diferencial lineal de primer orden realizando el cambio de variable $w=1/n_e^{[5]}$. Luego se obtiene:

$$\frac{dw}{dx} + P(x) \cdot w = F(x) \quad (12)$$

donde:

$$P(x) = \frac{A(x)}{V(x)} \quad F(x) = -\frac{B}{V(x)} \quad (13)$$

La solución de la ecuación (12) esta dada por:

$$w = c \cdot \exp[-\int P(x) \cdot dx] +$$

$$+ \exp[-\int P(x) \cdot dx] \cdot \int \exp[\int P(x) \cdot dx] \cdot F(x) \cdot dx \quad (14)$$

donde $c=1/n_e(0)$. Luego,

$$\int_0^x P(x) \cdot dx = C_1 \cdot \exp[C_2 \cdot x] - C_3 \cdot \exp[C_4 \cdot x] + C_5 \quad (15)$$

siendo:

$$C_1 = \frac{N_0 \cdot A_1}{k_v \cdot V_0 \cdot (C-2)} \quad C_2 = (C-2) \cdot k_v \quad C_3 = -\frac{N_0 \cdot A_1}{2 \cdot k_v \cdot V_0}$$

$$C_4 = -2 \cdot k_v \quad C_5 = -\frac{N_0 \cdot A_1}{2 \cdot k_v \cdot V_0 \cdot (C-2)}$$

Por otra parte:

$$\int_0^x \exp\left[\int_0^x P(x) \cdot dx\right] \cdot F(x) \cdot dx =$$

$$= \int_0^x \frac{a_i}{V_0} \cdot \exp[C_1 \cdot \exp[C_2 \cdot x] - C_3 \cdot \exp[C_4 \cdot x] + C_5 - k_v \cdot x] \cdot dx \quad (16)$$

Para resolver esta integral hay que realizar el desarrollo en serie de Taylor de los términos $\exp[C_2 \cdot x]$ y $\exp[C_4 \cdot x]$ hasta el segundo orden, porque el desarrollo hasta primer orden se cancela. De esta forma se obtiene:

$$\frac{a_i}{V_0} \int_0^x \exp[C_6 \cdot x^2 - k_v \cdot x] \cdot dx = \frac{a_i}{V_0} \cdot Ie(x) \quad (17)$$

donde

$$C_6 = \frac{N_0 \cdot A_1 \cdot k_v \cdot C}{2 \cdot V_0} \quad (18)$$

la integral $Ie(x)$ se puede hallar desarrollando en binomios de Newton, resultando:

$$Ie(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{r=0}^{l-1} \binom{l}{r} (-k)^r (C_6)^{l-r} \frac{x^{2l-r+1}}{2l-r+1} \quad (19)$$

donde

$$\binom{l}{r} = \frac{l!}{r!(l-r)!} \quad (20)$$

con esto la densidad electrónica resulta:

$$n_e(x) = \frac{n_{e0}}{\exp[-C_1 \cdot \exp[C_2 \cdot x] + C_3 \cdot \exp[C_4 \cdot x] - C_5] \cdot \left[1 + \frac{a_i}{V_0} \cdot n_{e0} \cdot Ie(x)\right]^{-1}} \quad (21)$$

Esta es la expresión analítica para la densidad electrónica en un láser de CO₂ de flujo transversal para un campo eléctrico constante. El problema que presenta esta ecuación es que $Ie(x)$ toma valores muy grandes, y según las comparaciones con las simulaciones numéricas realizadas, es necesario tomar más de 120 términos de

dicha integral para que la ecuación (21) se asemeje a la solución numérica. La realización de estos cálculos requiere una sobrecarga computacional que dificulta su aplicación. Pese a esto se puede llegar a una expresión mucho más sencilla haciendo la siguiente observación: la solución particular de la ecuación (12) está dada por un término que tiende a cero muy rápidamente multiplicado por otro que tiende a infinito. Luego analizando el límite de esta ecuación cuando x tiende a infinito se puede encontrar una solución aproximada.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w_p = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp[-\int P(x) dx] \cdot \int \exp[\int P(x) dx] \cdot \frac{a_1}{V_0} \exp[-k_v x] dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 / V_0 \cdot \exp[-k_v \cdot x]}{P(x)} \quad (22)$$

De esta forma se puede aproximar la ecuación (21) por:

$$n_e(x) = \frac{n_{e_0}}{\exp[-C_1 \exp[C_2 x] + C_3 \exp[C_4 x] - C_5] + w_p} \quad (23a)$$

$$w_p = \frac{a_1}{V_0} \cdot n_{e_0} \cdot \frac{\exp[-k_v \cdot x]}{\exp[C_4 \cdot x] \cdot (\exp[C \cdot k_v \cdot x] - 1)} \quad (23b)$$

Esta expresión es más sencilla y arroja muy buenos resultados. En la figura 2 se compara la solución numérica de la ecuación (2) con la ecuación (23).

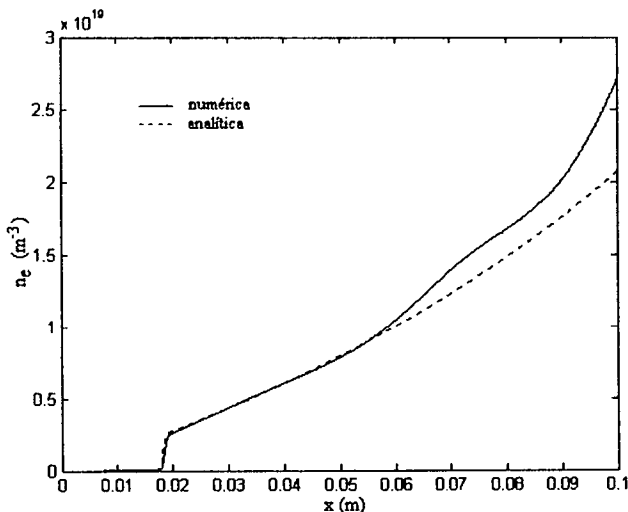


Figura 2. Comparación entre la curva numérica y la aproximada por la ecuación (28).

Como puede observarse de la figura, este desarrollo permite analizar el comportamiento de la densidad electrónica una vez establecida la descarga. Puede verse que la misma tiende a crecer en la misma dirección del flujo, pero no tan abruptamente como puede pensarse a priori. Esto es a causa de que si bien la densidad de moléculas baja mucho, provocando un fuerte incremento en $A(x)$, simultáneamente se produce un incremento de la velocidad que disminuye el término de generación, $A(x)/V(x)$.

VII. CONCLUSIONES

El análisis llevado a cabo en la sección V logra explicar el "efecto de soplado" que se observa en toda descarga eléctrica de flujo transversal. Asimismo se muestra que este fenómeno es consecuencia de la forma que adquiere la densidad electrónica a lo largo del flujo y no así del movimiento de las moléculas en esta dirección como suele considerarse a priori.

El desarrollo de la sección VI permite obtener una ecuación simple (23) para describir el comportamiento de la densidad electrónica. Con esta expresión y observando la figura 2 se puede concluir que ante la presencia de un campo eléctrico constante, la descarga no puede sostenerse por muchos centímetros, puesto que la densidad electrónica supera el valor crítico para el cual se desarrollan inestabilidades que llevan a que la descarga degenera en régimen de arco.

Referencias

- 1 - W. J. Witteman, "The CO₂ Laser", Springer Series in Optical Sciences, vol. 53, Ed. Springer-Verlag, (1986).
- 2 - M. J. Zucrow, J. D. Hoffman, "Gas Dynamics", John Wiley & Sons, (1976).
- 3 - M. González, I. Rios, V. D'Accurso, G. Santiago y C. Rosito, "Electrodo ideal para láseres de CO₂ de flujo transversal", Presentado a la reunión AFA 2003.
- 4 - J. J. Lowke, A. V. Phelps y B. W. Irwin, *J. Appl. Phys.*, **44**, 4664, (1973).
- 5 - J. Rey Pastor, "Análisis Matemático tomo III", Ed. Kapelus, (1972).