

CARACTERIZACIÓN DEL FLUJO A TRAVÉS DE MEDIOS POROSOS USANDO EL MÉTODO DE LATTICE-BOLTZMANN

CHARACTERIZATION OF THE FLOW THROUGH POROUS MEDIA USING THE LATTICE-BOLTZMANN METHOD

F. Etcheverry, D. Müller, and M. Cachile*

Grupo de Medios Porosos - Facultad de Ingeniería-
Universidad Nacional de Buenos Aires – (*)CONICET
Paseo Colón 850 - (1063) –Buenos Aires - Argentina

e-mail: mcachil@fi.uba.ar

Se realizaron simulaciones del flujo a través de medios porosos 2D utilizando el método de Lattice-Boltzmann. Se estudió la relación que existe entre la porosidad y la permeabilidad, que son parámetros importantes para caracterizar un medio poroso. Se ha demostrado que el de Lattice-Boltzmann es un método adecuado para resolver la ecuación de Navier-Stokes incompresible. Dado el carácter local del método, es adecuado para condiciones de contorno de geometría compleja. Los medios porosos usados en estas simulaciones están constituidos por obstáculos de tamaño uniforme. Se encontró que el parámetro relevante que controla la permeabilidad, en estas condiciones es la distancia media entre obstáculos, lo que resulta un aporte original al tema.

Palabras Claves: Lattice Boltzmann, Medios Porosos, simulación numérica, permeabilidad.

The flow through porous media was simulated in 2D using the Lattice-Boltzmann method. The relation between porosity and permeability, which are important parameters to characterize porous media has been studied. The Lattice-Boltzmann method has been established to be a suitable procedure for solving incompressible Navier-Stokes equation in porous media given its local character. The media used in this work were built as a random distribution of circular obstacles with uniform diameter. It has been found that a relevant parameter that controls the permeability is the mean distance between obstacles, which is an original contribution to this subject.

Key Word: Lattice Boltzmann, porous media, numerical simulation, permeability

I. INTRODUCCIÓN

La relación entre permeabilidad y porosidad es de gran importancia para los estudios que involucran el transporte de fluidos a través de medios porosos. Estos fenómenos involucran problemas de acuíferos, recuperación de petróleo, transporte de contaminantes en suelos, etc.

Cuando un fluido atraviesa un medio poroso, la diferencia de presión entre sus extremos y el caudal que lo atraviesa están relacionados a través de la llamada “Ley de Darcy”, quien la enunció en 1856⁽¹⁾:

$$Q = k \frac{A \Delta p}{\mu L} \quad (1)$$

Donde Q es el caudal, μ la viscosidad, Δp es la diferencia de presión, L es la longitud, A el área transversal y k la permeabilidad, que representa la conductividad del medio poroso. Se encontró que esta relación resulta válida para una gran variedad de medios porosos naturales y artificiales.

Para números de Reynolds suficientemente bajos, la permeabilidad depende sólo de parámetros geométricos. Su relación con la porosidad ϕ (cociente entre el volumen libre y el volumen total), aunque de gran importancia, sigue siendo un problema abierto, salvo para algunas configuraciones simplificadas⁽²⁻⁵⁾.

El método de simulación numérica utilizado, llamado Lattice-Boltzmann^(6,7) es una técnica de simulación de fluidos en donde se adopta un enfoque distinto de los métodos usuales de resolución de la ecuación de Navier-Stokes. Éste se basa en la descripción microscópica y estadística del fluido por lo que se presta fácilmente para su implementación en fluidos complejos, reacciones químicas o geometrías complicadas.

La descripción del fluido se realiza a través de funciones de densidad local f_i . El espacio se discretiza y, en orden microscópico, el fluido se mueve en las

* Autor a quién debe dirigirse la correspondencia.

direcciones dadas por los primeros vecinos de cada nodo de la red discreta.

La evolución temporal se modeliza como una sucesión de una etapa de colisión, local, que es seguida por otra de traslación del fluido en las direcciones de la red, \mathbf{e}_i :

$$\Delta f_i = -\frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (2)$$

Donde $i=1, \dots, 8$, $\Delta f_i = f_i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i, t + \delta) - f_i(\mathbf{x}, t)$, es la variación en la dirección \mathbf{e}_i en el intervalo de tiempo δ , τ es el tiempo de relajación de f_i hacia la distribución en el equilibrio f_i^{eq} , que, en la aproximación BGK^(6,7) se escribe como:

$$f_i^{eq} = t_i \rho \left[1 + 3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right] \quad (3)$$

Donde t_i son parámetros propios de la red y \mathbf{u} y ρ son la velocidad y densidad macroscópicas respectivamente.

La densidad ρ se escribe como:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i \quad (4)$$

Y la presión p es:

$$p = c_s^2 \rho = \frac{1}{3} \rho \quad (5)$$

con c_s , la velocidad del sonido en la red.

Las ventajas de este método son principalmente dos. En primer lugar, no es necesario conocer las ecuaciones macroscópicas que controlan el fenómeno, puesto que solo se controlan las interacciones básicas entre las partículas. En el caso de la evolución de una sola especie, como es el nuestro, consiste solamente en la aplicación del operador de colisión con lo que (2) resuelve la ecuación de Navier-Stokes incompresible⁽⁶⁻⁹⁾.

En segundo lugar, la característica evolución local del método de Lattice-Boltzmann permite que las condiciones de frontera con las paredes puedan tratarse simplemente como un caso particular de colisión, permitiendo contornos de forma arbitraria y, en nuestro caso particular, un número arbitrario de obstáculos distribuidos al azar.

El objetivo del presente trabajo es caracterizar numéricamente la relación que existe entre la permeabilidad y la porosidad en condiciones geométricas simples: se trabajó en 2 dimensiones, con un canal rectangular y medios porosos constituidos por obstáculos circulares de radio uniforme.

II. IMPLEMENTACIÓN Y DESARROLLO

Las simulaciones se realizaron utilizando un código de Lattice-Boltzmann, en aproximación BGK empleando la red D2Q9, en dos dimensiones y 9 vecinos. La región de integración tiene un tamaño de 1500 nodos de ancho por 500 de alto.

Como condición de contorno tanto a la entrada (pared izquierda) como a la salida (pared derecha) se fijó un perfil de velocidades de Poiseuille. Además de

utilizar el mismo perfil a la entrada y a la salida, se tienen condiciones periódicas en los contornos derecho e izquierdo, siguiendo el trabajo de Zou y He⁽¹⁰⁾. Con el objeto de que la convergencia sea más rápida, esta condición inicial de velocidad también se usa en todo punto interior.

En las paredes superior e inferior, la condición de contorno fue la de pared rígida, al igual que en los obstáculos interiores. Para ambos se utilizó la condición de "bounce-back"⁽¹¹⁾ en la que se invierte el sentido de la velocidad en la colisión con los obstáculos, lo que genera velocidad nula en los entornos de los mismos.

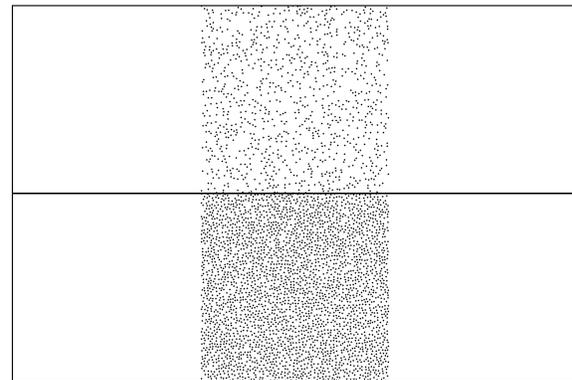


Figura 1. dos medios porosos utilizados, con 1000 (superior) y 3000 obstáculos.

Los medios porosos utilizados constan de obstáculos de forma circular del mismo diámetro, ubicados al azar en el tercio central de la matriz, de 500x500 nodos, con el objeto de que el flujo pueda regularizarse antes de entrar y luego de pasar por el medio poroso. En la figura 1 se muestran dos de los medios porosos empleados. Se impuso como condición adicional que la distancia entre cualquier par de centros fuera igual o mayor a 3 radios, lo que garantiza que no se formen agregados ni aparezcan zonas de estancamiento, que no participan del flujo global. Se estudiaron algunos medios porosos construidos con los obstáculos colocados en un arreglo regular, con el objeto de estudiar la influencia de la distribución de las distancias entre los mismos.

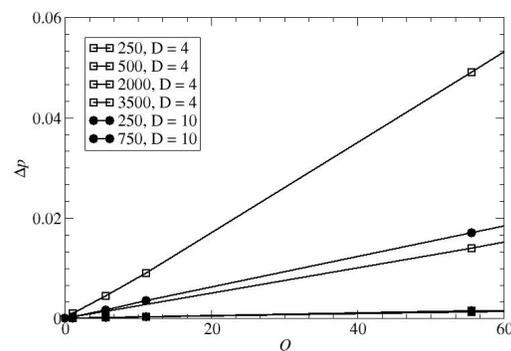


Figura 2: Relación entre Δp y Q para medios porosos de diámetros 4 y 10 nodos.

En nuestro caso, la porosidad resulta:

$$\phi = 1 - \frac{N\pi D^2}{4 \cdot 500^2} \quad (6)$$

donde N es el número de obstáculos, de diámetro D y 500^2 es el área total de la región central ocupada por el medio poroso.

Se trabajó con medios porosos con obstáculos circulares desde 4 hasta 20 nodos de diámetro. La cantidad de obstáculos se varió entre 20 y 4500 (en la zona central, de 500×500 nodos) y con porosidades de entre 0.95 y 0.78.

Se determinó el rango de caudales para el cual se cumple la relación (1). En la figura 2 se muestra el resultado de este estudio para la permeabilidad reducida, k/k_0 donde k_0 es la permeabilidad de una celda libre de obstáculos ($\phi = 1$).

En todos los casos, se midió la diferencia de presión entre los extremos del medio poroso, calculada según la relación (5) y suponiendo un espesor unitario para el cálculo del área transversal A.

El estudio de la permeabilidad en función de las características del medio poroso, se realizó con dos metodologías diferentes. Por un lado, se estudió la variación de la permeabilidad cuando se mantiene constante el diámetro de los obstáculos y se varía su número. El resultado de este estudio se muestra en la figura 3.

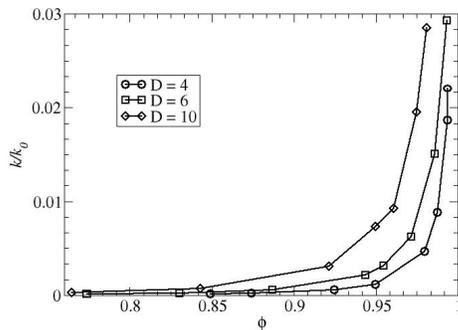


Figura 3: Permeabilidad reducida en función de la porosidad.

Por otro lado, se estudió la variación de la permeabilidad cuando se varía el número y diámetro de los obstáculos pero se mantiene constante la porosidad. En este caso, se utilizaron los medios porosos formados por las siguientes combinaciones de diámetro y número de obstáculos:

Serie 1: $\phi = 0.95$							
N	500	128	80	40	30	25	20

D	4	8	10	14	16	18	20
Serie 2: $\phi = 0.9$							
N	1000	250	160	80	60	50	40
D	4	8	10	14	16	18	20

Tabla 1) Combinaciones de cantidad (N) y diámetro de obstáculos (D) con porosidad constante.

Para este análisis el parámetro relevante es la distancia media entre obstáculos, d . En la figura 4 se muestra la dependencia de la permeabilidad reducida con d para las dos series de la tabla 1.

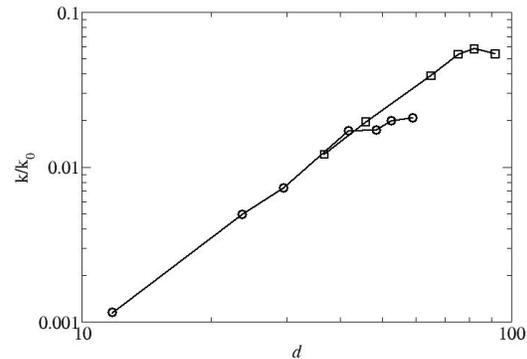


Figura 4: Permeabilidad reducida en función de la distancia media, d , entre obstáculos para las series 1 y 2 de la tabla 1.

III RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se implementó el método de Lattice-Boltzmann conocido como BGK en dos dimensiones, (D2Q9) para una sola especie que fluye a través de un medio poroso⁽¹²⁾. Se fijó un perfil de velocidad parabólico en los extremos del recinto como condición de contorno, dado que se estudia la relación entre el caudal y la diferencia de presión. En esta etapa del trabajo, las simulaciones se llevaron a cabo en recintos de 1500 nodos de ancho por 500 de alto como compromiso entre precisión y tiempo de cálculo. Los medios porosos utilizados fueron obtenidos como distribuciones al azar de obstáculos circulares de diámetro idéntico, ubicado en el tercio central del recinto, con el objeto de regularizar el flujo a ambos lados del mismo.

En primer lugar, se estudió la dependencia entre la diferencia de presión y el caudal. Se encontró que, según se muestra en la figura 2, están relacionados linealmente para caudales suficientemente bajos, tal como sugiere la ley de Darcy⁽¹⁾.

Si se mantiene fijo el diámetro de los obstáculos, se encontró que, razonablemente y en concordancia con lo que sucede en condiciones similares, la permeabilidad aumenta con la porosidad tal como se muestra en la figura 3. En esta figura, como en las siguientes, se

decidió graficar la permeabilidad reducida con el objeto de simplificar ulteriores comparaciones con otras configuraciones.

Sin embargo, si se fija la porosidad y se varía el número de obstáculos (y su diámetro) se observa que la permeabilidad también varía, lo que indica que, en este caso, la porosidad no es el parámetro determinante. Al mantener fija la porosidad, el aumento del diámetro de los obstáculos implica una disminución de su número, lo que genera que la distancia media entre ellos aumente. Por esta razón, el parámetro pertinente es la distancia media entre obstáculos.

Basado en el resultado anterior, y dado que en el análisis mostrado en la figura 3 también, al variar la cantidad de obstáculos se varía la distancia media entre ellos, se decidió graficar conjuntamente ambos estudios, en función de la distancia d , que se muestra en la figura 5. En la misma, se observa que los resultados forman aproximadamente una curva universal.

La relación (1) dice que, salvo una constante C que depende del dispositivo y del fluido, se cumple que

$$k = C \frac{Q}{\Delta p} \quad (6)$$

Donde Q es el caudal que circula por el medio poroso, resultado de la suma de los caudales individuales Q_i que circulan por los intersticios porales, multiplicado por algún factor de forma, ψ_i para cada uno de ellos:

$$Q = \sum \psi_i Q_i \quad (7)$$

Se tiene entonces que, aproximando $Q_i \approx d_i^3$, que es el resultado que se obtiene para un canal de ancho d_i :

$$Q \approx \sum \psi_i d_i^3 \quad (8)$$

Lo que muestra que la porosidad depende de la distribución de las distancias entre obstáculos.

La relación (8) no implica necesariamente que la porosidad del medio va a depender con la potencia 3 de la distancia entre obstáculos, pues están involucrados los factores ψ_i , que incluyen a la tortuosidad, entre otros. Sin embargo, se espera que la porosidad dependa principalmente de la distribución de las distancias.

La permeabilidad, en la figura 5 varía aproximadamente como $d^{2.5 \pm 0.3}$, lo que constituye un argumento a favor de la relación (8).

Como argumento complementario, se construyeron medios porosos regulares hexagonales, para los cuales las distancias entre obstáculos son todas iguales. En estos medios porosos, de acuerdo a lo expuesto, se debería encontrar que la permeabilidad es menor que en aquellos distribuidos al azar, dado que la relación (8) implica que las d_i mayores que el valor medio contribuyen de manera más significativa que los valores menores. Efectivamente, se encontró que la permeabilidad de los medios porosos regulares son aproximadamente 1.5 veces mayores que los distribuidos al azar.

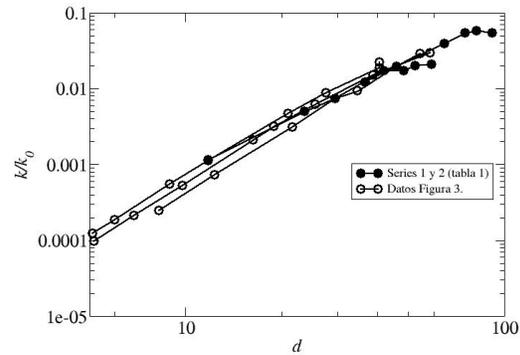


Figura 5: Permeabilidad reducida en función de la distancia media d .

Este estudio, de carácter preliminar, muestra la dependencia de la permeabilidad en función de la distancia entre obstáculos usando una configuración geométrica simplificada. Como continuación interesante resta analizar el comportamiento de la permeabilidad en función de la *distribución* de las distancias entre obstáculos, no solo en función de las distancias medias, así como explorar distintas geometrías para los obstáculos. Un estudio complementario al presente consistiría en estudiar series más largas de porosidad constante, pero para ello es necesario trabajar con regiones de mayor tamaño, lo que implica recursos mayores de hardware. Finalmente, será interesante reproducir estos resultados a nivel experimental.

Referencias

- 1 – Bear J. Dynamics of fluids in porous media, Elsevier New York, 1972.
- 2 – Dardis O., McCloskey J.; *Phys. Rev. E.* 57(4), 4834-4837, 1998.
- 3 – Santos L. et al; *J. Petr. Sci. and Eng.*, 35, 109-124, 2002.
- 4 – Kohring G., *J. Stat Phys.*, 63, 411-418, 1991. Kohring G., *Physica A*, 186, 97-108, 1992.
- 5 – Van Doormaal M., Phaorah J., *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 59, 75-89, 2009.
- 6 – Rothman D., Zaleski S., *Lattice Gas automata: simple models of complex hydrodynamics*, Cambridge University Press, 1997.
- 7 – Rivet J.P., Boon J.P.; *Lattice gas hydrodynamics*, Cambridge University Press, UK, 2001.
- 8 – Martínez D., Matthaeus, Chen S., Montgomery D., *Phys. Fluids*, 6(3), 1285-1298, 1994.

- 9 – Chen S., Doolen G., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30, 329-364, 1998.
- 10 – Zou Q., He X. *Phys. Fluids*, 9 (6) 1591-1598 (1997)
- 11 – Maier R.S., Bernard R. S., Grunau D. W., *Phys. Fluids*, 8 (7), 1788-1801, 1996.
- 12 – Latt, J. <http://www.lbmethod.org>