

Simetrías en osciladores caóticos acoplados y su relación con el generador central de patrones en animales

Horacio Castellini,^{1,*} Hilda Cerderira,² and Lilia Romanelli^{3,**}

¹Dpto. de Física, F.C.E.I.A., Pellegrini 250, 2000 Rosario

²International Centre of Theoretical Physics (ICTP), Trieste, Italia

³Instituto de Ciencias, Universidad de General Sarmiento, Roca 850, 1663 San Miguel, Argentina

La locomoción animal emplea distintos tipos de patrones periódicos, conocidos como andar animal (Animal Gait). Collins y Stewart en 1993 han utilizado los grupos de simetría de permutaciones para caracterizar el andar animal en cuadrúpedos y en bípedos. Estas simetrías condicionan la estructura neuronal del centro de locomoción, conocido como generador central de patrones (GCP), en el cerebro del animal. Ellos a su vez han simulado el GCP con el uso de 4 osciladores no lineales acoplados. Al modificar los acoplamientos entre ellos es posible reproducir la gama de comportamientos conocidos del GCP. En este trabajo se propone utilizar osciladores caóticos sincronizados por el método de Pyragas para poder no sólo caracterizar las simetrías del GCP, sino que además evaluar el comportamiento de la serie temporal de tiempos de apoyo para futuras aplicaciones en robótica.

Animal locomotion employs different periodic patterns known as animal gaits. In 1993 Collins and Stewart achieved the characterization in quadrupeds and bipeds by using permutation symmetries groups which impose constraints in the locomotion centre called Central Pattern Generator (CPG) in the animal brain. They modelled the CPG by coupling four non linear oscillators and with the only change in the coupling it is possible to reproduce all the gaits. In this work we propose to use coupled chaotic oscillators synchronized with the Pyragas method not only to characterize the CPG symmetries but also evaluate the time serie behaviour when the foot is in contact with the ground for futures robotic applications.

PACS numbers: 05.45.-a

I. INTRODUCCIÓN

El análisis de andares de animales es una ciencia antigua, ya Aristóteles describe el caminar de un caballo en su tratado *De Incessu Animalium*¹. Desde aquella época hasta la actual se avanzó sobre varios paradigmas. Un enfoque moderno representa al andar como patrones cíclicos generados por un arreglo de osciladores no lineales acoplados.¹⁹

Se define como *ciclo* al intervalo entre apoyos del mismo pie durante el proceso de andar, siendo el *factor de apoyo* (β) de un pie, la fracción de ciclo por el cuál está en contacto con la superficie del terreno. Por simplicidad se asume que β es el mismo para todos los pies del animal. La *fase relativa* (ϕ) de un pie es definida como la fracción de ciclo entre el contacto con la superficie de un pie de referencia (en cuadrúpedos es el pie asociado a un miembro izquierdo) y el contacto del otro pie². Evidentemente el pie de referencia tiene fase relativa cero. En este estudio la fase relativa juega un rol crucial para formular las simetrías, no así el factor de apoyo, por lo que no será tenido en cuenta. Los fenotipos mamíferos han evolucionado en dos tipos de andares (no ocurre lo mismo en los fenotipos de insectos, gusanos, etc.). El andar bípedo, donde las dos extremidades pueden estar fuera de fase (caminar ó correr) ó en fase (saltar). El andar cuadrúpedo, que involucra una mayor cantidad de

variantes en función de su fase relativa. Los casos naturales clasificados son³: **Caminar**, las extremidades se mueven desfasadas un cuarto de ciclo entre sí. **Trote**, las extremidades diagonales se mueven en fase, y dicho par está desfasado medio ciclo con respecto al otro. **Paso**, las extremidades delanteras y traseras están apareadas y se mueven desfasadas medio ciclo ambos pares. **Canter**, la extremidad delantera derecha (por ejemplo) y la izquierda trasera se mueven en fase, la frontal izquierda y la posterior derecha se mueven medio ciclo fuera de fase una con respecto de la otra y fuera de fase con respecto del par anterior (en caballos se halló la siguiente secuencia a medida que incrementa su velocidad *caminar, trote, canter, galope*). **Bound**, las extremidades delanteras se mueven en fase, al igual que las traseras pero están medio ciclo desfasadas. **Galope transversal**, es similar al "bound", pero los pies delanteros y posteriores están fuera de fase, la extremidad izquierda posterior está un ciclo fuera de fase con la izquierda delantera, en cambio la derecha posterior está medio ciclo fuera de fase con la derecha delantera. **Galope rotatorio**, similar al galope transversal excepto que las extremidades izquierda y derecha tienen patrones intercambiados de tal forma que están desfasadas medio ciclo una con la otra. **Pronk**, las cuatro extremidades se mueven en fase y se asemeja al saltar de los bípedos, este andar aparece en los felinos pre-adolescentes.

Actualmente, los biólogos asumen que el sistema ner-

vioso animal contiene una variedad de GCP⁴, cada uno orientado a una acción específica. Por ejemplo el GCP locomotor controla el ritmo de andar en mamíferos⁵. Un modelo matemático simplificado de GCP locomotor consiste en suponer la existencia de cuatro celdas acopladas con un oscilador periódico no lineal en cada celda^{6,7}. Bajo este punto de vista el andar de cuadrúpedos fue estudiado por varios investigadores⁸⁻¹⁰ que utilizaron distintos métodos, como ser: la teoría equivariante de bifurcaciones⁷, simulaciones numéricas⁸ y curvas de respuesta de fase¹¹.

La idea de simetría fue introducida en la descripción del andar de cuadrúpedos por Hildebrand¹⁰, Schöner *et al.*¹². Ellos estudiaron los patrones rítmicos de andares usando modelos con simetría. Collins y Stewart fueron los primeros en utilizar el concepto de simetría en un arreglo de osciladores acoplados para modelar el GCP locomotor en cuadrúpedos⁷. Un modelo de GCP para caracterizar la locomoción en cuadrúpedos consiste en una red de cuatro osciladores no lineales idénticos simétricamente acoplados bajo una topología en anillo⁷. Cada oscilador representa alguna extremidad del animal que posteriormente será identificada. La estabilidad de las simetrías y su ruptura juegan un rol efectivo en la validación del modelo a utilizar. Golubisky *et al.*¹³ argumentaron que las simetrías presentes en el modelo de cuatro celdas acopladas no es el apropiado para los cuadrúpedos. La razón es que tanto el trote como el paso corresponden a soluciones conjugadas, es decir tienen la misma estabilidad y su elección depende de las condiciones iniciales. Pero, salvo entrenamiento humano, muchos cuadrúpedos se mueven con paso, pero no trotan (camellos) ó viceversa como en el caso de los caballos. En este trabajo se propuso usar un mecanismo de acople diferente al sugerido por Collins⁷, con ello se pudo evitar la aparición de soluciones conjugadas en el modelo de cuatro osciladores.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que caracteriza al GCP es:

$$\frac{dX_j}{dt} = f(X_j) + h_j(X_{j-1}, X_{j+1}) \quad (1)$$

donde $j = 1 \dots$ módulo 4 es el índice que identifica a cada oscilador, $X_j \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial de velocidades no lineal, y $h_j: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el campo vectorial de acoplamientos. Se define como *simetría de red*¹³ a las permutaciones que preserva los acoplamientos. Es decir, una permutación σ de $\{1 \dots 4\}$ números sobre el espacio de las fases $X = (X_1, X_2, X_3, X_4) \in \mathbb{R}^{4n}$ es:

$$\sigma X = (X_{\sigma^{-1}(1)}, X_{\sigma^{-1}(2)}, X_{\sigma^{-1}(3)}, X_{\sigma^{-1}(4)}) \quad (2)$$

luego σ es una simetría de red si:

$$F(\sigma X) = \sigma F(X). \quad (3)$$

donde se escribió de forma resumida $F(\cdot) = f(\cdot) + h_j(\cdot)$. Luego, se deduce que la condición que debe cumplir el acoplamiento es:

$$h_j(\sigma X_{j-1}, \sigma X_{j+1}) = h_{\sigma(j)}(X_{j-1}, X_{j+1}). \quad (4)$$

Si se define con $[i, j]$ a la acción de permutar $X_i(\cdot)$ por $X_j(\cdot)$, entonces en este trabajo, las simetrías de red son: $\{[1,4]; [2,3]; [1,2]; [4,3]\}$. Como consecuencia de la ecuación (4), se debe verificar que $h_1(\cdot) = h_3(\cdot)$ y $h_2(\cdot) = h_4(\cdot)$. Collins y Stewart⁷ denominaron a esta red como **Tipo-2**.

Otro tipo de simetría es la *simetría de cambio de fase*¹³. Suponiendo que $X(t)$ es una solución periódica con período mínimo (ciclo) T , y γ es una simetría, (ij) , de permutar X_i por X_j , luego $\gamma X(t)$ será otra solución periódica y por condiciones de unicidad, las trayectorias $\{X(t)\}_t$ y $\{\gamma X(t)\}_t$ deben coincidir. Entonces la única solución es la existencia de un desfase θ tal que $\gamma X_j(t) = X_j(t + \theta)$. El par (γ, θ) es una simetría espacio temporal donde θ es un *cambio de fase*.

Por último se define como *andar primario*¹³ a los andares que son modelados por señales de salida provenientes de cada oscilador con idéntica forma de onda, pero con diferente fase.

Como convención se asocia el índice de cada oscilador en la ecuación (1) a una extremidad de la siguiente forma: $j = 1$ inferior izquierda, $j = 2$ superior izquierda, $j = 3$ superior derecha y $j = 4$ inferior derecha. Luego las posibles simetrías de andar primario en cuadrúpedos caracterizados por redes Tipo-2 son⁷:

Tabla 1: Simetrías asociadas con cada andar

Andar	Simetrías	Grupo
Detenido	$(I, \theta) (\alpha, \theta) (\beta, \theta) (\alpha\beta, \theta)$	$D_2 \times S^1$
Pronk	$(I, 0) (\alpha, 0) (\beta, 0) (\alpha\beta, 0)$	D_2
Paso	$(I, 0) (\alpha, \frac{1}{2}) (\beta, \frac{1}{2}) (\alpha\beta, 0)$	\tilde{D}_2^D
Bound	$(I, 0) (\alpha, 0) (\beta, \frac{1}{2}) (\alpha\beta, \frac{1}{2})$	\tilde{D}_2^F
Trote	$(I, 0) (\alpha, \frac{1}{2}) (\beta, 0) (\alpha\beta, \frac{1}{2})$	\tilde{D}_2^L
Galope Rotatorio	$(I, 0) (\beta, \frac{1}{2})$	\tilde{Z}_2^L
Galope Transversal	$(I, 0) (\alpha\beta, \frac{1}{2})$	\tilde{Z}_2^F
Canter	$(I, 0)$	\mathbb{I}

Cuadro I: Donde $\alpha = (12)(34)$, $\beta = (13)(24)$, $\alpha\beta = (14)(23)$ y S^1 se refiere a todo grupo cíclico de cambio de fase módulo uno. D representa a los subgrupos diedrales y Z a los subgrupos cíclicos. El tilde indica la existencia de una simetría de cambio de fase. La notación $\frac{1}{2}$ representa un desfase de medio ciclo.

En este trabajo, se usa una convención diferente, por lo tanto no coinciden las simetrías dadas en la Tabla 1 respecto a las propuestas por Collins *et al.*⁷.

II. MODELO DE GCP USADO

En este trabajo se usa en cada celda un oscilador de Rösler (ver ec. 5) acoplado por el método de control de Pyragas¹⁴ con condiciones elegidas al azar para cada ensayo.

Dicho oscilador caótico es el único que ha mostrado evidencia de mantener un andar primario, en cambio tanto el oscilador de Van der Pool⁷, como el de Showalter¹⁵,

si bien bajo ciertas condiciones simula el envío de pulsos nerviosos, bajo el método de sincronización usado no muestra igualdad de forma de onda en las señales de salida. Este no es un detalle menor pues simplifica mucho el diseño electrónico cuando la forma de onda de cada oscilador simula un andar primario. Esta condición, igualdad de formas de onda de salida, es importante en el comando digital de extremidades mecánicas¹⁶.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(y+x) \\ \frac{dy}{dt} = x+0,2y \\ \frac{dz}{dt} = 0,2+z(x-c) \end{cases} \quad (5)$$

Utilizando un mecanismo de sincronización directa¹⁷, la variable maestra es y y las variables esclavas son x, z . Se utiliza una serie temporal de índice limitado para obtener el valor de la realimentación desfasada. En consecuencia de esto la función de acoplamiento es de la forma:

$$h_i(X_t, X_{t+1}, X_{t-1}) = k_i(y_{t-1}(t-\tau) - y_t(t)) + g_i(y_{t+1}(t-\tau) - y_t(t)) \quad (6)$$

Las condiciones de simetría asociadas a la red Tipo-2 limitan el rango de valores que deben tener las constantes k_i y g_i , en este caso se debe cumplir $g_1 = k_2$, $g_2 = k_3$, $g_3 = k_4$, $g_4 = k_1$, $k_1 = k_2$ y $k_4 = k_3$. El valor del retardo $\tau \in \mathbb{N}$ y la constante c del oscilador de Rössler (ver ec. 5), juegan un rol importante en los patrones de las funciones de onda obtenidas. Una forma esquemática de visualizar el arreglo de osciladores es dada en la figura (1)

Se toma como salida de cada oscilador al valor de la variable $x_i(t)$, afectado por la función umbral

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 2,0 \\ 1 & \text{si } x \leq 2,0 \end{cases} \quad (7)$$

Esto define una aplicación del espacio de las fases al espacio de las matrices binarias de dimensión 2×2 . Por conveniencia al valor 1 se le asocia al estado *extremidad apoyada* en cambio al estado 0 se le asocia el estado *extremidad en movimiento no apoyada*. Finalmente la representación matricial del GCP es de ahora en más

$$C = \begin{pmatrix} \text{Delantera Izquierda} & \text{Delantera Derecha} \\ \text{Trasera Izquierda} & \text{Trasera Derecha} \end{pmatrix}$$

Luego el andar no es más que una concatenación de representaciones matriciales del GCP locomotor. Por ejemplo la siguiente secuencia periódica corresponde al *pronk*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Esto permite visualizar mejor las simetrías del andar primario, aunque se pierde noción de los intervalos de tiempos entre patrones. Esto último es de suma importancia

para una aplicación en robótica pues no sólo condiciona la respuesta de los actuadores, sino que la inercia de los sistemas mecánicos pueden producir inestabilidades indeseadas en el andar. Por eso además del análisis de patrones se evaluó el tiempo de cada patrón en la secuencia periódica.

De ahora en más se usará los siguientes modelos *ad hoc* que se llamarán: SA a la condición $k_1 = k_3 = 0,1$ y $k_2 = k_4 = 0,001$; y SB a $k_1 = k_3 = 0,1$ y $k_2 = k_4 = -0,001$. Una de las razones para la elección de estos valores es, la presunción que existe una fuerte coordinación de extremidades asociadas a cada hemisferio, en cambio existe una pobre correlación entre extremidades asociadas a hemisferios cerebrales diferentes.²⁰ La otra es, que en los valores propuestos los resultados obtenidos en las simulaciones, son en una gran proporción coincidentes a los hechos empíricos

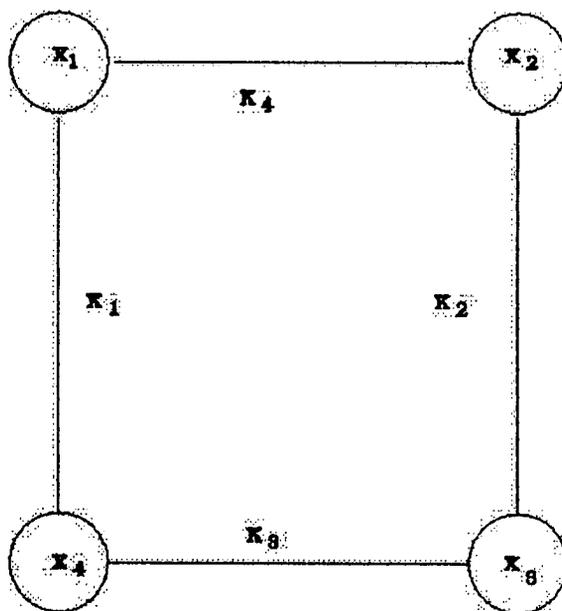


Figura 1: Diagrama de acoplamientos entre celdas.

III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Independientemente del tipo de elección de acoplamientos, SA ó SB, aparece un comportamiento en función del retardo de tiempo, τ , bastante robusto ante variaciones del parámetro c en la ec. 5. A medida que se incrementa el retardo (partiendo de $\tau = 0$) aparece un pasaje de caos \rightarrow oscilaciones armónicas \rightarrow punto estacionario estable \rightarrow bifurcación de Hopf primaria \rightarrow bifurcación de Hopf secundaria \rightarrow caos. Este comportamiento fue ratificado estudiando los máximos exponentes de Lyapunov por medio del paquete TISEAN¹⁸. Si bien esto

parece poco relevante a la hora de evaluar las simetrías, no lo es respecto al tiempo que dura cada patrón, pues una inestabilidad en los tiempos puede ser nociva para un andar regular. Y es menester conocer para que valores de retardo el intervalo de tiempos que dura cada patrón se torna inestable. En general, tanto para $\tau < 6$ como para $\tau > 38$ los intervalos de tiempos dejan de poseer regularidad, por lo que se limitará el intervalo de retardo al intervalo $6 \leq \tau \leq 38$.

A. Acople SA

Para $6 \leq \tau \leq 13$ el patrón de andar periódico obtenido fue

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es trivial deducir que corresponde al caso de *prank* y corresponde a la simetría D_2 .

En cambio para $\tau = 14$ deja de ser estable el ciclo límite y aparece un punto fijo estable produciendo que el sistema tienda en forma asintótica a un punto estacionario. Esto produce como única secuencia de andar el patrón

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

lo cual corresponde al caso de simetría $D_2 \times S^1$, es decir al andar *detenido*, pues todos los miembros están apoyados independientemente del tiempo transcurrido. Cabe destacar que el sistema recupera su estado caótico si se anula el acoplamiento a partir de un instante de tiempo posterior al alcanzar el punto estacionario.

Para $\tau = 34$ dicho punto estacionario deja de ser estable y se torna en un foco inestable, cuyas órbitas convergen a un único ciclo límite diferente del primero observado. El patrón encontrado para $34 \leq \tau \leq 38$ fue

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Este posee simetría \tilde{D}_2^L la cual corresponde al andar *trote*. En este tipo de patrón, cada avance involucra el apoyo de las cuatro extremidades. Esto último, se observa en cuadrúpedos cuyo peso corporal es elevado como son jirafas, elefantes y búfalos, en cambio no se observa en caballos, peros y otros cuadrúpedos⁷.

No se encontraron otros patrones para este tipo de acoplamiento en la gama de valores caóticos de c estudiados.

B. Acople SB

Nuevamente para $6 \leq \tau \leq 13$ el sistema caótico acoplado oscila en un ciclo límite estable, que en este caso produce un patrón de andar

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

el cual posee simetría \tilde{D}_2^F , esto corresponde al andar *bound*. Es necesario hacer una salvedad, el verdadero andar *bound* como el observado en la ardilla siberiana⁷ involucra el no apoyar las cuatro extremidades. En cambio en este patrón se apoyan las cuatro extremidades para poder generar un avance por lo tanto no existe como tal en la naturaleza. Como se trabaja en el espacio de las matrices booleanas, este inconveniente se resuelve aplicando el operador negación a cada uno de los elementos de la matriz.

Como lo ocurrido en el acoplamiento SA, para valores de retardo comprendidos entre $14 \leq \tau \leq 32$ el sistema acoplado tiene un punto estacionario estable y deja de ser estable el ciclo límite. Esto concuerda con el andar *detenido*.

Para $\tau = 33$ el punto estacionario deja de ser estable, y aparece un ciclo límite estable en el sistema acoplado produciendo el patrón

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Este tiene simetría \tilde{D}_2^P la cual corresponde al andar *paso*. Pero como en la situación anterior en el trote de un caballo nunca se apoyan los cuatro miembros, aplicando el operador negación se obtiene el patrón de andar deseado.

A diferencia del acoplamiento SA, en el acoplamiento SB el andar no es estructuralmente estable para otros valores del retardo. Para $\tau = 34$ hasta $\tau = 37$ el andar cambia a otro patrón periódico

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Este patrón posee las siguientes simetrías $\{(I, 0)(\alpha, \frac{2}{3})(\beta, \frac{2}{3})\}$. Esto no coincide con ningún grupo de los clasificados para el andar primario observado en la naturaleza, por lo que no es un andar correspondiente a ningún cuadrúpedo y pasaría a ser un andar artificial. Para $\tau = 38$ el sistema genera nuevamente un andar tipo *trote*.

IV. CONCLUSIONES

El empleo del método de sincronización directa Pyragas (ver ec. 6) es una forma novedosa de acoplamiento

entre celdas para redes Tipo-2, usada como modelo de GCP. Siendo de importancia el haber podido evitar la indeseable aparición de soluciones conjugadas. En cambio, aparecen patrones no naturales para valores en el retardo en el acoplamiento SB. Esto no es un grave problema en una aplicación a robótica, pero es otro hecho indeseable si esto intenta modelar el GCP locomotor de los cuadrúpedos. Por otro lado no fue posible observar el andar *canter*, ni tampoco el *galope transversal*, por lo

cual este tipo de red no es adecuada para un modelo general de GCP locomotor natural. Sin embargo por su simpleza, es útil considerarla como alternativa a los GCP artificiales usados en robots.

V. REFERENCIAS

- * Electronic address: hcaste@fceia.unr.edu.ar
** Electronic address: lili@ungs.edu.ar
- ¹ A. Peek and E. Foster, *Parts of Animals, Movements of Animals, Progression of Animals* (Harvard University Press, 1936).
 - ² J. Gray, *Animal Locomotion* (Weidenfeld and Nicolson, 1968).
 - ³ R. Alexander, *Int. J. Robot Res.* **3**, 49 (1984).
 - ⁴ S. R. A. Cohen and S. Grillner, *Neural Control of Rhythmic Movements in Vertebrates* (Wiley New York, 1988).
 - ⁵ A. Dagg, *Mammal Rev.* **3**, 135 (1973).
 - ⁶ L. Glass and R. Young, *Brain Res.* **179**, 207 (1979).
 - ⁷ J. Collins and I. Stewart, *J. Nonlin. Sci.* **3**, 345 (1993).
 - ⁸ R. Alexander and J. Goldspink, *Mechanics and Energetics of Animal Locomotion* (Chapman and Hall, 1977).
 - ⁹ M. Hildebrand, *Folia Biotheoretica* **4**, 10 (1964).
 - ¹⁰ M. Hildebrand, *Science* **150**, 701 (1965).
 - ¹¹ C. B. C. Canvier and J. Byrne, *Biol. Cybern.* **68**, 1 (1997).
 - ¹² W. Y. G. Schoëner and J. Kelso, *J. Theor. Biol.* **142**, 359 (1990).
 - ¹³ M. Golubitsky and P. Luciano, *J. Math. Biol.* **42**, 291 (2001).
 - ¹⁴ K. Pyragas, *Phy. Lett.* **170** (1992).
 - ¹⁵ K. S. V. Petrov and K. Showalter, *J. Chem. Phys.* **97**, 6191 (1992).
 - ¹⁶ M. H. M. Lewis and A. Cohen, in *Report Iguana Robotics Inc.* (2002).
 - ¹⁷ G. Malescio, *Phys. Rev. E.* **53**, 2949 (1996).
 - ¹⁸ R. Hegger and H. Kantz, *Practical implementation of non-linear time series methods: The tisean package* (1998), URL <http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean>.
 - ¹⁹ En futuros párrafos se hará una descripción *in extenso* de este enfoque
 - ²⁰ Cabe recordar que los subíndices asociados a los acoplamientos guardan relación con la convección sobre las extremidades que se ha mencionado antes en el párrafo I