

Caminatas Aleatorias Desacopladas para Distribuciones de Lévy

Miguel A. Ré, Carlos E. Budde y Domingo P. Prato

Facultad de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria - (5010) - Córdoba - Argentina
e-mail: re@roble.fis.uncor.edu

Se presenta un modelo de difusión basado en el esquema de Caminatas Aleatorias de Tiempo Continuo (CTRW) con densidad de probabilidad desacoplada para las transiciones, donde la probabilidad de saltos largos es proporcional a $x^{-1-\gamma}$ (distribuciones de tipo Lévy). Aún cuando la probabilidad para la posición del caminante al tiempo t , $P(x;t)$, no tiene segundo momento finito para $0 < \gamma < 2$, es posible definir el ancho de la distribución recurriendo a estimadores alternativos. Se encuentra además que cualquier estimador razonable para el ancho de la distribución exhibe la misma dependencia temporal en el límite de tiempos grandes, dado que en este límite $P(x;t)$ converge a la densidad $L_\gamma(x/t^\alpha)$, una función de Lévy. Esta propiedad de "escaleo" se verifica numéricamente a partir de experimentos de Monte Carlo. Se encuentra que si la densidad de probabilidad para los tiempos de pausa entre transiciones tiene primer momento finito entonces $\alpha = 1/\gamma$, en tanto que para densidades con comportamiento asintótico $t^{-1-\beta}$ con $0 < \beta < 1$ (densidades de "colas largas") $\alpha = \beta/\gamma$. A partir de esta propiedad de "escaleo" proponemos un criterio generalizado para la clasificación de los procesos difusivos conforme al valor de α .

It is introduced a diffusion model in the Continuous Time Random Walk scheme for the continuous space with a separable transition probability density, where the probability for long jumps is proportional to $x^{-1-\gamma}$ (a Lévy like probability density). Even when the probability density for the walker position at time t , $P(x;t)$, has not a finite second moment when $0 < \gamma < 2$, it is possible to define a width for this distribution if we consider alternative estimators. It is then found that any reasonable width estimator will exhibit the same long time behaviour, since in this limit $P(x;t)$ goes to the distribution $L_\gamma(x/t^\alpha)$, a Lévy distribution. This scaling property is verified numerically by means of Monte Carlo simulations. We also find that if the waiting time density has a finite first moment then $\alpha = 1/\gamma$, while for densities with asymptotic behaviour $t^{-1-\beta}$ with $0 < \beta < 1$ ("long tail" densities) it is verified $\alpha = \beta/\gamma$. Based on this scaling property we propose a generalized criteria for the classification in superdiffusive and subdiffusive processes, according to the value of α .

Pacs N^o 05.40+j; 05.60.+w; 02.50+Ey; 82.20 Hf

1 Introducción

El estudio y modelado de procesos difusivos anómalos ha recibido recientemente creciente atención⁽¹⁻⁷⁾. Estos procesos se clasifican generalmente a partir de la dependencia temporal (en el límite de tiempos grandes) del desplazamiento cuadrático medio del caminante

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t^{2\alpha} \quad (1)$$

El proceso de difusión normal corresponde al valor $\alpha = 1/2$ que separa los regímenes subdifusivo ($\alpha < 1/2$) y superdifusivo ($\alpha > 1/2$).

Diversos fenómenos exhiben un régimen subdifusivo como podemos encontrarlo en procesos de transporte en sistemas amorfos como materiales porosos, cristales dopados, etc.⁽⁸⁻¹¹⁾.

Aún cuando menos frecuentes, también encontramos regímenes superdifusivos en sistemas hamiltonianos con dinámica caótica o en flujo turbulento en fluidos⁽¹²⁻¹⁵⁾. En particular para este último caso Monin y Yaglom⁽¹²⁾ han encontrado valores de α cer-

canos a $3/2$.

La formulación estocástica de los fenómenos de transporte a partir de modelos de caminatas aleatorias para procesos superdifusivos requiere la consideración de densidades de probabilidad de transición acopladas⁽⁵⁻⁷⁾ si se pretende tener un desplazamiento cuadrático medio finito. Sin embargo, como se ha mostrado en trabajos anteriores^(16,17), esta restricción resulta innecesaria si consideramos estimadores alternativos para el ancho de la distribución. El uso de estos estimadores ha permitido considerar densidades de probabilidad para transiciones separables donde la densidad de probabilidad para el largo de saltos tiene un comportamiento asintótico $x^{-1-\gamma}$, con $0 < \gamma < 2$, para saltos largos.

Como estimadores alternativos hemos propuesto la recíproca de $P(x=0;t)$, la densidad de probabilidad para la posición en el origen, o $x_{1/2}$ tal que $P(x_{1/2};t) = 1/2P(x=0;t)$, es decir el ancho a altura mitad. Estos estimadores tienen la misma dependencia temporal que $\langle x^2(t) \rangle$ a tiempos largos en

el caso de difusión normal. También hemos establecido una conexión con la estadística no extensiva de Tsallis⁽³⁾ considerando como estimador del ancho al segundo q -momento de la distribución con la relación $q = (3 + \gamma)/(1 + \gamma)$.

En la continuidad de este trabajo presentamos en esta comunicación un estudio numérico, basado en simulaciones de Monte Carlo, del comportamiento asintótico de la densidad de probabilidad para la posición al tiempo t , $P(x; t)$. Encontramos en particular que a tiempos grandes $P(x; t)$ converge a una función de Lévy en la variable $\xi = x/t^{1/\gamma}$, $L_\gamma(\xi)$, con comportamiento asintótico $\xi^{-1-\gamma}$ para valores grandes de ξ , cuando la densidad de probabilidad para el tiempo de pausa entre saltos tiene primer momento finito. El resultado puede extenderse a densidades de tiempo de pausa con primer momento divergente, caracterizado por el comportamiento asintótico $t^{-1-\beta}$, con $0 < \beta < 1$, para tiempos de pausa grandes. En este caso encontramos que el factor de escala temporal es $t^{\beta/\gamma}$, es decir que $P(x; t)$ converge a una función de Lévy $L_\gamma(x/t^{\beta/\gamma})$.

El plan de la presentación es el siguiente: en la segunda sección, a continuación, resumimos el modelo de caminata aleatoria de tiempo continuo (CTRW), encontrando en forma analítica el comportamiento asintótico a tiempos grandes para una densidad de tiempos de pausa (WTD) con primer momento finito, basado en la generalización de Lévy-Gnedenko para el teorema central del límite. También estimamos, en el mismo límite, el comportamiento asintótico para WTD con tiempo medio de pausa divergente. Los resultados se verifican numéricamente en la sección 3, a partir de experimentos de Monte Carlo. Para el largo de saltos hemos usado una familia de funciones con el comportamiento asintótico requerido, aunque en general distintas de las funciones de Lévy. Encontramos la convergencia a las correspondientes funciones de Lévy en el límite de tiempos largos luego de un adecuado escaleo de la posición al tiempo t . Por último resumimos los resultados más importantes y presentamos las conclusiones del trabajo en la sección 4.

2 El Modelo de CTRW

Consideramos una CTRW separable en un espacio unidimensional infinito que comienza en $x = 0$ al tiempo $t = 0$; determinada por la densidad de probabilidad para las transiciones

$$\Psi(x, t) = p(x) \psi(t) \quad (2)$$

para un salto de largo x al cabo de un tiempo de pausa t . En esta expresión $p(x)$ corresponde a la densidad de probabilidad para el largo del salto y $\psi(t)$ a la densidad de probabilidad para el intervalo de tiempo entre saltos. Supondremos en general que la densidad de probabilidad $p(x)$ es una función par en x (consideramos una caminata aleatoria simétrica). La densidad de probabilidad para la posición del caminante al tiempo

t es⁽¹⁸⁾

$$P(x; t) = \Phi_0(t) \delta(x) + \sum_{N=1}^{\infty} \Phi_N(t) P_N(x) \quad (3)$$

donde

$$P_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' p(x-x') \int_{-\infty}^{\infty} dx'' p(x'-x'') \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx^{(N-1)} p(x^{(N-2)} - x^{(N-1)}) \quad (4)$$

es la densidad de probabilidad para la posición de la partícula al cabo de $N \geq 1$ saltos y

$$\Phi_N(t) = \int_0^t dt' \Phi_0(t-t') \int_0^{t'} dt'' \psi(t'-t'') \dots \int_0^{t^{(N-1)}} dt^{(N)} \psi(t^{(N-1)} - t^{(N)}) \psi(t^{(N)}) \quad (5)$$

es la probabilidad de que se hayan producido exactamente N saltos al tiempo t . $\Phi_0(t) = \int_t^{\infty} dt' \psi(t')$ es la probabilidad de que el tiempo de pausa entre saltos supere el valor de t .

Encontramos una expresión relativamente más simple para la solución (3) si calculamos la transformada de Laplace en la variable temporal, obteniendo

$$\hat{P}(x; u) = \frac{1 - \hat{\psi}(u)}{u} \left\{ \delta(x) + \sum_{N=1}^{\infty} [\hat{\psi}(u)]^N P_N(x) \right\} \quad (6)$$

De aquí en más representamos por $\hat{f}(u) = \int_0^{\infty} dt \exp(-ut) f(t)$ la transformada de Laplace de la función $f(t)$. Para obtener (6) hemos usado las propiedades del producto de convolución en la transformada de Laplace.

Para procesos con tiempo medio de pausa finito, τ , podemos aproximar $\hat{\psi}(u) \simeq 1 - u\tau \simeq \exp(-u\tau)$ para valores de u pequeños. Si sustituimos esta aproximación y antitransformamos en Laplace obtenemos el comportamiento a tiempos largos ($t \gg \tau$)

$$P(x; t) \simeq P_N(x) \quad N < \frac{t}{\tau} < N + 1 \quad (7)$$

Es decir que a tiempos grandes podemos aproximar la solución de tiempo continuo por la de tiempo discreto con N dado por su valor promedio al tiempo t . El comportamiento de $P_N(x)$ para $N \gg 1$ está determinado por el teorema central del límite cuando la densidad $p(x)$ tiene segundo momento finito. Este es el caso de difusión normal. Sin embargo, si $p(x)$ no tiene segundo momento finito, debe aplicarse la generalización de Lévy-Gnedenko⁽³⁾ para determinar el comportamiento de $P_N(x)$ en el límite $N \gg 1$. Tenemos así que para densidades $p(x)$ con comportamiento asintótico

$$p(x) \simeq A_\gamma \frac{\sigma^\gamma}{|x|^{1+\gamma}} \quad (8)$$

con $0 < \gamma < 2$, en el límite $N \gg 1$, la densidad de probabilidad para la posición puede aproximarse por

$$P_N(x) = \frac{1}{\sigma N^{1/\gamma}} L_\gamma \left(\frac{x}{\sigma N^{1/\gamma}} \right) \quad (9)$$

siendo L_γ la función de Lévy con la dependencia funcional asintótica como en (8) y σ un factor de escala que establece las unidades de longitud. Si bien no conocemos una forma explícita de $L_\gamma(x)$ su transformada de Fourier es $\tilde{L}_\gamma(k) = \exp(-|k|^\gamma)$.

Volviendo al problema de tiempo continuo encontramos la aproximación

$$P(x;t) \simeq \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\tau}{t} \right)^{\frac{1}{\gamma}} L_\gamma \left[\frac{x}{\sigma} \left(\frac{\tau}{t} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] \quad N < \frac{t}{\tau} < N+1 \quad (10)$$

a tiempos grandes. Es decir que a tiempos grandes la distribución para la posición estará dada por una función de Lévy donde el argumento cambia con el factor de escala $(t/\tau)^{1/\gamma}$ en su evolución temporal.

Concluimos de este resultado que cualquier estimador razonable del ancho de la distribución de Lévy L_γ (recordamos que $\langle x^2 \rangle$ es divergente para una distribución de Lévy) nos dará una estimación del ancho de $P(x;t)$ cuya evolución temporal será proporcional a $t^{1/\gamma}$. Puede establecerse también una conexión con la termoestadística no extensiva de Tsallis⁽³⁾, estimando el ancho de la distribución como la raíz cuadrada del segundo q -momento normalizado

$$\langle x^2(t) \rangle_q = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 [P(x;t)]^q}{\int_{-\infty}^{\infty} [P(x;t)]^q} \quad (11)$$

con la relación $q = (3 + \gamma) / (1 + \gamma)$. En particular, usando la aproximación a tiempos largos obtenemos

$$\langle x^2(t) \rangle_q \simeq \left(\frac{t}{\tau} \right)^{2/\gamma} \langle \xi^2 \rangle_{q,L} \quad (12)$$

donde $\langle \xi^2 \rangle_{q,L}$ es el segundo q -momento de la distribución de Lévy

$$\langle \xi \rangle_{q,L} \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 \{L_\gamma[\xi]\}^q}{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \{L_\gamma[\xi]\}^q} \quad (13)$$

Y tenemos que la raíz cuadrada del segundo q -momento exhibe el mismo crecimiento temporal.

Notamos que en general para todo $q > 3/(1 + \gamma)$ tendremos un segundo q -momento finito, resultando el valor definido por la termoestadística no extensiva un valor particular en este rango.

Consideramos ahora situaciones en las que la WTD no tiene primer momento finito, caracterizadas por un comportamiento asintótico de la forma

$$\psi(t) \simeq A_\beta \frac{\tau^\beta}{t^{1+\beta}} \quad (14)$$

con $0 < \beta < 1$ para tiempos de pausa largos. Para estas distribuciones de tiempo de pausa el número medio de saltos al tiempo t crece como $(t/\tau)^\beta$, lo que sugiere una modificación en la ley de crecimiento del ancho de la distribución.

El tratamiento analítico de este caso no presenta la simplicidad de la situación anterior, con tiempo medio de pausa finito. Por esta razón atacamos el problema considerando $P_0(x;t) = P(x;t) - \Phi_0(t) \delta(x)$ (recordemos que la recíproca había mostrado ser una buena estimación del ancho). Esperamos que su evolución temporal nos revele la propiedad de "escaleo" de la distribución a tiempos largos, si es que existe. Partimos de la expresión (6) para la transformada de Laplace evaluada en $x = 0$ y consideramos su comportamiento para valores pequeños de u (determinado por el comportamiento a tiempos largos de $\psi(t)$). En este límite supondremos la validez de la aproximación (9) para todo N , aún cuando ya hemos visto que es una buena aproximación para $N \gg 1$. Esperamos que esta suposición no cambiará sustancialmente el valor de la suma ya que a tiempos grandes ($t \gg \tau$) la contribución de los primeros términos será poco significativa. Aproximamos así

$$\hat{P}_0(x=0;u) = \hat{\Phi}_0(u) \sum_{N=1}^{\infty} \frac{[\tilde{\psi}(u)]^N}{N^{1/\gamma}} L_\gamma(0) \quad (15)$$

Siguiendo a Weiss⁽¹⁸⁾ calculamos la suma para valores $1 < \gamma < 2$ y aproximando $\tilde{\psi}(u) \simeq 1 - (u\tau)^\beta$. En esta aproximación, y usando un teorema Tauberiano, obtenemos

$$P_0(x=0;t) \simeq \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\beta/\gamma} L_\gamma(0) \quad (16)$$

en el límite de tiempos largos.

Este resultado sugiere que la distribución "escalea" proporcionalmente a $(t/\tau)^{\beta/\gamma}$ a tiempos grandes, coincidente con la sustitución de N , el número de saltos, en la solución de tiempo discreto por su valor promedio al tiempo t en el proceso de tiempo continuo.

Hasta aquí el tratamiento analítico efectuado. Corroboramos los resultados obtenidos, en particular para los casos con tiempos medios de pausa divergentes, mediante experimentos de Monte Carlo que presentamos en la sección siguiente.

3 Simulaciones de Monte Carlo

Ilustramos el modelo propuesto y verificamos las conclusiones extraídas, en particular para los casos con WTD de "cola larga" a partir de simulaciones por el método de Monte Carlo. Para las distribuciones de probabilidad para el largo de salto, usamos la familia de funciones obtenidas por Prato y Tsallis⁽³⁾

$$p_\gamma(y) = \frac{B^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right)}{(1+y^2)^{\frac{1+\gamma}{2}}} \quad (17)$$

convenientemente reescrita en términos de la variable renormalizada $y = x/\sigma\sqrt{\gamma}$, siendo x el largo del salto y σ un factor de escala que en particular dará las unidades de longitud. Debe tenerse presente la relación $\gamma = (3 - q)/(q - 1)$ entre el exponente del comportamiento asintótico (8) y el parámetro q de Prato-Tsallis, característico de la estadística no extensiva. En este formalismo σ^2 , el segundo q -momento de las distribuciones (17), es una de las restricciones impuestas en el cálculo variacional.

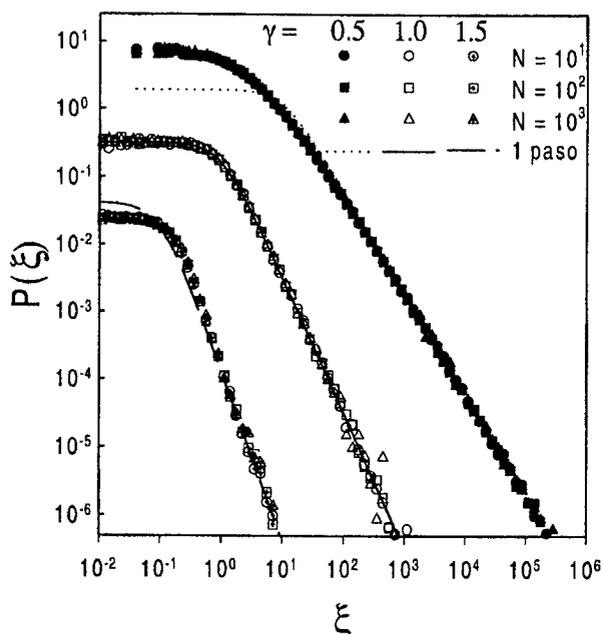


Figura 1: Densidad de probabilidad $P_N(\xi)$ vs. $\xi = x/(\sigma\sqrt{\gamma})/N^{1/\gamma}$. Aquí x es la posición del caminante al cabo de N pasos. Se incluyen los resultados de simulaciones para tres valores diferentes de γ y para cada caso tres valores distintos N . La superposición para cada valor de γ ilustra la convergencia al atractor $L_\gamma(\xi)$. También se han incluido como referencia las densidades $p(x)$ (un paso). Para mayor claridad en la presentación las abscisas y ordenadas de las curvas con $\gamma = 0.5$ se han multiplicado por 10, en tanto que las correspondientes a $\gamma = 1.5$ se han dividido en 10.

En la figura 1 mostramos resultados típicos de simulaciones para el proceso de tiempo discreto con valores de $\gamma = 0.5, 1.0, 1.5$. Se presenta el gráfico de la densidad de probabilidad $P_N(\xi)$ vs. el desplazamiento renormalizado $\xi = y/N^{1/\gamma}$ con escala logarítmica en ambos ejes. Se puede apreciar la convergencia de las distribuciones para distintos valores de N a una única función de acuerdo con las predicciones del teorema de Lévy-Gnedenko. También se han incluido las correspondientes distribuciones de un paso (17) como referencia. Notamos que la coincidencia entre la función de un paso y los resultados de las simulaciones para $N = 10, 100$ y 1000 en el caso $\gamma = 1$ se debe a que en

este caso la función de un paso coincide con el atractor o función de Lévy.

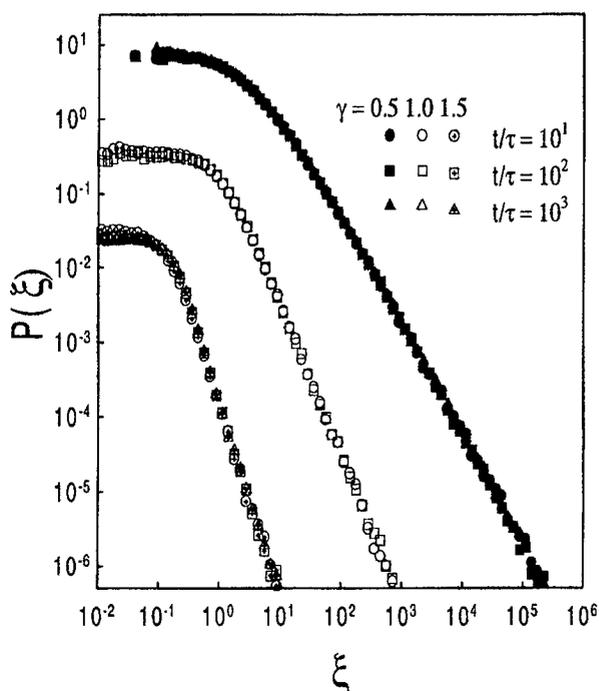


Figura 2: Densidad de probabilidad $P(\xi)$ vs. $\xi = x/(\sigma\sqrt{\gamma})(\tau/t)^{1/\gamma}$ para una CTRW con WTD dada por una distribución de Poisson con tiempo medio τ . Aquí x es la posición al cabo del tiempo t . Se muestran los resultados de experimentos de Monte Carlo para tres valores diferentes de γ a tres valores distintos de t . Notamos la superposición de los resultados para cada valor de γ mostrando la convergencia al atractor. Se verifica así que el factor de escala es el adecuado y por lo tanto que el ancho de la distribución crece como $(t/\tau)^{1/\gamma}$. Las curvas han sido desplazadas con el mismo criterio de la figura 1.

En la figura 2 presentamos algunos resultados representativos de simulaciones para procesos de tiempo continuo con una WTD de Poisson $\psi(t) = \exp(-t/\tau)/\tau$. El gráfico corresponde a la distribución de probabilidad para la variable $\xi = y(\tau/t)^{1/\gamma}$, es decir al desplazamiento renormalizado y reescalado conforme a (10). Las curvas corresponden a los valores $t/\tau = 10, 100$ y 1000 , observándose una buena coincidencia con los valores de tiempo discreto ya ilustrados en la figura 1, verificándose la coincidencia de los atractores para tiempo continuo y tiempo discreto.

Por último, en la figura 3 ilustramos resultados de simulación para CTRW con WTD de "colas largas". Para la generación de los tiempos de pausa hemos elegido la densidad de probabilidad

$$\psi(t) = \frac{1 - b^\beta}{b^\beta} \sum_{j=1}^{\infty} b^{(1+\beta)j} \exp(b^j t/\tau) \quad (18)$$

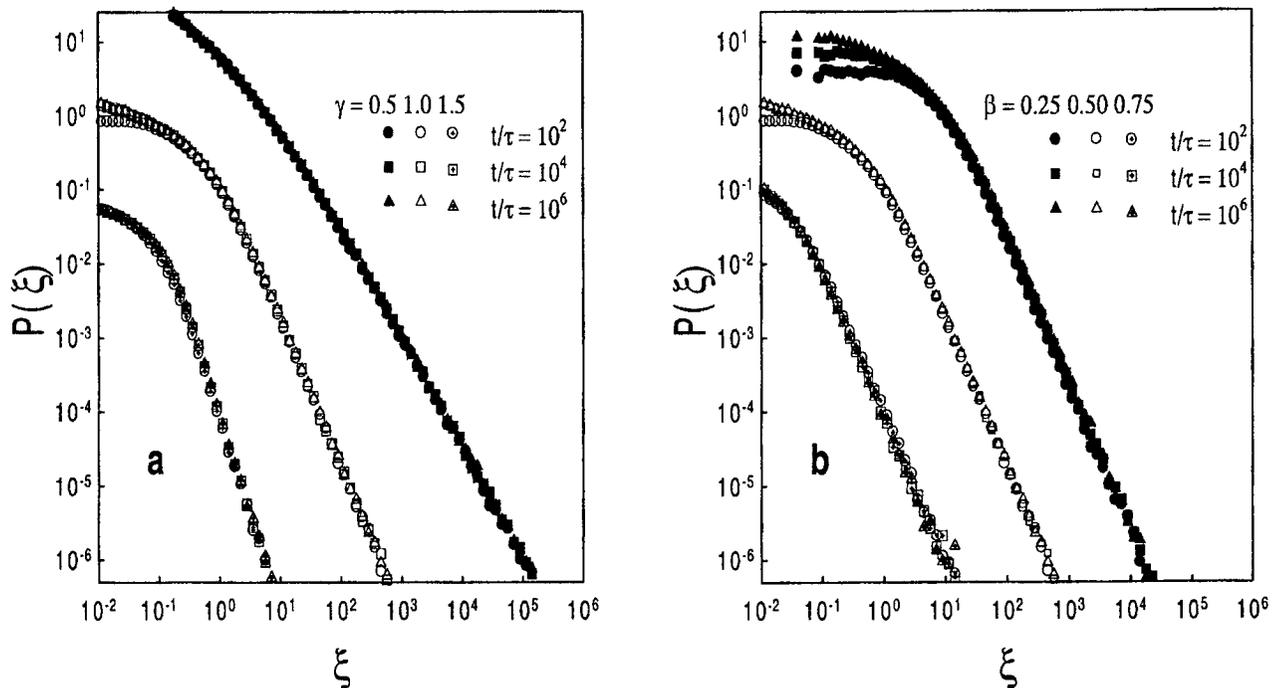


Figura 3: Densidad de probabilidad $P(\xi)$ vs. $\xi = x/(\sigma\sqrt{\gamma})(\tau/t)^{\beta/\gamma}$ para la CTRW con WTD de “cola larga”. x es la posición al tiempo t . En el gráfico a se muestran los resultados para tres valores diferentes de γ a tres valores distintos de t . Para los tres experimentos se eligió $\beta = 0.5$. La superposición para cada γ ilustra la convergencia al atractor $L_\gamma(\xi)$. Se verifica así que la dependencia temporal del factor de escala es $(t/\tau)^{\beta/\gamma}$ para este caso. Las curvas correspondientes a $\gamma = 0.5$ y $\gamma = 1.5$ se han desplazado en el mismo sentido que en las figuras anteriores. En el gráfico b mostramos los resultados correspondientes al caso $\gamma = 1$ (distribución de Cauchy) para tres valores distintos de β . Vemos así que, si bien el factor de escala temporal ha sido elegido correctamente, para los casos de WTD de cola larga existe un factor de escala global dependiente de β . Señalamos que aquí también se han desplazado las curvas multiplicando por 10 las abscisas y ordenadas del caso $\beta = 0.25$ y dividiendo por 10 las de $\beta = 0.75$.

que a tiempos largos ($t \gg \tau$) presenta el comportamiento asintótico $t^{-1-\beta}$ requerido. El gráfico corresponde a la densidad de probabilidad para el desplazamiento renormalizado y reescalado según $\xi = y(t/\tau)^{\beta/\gamma}$ como sugiere el tratamiento analítico. Para el gráfico hemos elegido tres valores de γ (figura 3a) para un único valor de $\beta = 0.5$ y tres valores de β (figura 3b) para $\gamma = 1$, la distribución de Cauchy. Como se desprende de los casos particulares incluidos, los resultados de las simulaciones de Monte Carlo confirman la convergencia de las distribuciones a un único atractor para cada valor de γ , aunque en este caso con $\beta < 1$, aparece un factor de escala dependiente de β pero constante en el tiempo. Dicho factor ya estaba sugerido en la aproximación (16). Encontramos además que la convergencia al atractor resulta más lenta para valores decrecientes de β . Este resultado puede interpretarse notando que valores menores de β corresponden a una mayor probabilidad de tiempos de espera largos como sugiere la dependencia temporal del número medio de saltos al tiempo t en el límite de tiempos grandes: $N(t) \propto t^\beta$. Este efecto resulta más notable para valores pequeños de ξ .

Por último notamos que para WTD con tiem-

pos medios divergentes el factor temporal de escala crece como $(t/\tau)^{\beta/\gamma}$ en el límite de tiempos grandes y, consecuentemente, esta será la evolución temporal de cualquier estimador del ancho de la distribución $P(x;t)$. Tomando en cuenta este comportamiento, podemos sugerir como criterio de clasificación para los procesos difusivos modelados, la correspondencia de $\beta/\gamma > 1/2$ con los casos superdifusivos.

4 Discusión y Conclusiones

Hemos propuesto en esta comunicación un modelo de CTRW desacoplado, con densidad de probabilidad para el largo de saltos del tipo de Lévy. Modelos de este tipo habían sido descartados hasta el presente debido a la divergencia de su segundo momento, que implica la divergencia del segundo momento de la distribución de probabilidad para la posición al tiempo t , usualmente considerado como un estimador del ancho (al cuadrado) de la distribución. Sin embargo la utilización de estimadores alternativos para el ancho de la distribución hacen posible la consideración de estos modelos, pudiendo caracterizárselos por el crecimiento temporal de estos estimadores. Esta depen-

dencia temporal resulta única dada la propiedad de "escaleo" encontrada para las distribuciones de probabilidad para la posición del caminante al tiempo t , $P(x;t)$, por lo que cualquier estimador razonable del ancho de las distribuciones de Lévy permitirá determinar la ley potencial para la evolución del ancho.

Hemos encontrado así que si el atractor de la distribución de probabilidad para la variable reescalada es $L_\gamma(\xi)$, entonces el crecimiento del ancho será proporcional a $t^{1/\gamma}$ para distribuciones con WTD con tiempo medio de pausa finito. Si la WTD tiene primer momento divergente en cambio, la ley de crecimiento del ancho será proporcional a $t^{\beta/\gamma}$ donde β es el exponente de decaimiento a tiempos grandes para el tiempo entre saltos. Encontramos aquí una diferencia con la sugerencia propuesta en⁽³⁾, donde se suponía la potencia δ/γ (con δ a determinar) para la ley de crecimiento para el ancho.

Tenemos por lo tanto que con el criterio generalizado propuesto el proceso modelado por las distribuciones de Lévy L_γ con $0 < \gamma < 2$ corresponderá en general a un proceso superdifusivo cuando el proceso de saltos tenga tiempos medio de pausa finitos, en tanto que para WTD de "colas largas" la caracterización dependerá del cociente β/γ con el valor $1/2$ separando los regímenes subdifusivos de los superdifusivos. Podemos interpretar este último resultado considerando la competencia del efecto de la posibilidad de saltos largos con los tiempos largos de pausa determinados por la WTD.

Agradecimientos: Los autores agradecen el financiamiento de CONICOR y SeCyT-UNC para este proyecto.

Referencias

- [1] R. Metzler y J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 1 (2000).
- [2] C. Tsallis, S.V.F. Levy, A.M.C. Souza and R. Maynard. Phys. Rev. Lett. **75**, 3598 (1995). [Erratum: Phys. Rev. Lett. **27**, 5442 (1996)].
- [3] D. Prato and C. Tsallis. Phys. Rev. E. **60**, 2398 (1999).
- [4] G. M. Zaslavsky, Physica D, **76**, 110 (1994).
- [5] J. Klafter, A. Blumen and M.F. Shlesinger. Phys. Rev. A **35**, 3081 (1987).
- [6] A. Blumen, G. Zumofen and J. Klafter. Phys. Rev. A **40**, 3964 (1989).
- [7] G. Zumofen, A. Blumen and M.F. Shlesinger. J. Stat. Phys. **54**, 1519 (1989).
- [8] H. Scher and E.W. Montroll. Phys. Rev. B, **12**, 2455 (1975).
- [9] M.F. Shlesinger. J. Stat. Phys. **10**, 421 (1974).
- [10] S. Alexander and R. Orbach. J. Phys. (Paris) Lett. **43**, L625 (1982).

- [11] A. Blumen, J. Klafter and G. Zumofen, in *Optical Spectroscopy of Glasses*, edited by I. Zschokke. (Reidel, Dordrecht. Holland, 1986). p. 199.
- [12] A.S. Monin and A.M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics*. (MIT, Cambridge, MA, 1971), Vol. I; (1975), Vol. II.
- [13] G.K. Batchelor. Proc. R. Soc. London, Ser. A **110**, 709 (1926).
- [14] S. Grossmann and I. Procaccia. Phys. Rev. A **29**, 1358 (1984).
- [15] M.F. Shlesinger and J. Klafter. Phys. Rev. Lett. **54**, 2551 (1985).
- [16] C.E. Budde, D.P. Prato y M.A. Ré Phys. Lett. A **283**, 309 (2001).
- [17] C.E. Budde, D.P. Prato y M.A. Ré aceptado en Anales AFA **12** (2000).
- [18] G. H. Weiss *Aspects and applications of the Random Walk*. North Holland (1994).