INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA DE PARTÍCULAS COMPUESTAS EN UN MODELO DE GAUGE NO RELATIVISTA. CUANTIFICACIÓN CANÓNICA

E. C. Manavella
Instituto de Física Rosario, Bv. 27 de Febrero 210 Bis, Rosario, Argentina
y Departamento de Física (UNR), Av. Pellegrini 250, Rosario, Argentina
e-mail: manavell@ifir.ifir.edu.ar

Se propone un modelo de campos de gauge $U(1)\times U(1)$ no relativista clásico para la interacción electromagnética de partículas compuestas. Este modelo de gauge contiene un campo $U(1)$ de Chern-Simons y el campo $U(1)$ electromagnético y puede ser acoplado tanto a un campo de materia bosónico como a uno fermiónico. Explícitamente, se considera el segundo caso, esto es, un sistema de fermiones compuestos en presencia de un campo electromagnético, y se lleva a cabo la cuantificación canónica siguiendo el formalismo de Dirac. Además, se considera un modelo simplificado, relacionado a uno conocido en el campo de la materia condensada.

A classical nonrelativistic $U(1)\times U(1)$ gauge field model for the electromagnetic interaction of composite particles is proposed. This gauge model contains a Chern-Simons $U(1)$ field and the electromagnetic $U(1)$ field and can be coupled to both a bosonic or a fermionic matter field. Explicitly, the second case, i.e., a composite fermion system in the presence of an electromagnetic field is considered, and the canonical quantization by following the Dirac formalism is carried out. Furthermore, a simplified model, related to a known one in the field of condensed matter, is considered.

I. INTRODUCCIÓN

Partimos con una breve consideración acerca de los bosones compuestos (BCs) [1-4] y fermiones compuestos (FCs) [5] en el contexto del efecto Hall cuántico (EHC) y sus versiones entera (EHCE) y fraccionaria (EHCF).

Es importante desarrollar una teoría del campo efectivo del EHCF análoga a la teoría de Landau-Ginzburg de la superconductividad. En este sentido, Girvin y MacDonald [1] propusieron un modelo de teoría de campos conteniendo un campo escalar complejo acoplado a un campo vectorial de gauge con una acción de Chern-Simons (CS). Este modelo exhibe soluciones de vórtices con energía finita y carga fraccionaria, las cuales pueden ser identificadas con cuasipartículas y cuasihuecos de Laughlin. Las fluctuaciones de amplitud del campo escalar son masivas y son identificadas con los modos de fluctuación de densidad de la aproximación de modo único [6]. Así, apareció la teoría de los BCs.

Los FCs fueron introducidos por Jain [5]. La motivación fue proveer una descripción unificada del EHCE y el EHCF y una fuente de adecuadas funciones de onda de prueba para la serie $\nu = p/(2np\pm1)$, donde n y p son enteros.

En el presente trabajo, partimos considerando un sistema de partículas compuestas acoplado a dos campos de gauge $U(1)$, uno de CS a_μ [4,7] y el otro el campo electromagnético A_μ. El propósito de nuestro trabajo es analizar este sistema en un modelo de campos de gauge $U(1)\times U(1)$ no relativista clásico particular y estudiar este modelo desde el punto de vista cuántico.

El trabajo está organizado como sigue. En Sec. II, presentamos nuestro modelo de gauge desde el punto de vista clásico. Más tarde, analizamos el conjunto de vínculos y realizamos la cuantificación canónica del modelo siguiendo el formalismo de Dirac para sistemas Hamiltonianos vinculados. Luego, en Sec. III, consideramos un modelo reducido relacionado a uno conocido. Finalmente, en Sec. IV, damos nuestras conclusiones.

II. MODELO CLÁSICO - CUANTIFICACIÓN CANÓNICA

Vamos a considerar una teoría de campos no relativista clásica con simetría de gauge $U(1)\times U(1)$ para describir la interacción electromagnética de partículas compuestas en (2+1) dimensiones. En particular, analizaremos un sistema de FCs. Supondremos que este sistema puede ser descripto por la siguiente densidad Lagrangiana singular:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cf}^{em} + \mathcal{L}_{em}, \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{L}_{cf}^{em}$ viene dada por

$$\mathcal{L}_{cf}^{em} = i\psi^\dagger \mathcal{D}_0\psi + \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger \vec{\mathcal{D}}^2\psi - \mu\psi^\dagger\psi + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu\partial_\nu a_\rho \tag{2.2a}$$

y $\mathcal{L}_{em}$ por

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(A)\,F^{\mu\nu}(A). \tag{2.2b}$$

En Ecs. (2.2), los índices griegos toman los valores $\mu,\nu,\rho = 0,1,2$.

Utilizamos unidades naturales en las cuales $\hbar = c = 1$. La métrica de Minkowski es $g_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1)$ y $\varepsilon^{012} = \varepsilon^{12} = 1$.

En Ec. (2.2a), la derivada covariante que involucra tanto al campo de gauge $U(1)$ de tipo CS a_μ como al campo de gauge $U(1)$ electromagnético A_μ, viene dada por $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ia_\mu - ieA_\mu$ y llamamos $\vec{\mathcal{D}}^2 = \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2$. El campo de materia ψ es un campo espinorial cargado que describe FCs. La carga del electrón se toma como $-e$. m_b es la masa de banda de los electrones. μ es el potencial químico para los mismos. $\tilde{\phi}$ es la intensidad del tubo de flujo, en unidades del cuanto de flujo 2π. (La carga ficticia de cada partícula que interactúa con el campo de gauge ficticio ha sido elegida como de intensidad uno.)

Reemplazando la derivada covariante, podemos reescribir Ec. (2.2a) como

$$\mathcal{L}_{cf}^{em} = i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger\partial_0\psi + i\frac{\tau-1}{2}\partial_0\psi^\dagger\psi + \psi^\dagger\left(a_0 + eA_0\right)\psi + \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\vec{\mathcal{D}}^2\psi - \mu\psi^\dagger\psi + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu\partial_\nu a_\rho. \quad (2.3)$$

Llevamos a cabo la cuantificación canónica utilizando el método de Dirac [8, 9].

Los momentos $p^\mu, P^\mu, \pi_\alpha^\dagger$ y π_α canónicamente conjugados a las variables de campo independientes $a_\mu, A_\mu, \psi_\alpha$ y $\psi_\alpha^\dagger$, respectivamente, vienen dados por

$$p^0 = 0, \quad (2.4a)$$

$$p^i = \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_j, \quad (2.4b)$$

$$P^0 = 0, \quad (2.4c)$$

$$P^i = F^{i0}(A), \quad (2.4d)$$

$$\pi_\alpha^\dagger = \frac{\partial\mathcal{L}_{cf}^{em}}{\partial\dot{\psi}_\alpha} = -i\frac{\tau+1}{2}\psi_\alpha^\dagger, \quad (2.4e)$$

$$\pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}_{cf}^{em}}{\partial\dot{\psi}_\alpha^\dagger} = i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha, \quad (2.4f)$$

donde $i, j = 1, 2$ y $\alpha = 1, 2$.

Los paréntesis de Bose-Fermi fundamentales no nulos a igual tiempo ($x^0 = y^0$) para pares de variables canónicamente conjugadas son los usuales.

La clasificación final de vínculos consiste en

(i) los cuatro vínculos de primera clase bosónicos definidos por las funciones

$$\Sigma_1 = e\partial_i p^i - \partial_i P^i + \frac{e}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}\partial_i a_j \approx 0, \quad (2.5a)$$

$$\Sigma_2 = \psi^\dagger\pi - \psi\pi^\dagger - \frac{i}{e}\partial_i P^i \approx 0, \quad (2.5b)$$

$$\Sigma_3 = p^0 \approx 0, \quad (2.5c)$$

$$\Sigma_4 = P^0 \approx 0, \quad (2.5d)$$

(ii) los dos vínculos de segunda clase bosónicos definidos por

$$\Phi_2^{0i} = p^i - \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_j \approx 0, \quad (2.6a)$$

$i = 1, 2$, y los cuatro vínculos de segunda clase fermiónicos dados por

$$\Omega_\alpha^\dagger = \pi_\alpha^\dagger + i\frac{\tau+1}{2}\psi_\alpha^\dagger \approx 0, \quad (2.6b)$$

$$\Omega_\alpha = \pi_\alpha - i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha \approx 0, \quad (2.6c)$$

$\alpha = 1, 2$.

La densidad Hamiltoniana canónica definida por $\mathcal{H}_c = \dot{a}_\mu p^\mu + \dot{A}_\mu P^\mu + \dot{\psi}\pi^\dagger + \dot{\psi}^\dagger\pi - \mathcal{L}$, después de que Ecs. (2.4) han sido usadas, se escribe

$$\mathcal{H}_c = -\frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_0\partial_i a_j + \partial_i a_0 p^i + \frac{1}{4}F_{ij}(A)F^{ij}(A) + \partial_i A_0 P^i - \frac{1}{2}P^i P_i + \mu\psi^\dagger\psi - \psi^\dagger\left(a_0 + eA_0\right)\psi - \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\vec{\mathcal{D}}^2\psi. \quad (2.7)$$

Ahora, debemos pasar de los paréntesis de Bose-Fermi a los paréntesis de Dirac $D(F)$ con respecto a la matriz F construida con los paréntesis de Bose-Fermi entre los vínculos de segunda clase. El paréntesis $D(F)$ entre las variables $R(x)$ y $S(y)$ se define por

$$[R(x), S(y)]^{D(F)} = [R(x), S(y)] - \int d^2u\, d^2v\, [R(x), \Gamma_I(u)]\, F_{IJ}^{-1}(\vec{u}, \vec{v})\, [\Gamma_J(v), S(y)], \quad (2.8)$$

donde $I, J = 1, ..., 6$ y $\Gamma_1 = \Phi_2^{01}, \Gamma_2 = \Phi_2^{02}, \Gamma_3 = \Omega_1^\dagger, \Gamma_4 = \Omega_2^\dagger, \Gamma_5 = \Omega_1$ y $\Gamma_6 = \Omega_2$ son los vínculos de segunda clase.

En Ec. (2.8), la matriz F^{-1} es la inversa de la matriz F de elementos $[\Gamma_I, \Gamma_J]$. El determinante de F vale

$$detF = \frac{1}{4\pi^2\tilde{\phi}^2}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.9)$$

y su inversa viene dada por

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi\tilde{\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\pi\tilde{\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.10)$$

Ahora, el Hamiltoniano extendido H_e se define como sigue:

$$H_e = \int d^2x\,(\mathcal{H}_c + \rho^a\Sigma_a)$$
$$- \int d^2x\, d^2y \Gamma_I(x) F^{-1}_{IJ}(\vec{x},\vec{y})\,[\Gamma_J(y), H_c]\,, \quad (2.11)$$

donde $\rho^a, a = 1,...,4$, son cuatro parámetros arbitrarios.

Una vez que imponemos los paréntesis $D(F)$ debemos tomar los vínculos de segunda clase como ecuaciones fuertemente iguales a cero. Así, el segundo término del lado derecho de Ec. (2.11) se anula y entonces el Hamiltoniano extendido se escribe

$$H_e = \int d^2x\,(\mathcal{H}_c + \rho^a\Sigma_a)\,. \quad (2.12)$$

Además, los siguientes campos quedan determinados:

$$p^i = \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_j, \quad (2.13a)$$

$$\pi^\dagger_\alpha = -i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger_\alpha, \quad (2.13b)$$

$$\pi_\alpha = i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha. \quad (2.13c)$$

Así, de Ec. (2.8), encontramos los siguientes paréntesis $D(F)$:
campo-campo:

$$[a_1(x), a_2(y)]^{D(F)}_- = 2\pi\tilde{\phi}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad (2.14a)$$

$$\left[\psi^\dagger_\alpha(x), \psi_\beta(y)\right]^{D(F)}_+ = -i\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad (2.14b)$$

campo-momento:

$$\left[a_0(x), p^0(y)\right]^{D(F)}_- = \delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad (2.14c)$$

$$[A_\mu(x), P^\nu(y)]^{D(F)}_- = \delta_\mu{}^\nu\delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad (2.14d)$$

anulándose todos los otros paréntesis.

Ahora, debemos calcular los paréntesis de Dirac finales. Para este propósito, debemos buscar condiciones de fijado de gauge admisibles $\Theta_a \approx 0, a = 1,...,4$, una por cada vínculo de primera clase.

Elegimos las siguientes expresiones para las condiciones de fijado de gauge:

$$\Theta_1 = \partial^i a_i \approx 0, \quad (2.15a)$$

$$\Theta_2 = \partial^i A_i \approx 0, \quad (2.15b)$$

$$\Theta_3 = a_0 \approx 0, \quad (2.15c)$$

$$\Theta_4 = \nabla^2 A_0 - \partial_i P^i \approx 0. \quad (2.15d)$$

El paréntesis de Dirac entre las variables $R(x)$ y $S(y)$ se escribe como

$$[R(x), S(y)]^D = [R(x), S(y)]^{D(F)}$$
$$- \int d^2u\, d^2v\, [R(x), \Delta_A(u)]^{D(F)}\, G^{-1}_{AB}(\vec{u},\vec{v})\, [\Delta_B(v), S(y)]^{D(F)}. \quad (2.16)$$

En Ec. (2.16), la matriz G^{-1} es la inversa de la matriz G cuyos elementos son $[\Delta_A, \Delta_B], A, B = 1,...,8$.

El determinante de G vale

$$detG = -\left[\nabla^2\right]^6 \delta(\vec{x}-\vec{y}) \not\approx 0 \quad (2.17)$$

y su inversa se escribe como

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-1}u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ieu & -iu & -ieu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & ieu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \\ e^{-1}u & iu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ieu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

donde $u = (4\pi|\vec{x}-\vec{y}|)^{-1}$ y $v = \delta(\vec{x}-\vec{y})$.

Una vez que imponemos los paréntesis de Dirac debemos tomar los vínculos de primera clase y las condiciones de fijado de gauge como ecuaciones fuertemente iguales a cero. Así, los siguientes campos quedan determinados:

$$p^0 = 0, \quad (2.19a)$$

$$P^0 = 0, \quad (2.19b)$$

$$a_0 = 0, \quad (2.19c)$$

$$A_0(x) = \frac{1}{4\pi}\int d^2y \frac{\partial_i P^i(y)}{|\vec{x}-\vec{y}|}. \quad (2.19d)$$

De esta manera, de Ec. (2.16), obtenemos los siguientes paréntesis de Dirac:
campo-campo:

$$[a_1(x), a_2(y)]^D_- = 2\pi\tilde{\phi}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad (2.20a)$$

$$\left[\psi^\dagger_\alpha(x), \psi_\beta(y)\right]^D_+ = -i\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad (2.20b)$$

campo-momento:

$$\left[A_i(x), P^j(y)\right]^D_- = \delta_i{}^j\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{1}{4\pi}\partial_i(x)\partial^j(x)\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}, \quad (2.20c)$$

siendo nulos todos los otros paréntesis.

Así, la dinámica del modelo clásico queda entonces completamente especificada.

Finalmente, realizamos la cuantificación canónica reemplazando las variables de campo clásicas por operadores de campo cuánticos y los paréntesis de Dirac por conmutadores o anticonmutadores de acuerdo a la regla usual.

Además, notamos que la cuantificación de un sistema de BCs no relativista interactuante con el campo, electromagnético puede ser tratada similarmente, la única diferencia es que, en este caso, el campo de materia es un campo escalar cargado.

III. MODELO SIMPLIFICADO

Ahora, consideramos la siguiente densidad Lagrangiana singular:

$$\mathcal{L} = i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger\partial_0\psi + i\frac{\tau-1}{2}\partial_0\psi^\dagger\psi - \mu\psi^\dagger\psi + \psi^\dagger a_0\psi + \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\vec{\mathcal{D}}^2\psi + \frac{1}{2\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_0\partial_i a_j, \tag{3.1}$$

donde $i, j = 1, 2$.

La densidad Lagrangiana (3.1), obtenida quitando algunos términos de la de partida (ver Ec. (2.1)), es esencialmente aquélla considerada por Halperin y coautores [10].

Los momentos $p^\mu, P^i, \pi^\dagger_\alpha$ y π_α canónicamente conjugados a las variables de campo independentes a_μ, A_i, ψ_α y $\psi^\dagger_\alpha$, respectivamente, son

$$p^0 = 0, \tag{3.2a}$$

$$p^i = 0, \tag{3.2b}$$

$$P^i = 0, \tag{3.2c}$$

$$\pi^\dagger_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha} = -i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger_\alpha, \tag{3.2d}$$

$$\pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^\dagger_\alpha} = i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha, \tag{3.2e}$$

donde $i = 1, 2$ y $\alpha = 1, 2$.

La densidad Hamiltoniana canónica está definida por $\mathcal{H}_c = \dot{a}_\mu p^\mu + \dot{A}_i P^i + \dot{\psi}^\dagger\pi + \dot{\psi}\pi^\dagger - \mathcal{L}$, la cual, usando Ecs. (3.2), queda

$$\mathcal{H}_c = \mu\psi^\dagger\psi - \psi^\dagger a_0\psi - \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\vec{\mathcal{D}}^2\psi - \frac{1}{2\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_0\partial_i a_j\,. \tag{3.3}$$

Encontramos que, en el modelo bajo consideración, existen catorce vínculos de segunda clase, diez bosónicos, dados por

$$\Phi^0_1 = p^0 \approx 0, \tag{3.4a}$$

$$\Phi^{0i}_2 = p^i \approx 0, \tag{3.4b}$$

$$\Phi^{0i}_3 = P^i \approx 0, \tag{3.4c}$$

$$\Phi^1_1 = \frac{1}{2\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}\partial_i a_j + \psi^\dagger\psi \approx 0, \tag{3.4d}$$

$$\Phi^{1i}_2 = \varepsilon^{ik}\partial_k a_0 \approx 0, \tag{3.4e}$$

$$\Phi^{1i}_3 = \psi^\dagger\left(i\partial_i + a_i + eA_i\right)\psi \approx 0, \tag{3.4f}$$

donde $i = 1, 2$, y cuatro fermiónicos, dados por

$$\Omega^\dagger_\alpha = \pi^\dagger_\alpha + i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger_\alpha \approx 0, \tag{3.4g}$$

$$\Omega_\alpha = \pi_\alpha - i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha \approx 0, \tag{3.4h}$$

donde $\alpha = 1, 2$.

IV. CONCLUSIONES

Partiendo de un modelo de gauge $U(1) \times U(1)$ no relativista clásico para partículas compuestas interactuando con el campo electromagnético en (2+1) dimensiones, la cuantificación canónica ha sido presentada. Esto ha sido hecho para el caso de un sistema de FCs. El modelo bajo consideración fue analizado en el contexto del formalismo Hamiltoniano de Dirac.

Luego, hemos analizado una versión simplificada del modelo de partida similar a una utilizada dentro del contexto de la materia condensada.

REFERENCIAS

[1] S. M. Girvin and A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **58**, 1252 (1987).

[2] N. Read, Phys. Rev. Lett. **62**, 86 (1989).

[3] D. H. Lee and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **63**, 903 (1989); D. H. Lee and S. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **66**, 1220 (1991); S. C. Zhang, Int. J. Mod. Phys. B **6**, 25 (1992).

[4] S. C. Zhang, T. H. Hansson, and S. A. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **62**, 82 (1989).

[5] J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989); Phys. Rev. B **41**, 7653 (1990); J. K. Jain and R. K. Kamilla in *Composite Fermions*, O. Heinonen Editor World Scientific (1998).

[6] S. M. Girvin, A. H. MacDonald, and P. M. Platzman, Phys. Rev. Lett. **54**, 581 (1985); Phys. Rev. B **33**, 2481 (1986).

[7] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982); D. P. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek, and A. Zee, Nucl. Phys. B **251**, 117 (1985).

[8] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics* (Springer-Verlag, 1982).

[9] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University Press, New York, 1964).

[10] B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, Phys. Rev. B **47**, 7312 (1993).