# INTEGRAL DE CAMINO Y FORMALISMO BRST PARA LA INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA DE PARTÍCULAS COMPUESTAS EN UN MODELO DE GAUGE NO RELATIVISTA

E. C. Manavella
*Instituto de Física Rosario, Bv. 27 de Febrero 210 Bis, Rosario, Argentina*
*y Departamento de Física (UNR), Av. Pellegrini 250, Rosario, Argentina*
*e-mail: manavell@ifir.ifir.edu.ar*

Se considera un modelo de campos de gauge $U(1)\times U(1)$ no relativista clásico para la interacción electromagnética de partículas compuestas. Se desarrolla el formalismo de la integral de camino y se establecen las reglas de Feynman. Además, se trata también, como un método de la integral de camino alternativo, el formalismo BRST para este modelo de gauge. Explícitamente, se dan los resultados para un sistema de fermiones compuestos.

A classical nonrelativistic $U(1)\times U(1)$ gauge field model for the electromagnetic interaction of composite particles is considered. The path integral approach is developed and the Feynman rules are established. Furthermore, as an alternative path integral method, the BRST formalism for this gauge model is also treated. Explicitly, the results for a composite fermion system are given.

## I. INTRODUCCIÓN

En Ref. [1] se consideró una teoría de campos no relativista clásica con simetría de gauge $U(1)\times U(1)$ para la interacción electromagnética de partículas compuestas en (2+1) dimensiones. En particular, se analizó un sistema de fermiones compuestos (FCs). Se supuso que este sistema puede ser descripto por la siguiente densidad Lagrangiana singular:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cf}^{em} + \mathcal{L}_{em}, \tag{1.1}$$

donde $\mathcal{L}_{cf}^{em}$ se escribe como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cf}^{em} &= i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger\partial_0\psi + i\frac{\tau-1}{2}\partial_0\psi^\dagger\psi + \psi^\dagger\left(a_0+eA_0\right)\psi \\ &+\frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\vec{D}^2\psi - \mu\psi^\dagger\psi + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu\partial_\nu a_\rho \end{aligned}\tag{1.2a}$$

y $\mathcal{L}_{em}$ es

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(A)F^{\mu\nu}(A). \tag{1.2b}$$

En Ecs. (1.2), los índices griegos toman los valores $\mu,\nu,\rho=0,1,2$.

Empleamos unidades donde $\hbar=c=1$. La métrica de Minkowski es $g_{\mu\nu}=diag(1,-1,-1)$ y $\varepsilon^{012}=\varepsilon^{12}=1$.

En Ec. (1.2a), $a_\mu$ es un campo de gauge $U(1)$ de tipo Chern-Simons (CS) y $A_\mu$ es el campo de gauge $U(1)$ electromagnético. El campo de materia $\psi$ es un campo espinorial cargado que describe FCs. La carga del electrón se toma como $-e$.. $m_b$ es la masa de banda de los electrones. $\mu$ es el potencial químico para los mismos. $\tilde{\phi}$ es la intensidad del tubo de flujo, en unidades del cuanto de flujo $2\pi$. (La carga ficticia de cada partícula que interactúa con el campo de gauge ficticio ha sido elegida como de intensidad uno.)

Un sistema de bosones compuestos puede ser considerado según estos mismos argumentos, la única diferencia es que, en este caso, el campo de materia es un campo escalar cargado.

La clasificación final de vínculos fue:

(i) los cuatro vínculos de primera clase bosónicos definidos por las funciones

$$\Sigma_1 = e\partial_i p^i - \partial_i P^i + \frac{e}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}\partial_i a_j \approx 0, \tag{1.3a}$$

$$\Sigma_2 = \psi^\dagger\pi - \psi\pi^\dagger - \frac{i}{e}\partial_i P^i \approx 0, \tag{1.3b}$$

$$\Sigma_3 = p^0 \approx 0, \tag{1.3c}$$

$$\Sigma_4 = P^0 \approx 0, \tag{1.3d}$$

(ii) los dos vínculos de segunda clase bosónicos definidos por

$$\Phi_2^{0i} = p^i - \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_j \approx 0, \tag{1.4}$$

$i=1,2$, y los cuatro vínculos de segunda clase fermiónicos dados por

$$\Omega_\alpha^\dagger = \pi_\alpha^\dagger + i\frac{\tau+1}{2}\psi_\alpha^\dagger \approx 0, \tag{1.5a}$$

$$\Omega_\alpha = \pi_\alpha - i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha \approx 0, \tag{1.5b}$$

$\alpha=1,2$.

Se encontró la siguiente densidad Hamiltoniana canónica:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c &= -\frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_0\partial_i a_j + \partial_i a_0 p^i + \frac{1}{4}F_{ij}(A)F^{ij}(A) \\ &+\partial_i A_0 P^i - \frac{1}{2}P^iP_i + \mu\psi^\dagger\psi - \psi^\dagger\left(a_0+eA_0\right)\psi \\ &-\frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\vec{D}^2\psi. \end{aligned}\tag{1.6}$$

El determinante de la matriz $F$ construida con los paréntesis Bose-Fermi entre los vínculos de segunda clase fue

$$detF = \frac{1}{4\pi^2\tilde{\phi}^2}\delta(\vec{x}-\vec{y}). \quad (1.7)$$

El Hamiltoniano extendido $H_e$ fue el siguiente:

$$H_e = \int d^2x\,(\mathcal{H}_c + \rho^a\Sigma_a) - \int d^2x\,d^2y\Gamma_I(x)F^{-1}_{IJ}(\vec{x},\vec{y})\left[\Gamma_J(y), H_c\right], \quad (1.8)$$

donde $\rho^a, a = 1, ..., 4$, son cuatro parámetros arbitrarios.

Se encontraron los paréntesis de Dirac $D(F)$ con respecto a la matriz $F$.

Una vez que se impusieron estos paréntesis se tomaron los vínculos de segunda clase como ecuaciones fuertemente iguales a cero. Así, el Hamiltoniano extendido quedó

$$H_e = \int d^2x\,(\mathcal{H}_c + \rho^a\Sigma_a). \quad (1.9)$$

El determinante de la matriz $G$ construida con los paréntesis Bose-Fermi entre los vínculos de primera clase y de fijado de gauge fue

$$detG = -\left[\nabla^2\right]^6\delta(\vec{x}-\vec{y}) \not\approx 0. \quad (1.10)$$

El trabajo está organizado como sigue. En Sec. II, usando el método de la integral de camino, establecemos las reglas de Feynman del modelo. Luego, en Sec. III, se trata el formalismo BRST. En Sec. IV, damos nuestras conclusiones.

## II. CUANTIFICACIÓN DE LA INTEGRAL DE CAMINO - REGLAS DE FEYNMAN

Como el modelo considerado posee vínculos de primera y segunda clase, la función de partición viene dada, de acuerdo al formalismo de Faddeev-Senjanovic (FS) [2], por la siguiente integral de camino:

$$Z = \int \mathbb{D}a_\mu\mathbb{D}p^\mu\mathbb{D}A_\nu\mathbb{D}P^\nu\mathbb{D}\psi_\alpha\mathbb{D}\pi^\dagger_\alpha\mathbb{D}\psi^\dagger_\beta\mathbb{D}\pi_\beta \times\delta(\Delta_A\,(detG)^{1/2}\,\delta(\Gamma_I)\,(detF)^{1/2} \times exp\left\{i\int d^3x\left[\dot{a}_\mu p^\mu + \dot{A}_\mu P^\mu + \dot{\psi}\pi^\dagger + \dot{\psi}^\dagger\pi - \mathcal{H}_e\right]\right\}, \quad (2.1)$$

donde la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}_e$ fue dada en Ec. (1.8).

Calculando la integral de camino (2.1) en la manera usual, encontramos la forma final para la función de partición en términos de los campos dinámicos independientes del modelo $a_\mu$,$A_\mu$,$\psi_\alpha$ y $\psi^\dagger_\alpha$

$$Z = \int \mathbb{D}a_\mu\mathbb{D}A_\nu\mathbb{D}\psi_\alpha\mathbb{D}\psi^\dagger_\beta exp\left(i\int d^3x\,\mathcal{L}_{eff}\right), \quad (2.2)$$

donde la densidad Lagrangiana efectiva $\mathcal{L}_{eff}$ está dada por

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{fix}, \quad (2.3)$$

con

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{\lambda_a}{2}\left(\partial^\mu a_\mu\right)^2 + \frac{\lambda_A}{2}\left(\partial^\mu A_\mu\right)^2. \quad (2.4)$$

Escribimos la densidad Lagrangiana (2.3) en la forma

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{eff}\left(a_\mu\right) + \mathcal{L}_{eff}\left(A_\mu\right) + \mathcal{L}_{eff}\left(\psi,\psi^\dagger\right) + \mathcal{L}^{int}_{eff}\left(a_\mu, A_\mu, \psi, \psi^\dagger\right), \quad (2.5)$$

donde hemos llamado

$$\mathcal{L}_{eff}\left(a_\mu\right) = \frac{1}{2}a_\mu\left(d^{-1}\right)^{\mu\nu}a_\nu, \quad (2.6a)$$

$$\mathcal{L}_{eff}\left(A_\mu\right) = \frac{1}{2}A_\mu\left(D^{-1}\right)^{\mu\nu}A_\nu, \quad (2.6b)$$

$$\mathcal{L}_{eff}\left(\psi,\psi^\dagger\right) = \psi^\dagger G^{-1}\psi, \quad (2.6c)$$

$$\mathcal{L}^{int}_{eff}\left(a_\mu, A_\mu, \psi, \psi^\dagger\right) = \psi^\dagger V^1_\mu a^\mu\psi + \psi^\dagger V^2_\mu A^\mu\psi + \psi^\dagger a_\mu W^{\mu\nu}_1 a_\nu\psi + \psi^\dagger A_\mu W^{\mu\nu}_2 A_\nu\psi + \psi^\dagger a_\mu W^{\mu\nu}_3 A_\nu\psi. \quad (2.6d)$$

En Ec. (2.6a), la matriz 3×3 $\left(d^{-1}\right)$ es la inversa de la matriz del propagador del campo de CS $a_\mu$. Análogamente, en Ec. (2.6b), la matriz 3×3 $\left(D^{-1}\right)$ es la inversa de la matriz del propagador del campo electromagnético $A_\mu$. Estas matrices son Hermitianas y no degeneradas. Así, los propagadores $d_{\mu\nu}(k)$ y $D_{\mu\nu}(k)$, en el espacio de los momentos, fueron evaluados dando

$$d_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\lambda_a}\frac{k_\mu k_\nu}{k^4} + 2i\pi\tilde{\phi}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\frac{k^\rho}{k^2}, \quad (2.7a)$$

$$D_{\mu\nu}(k) = -g_{\mu\nu}\frac{1}{k^2} + (1+\frac{1}{\lambda_A})\frac{k_\mu k_\nu}{k^4}, \quad (2.7b)$$

donde $k^2 = k_\mu k^\mu$.

En Ec. (2.6c), $G$ es el propagador no relativista del campo de materia. En el espacio de los momentos, el mismo está dado por

$$G(\vec{p}, E) = \left(E - \mu - \frac{\vec{p}^2}{2m_b}\right)^{-1}, \quad (2.8)$$

donde $E$ es la energía de la partícula, $\vec{p}$ es su momento ordinario, y $\vec{p}^2 = p_1^2 + p_2^2$.

En Ec. (2.6d), los 3-vectores $V^n = \left(V^n_\mu\right), n = 1, 2$, dan los vértices de 3 patas del modelo y son

$$V^1 = V, \tag{2.9a}$$

$$V^2 = eV, \tag{2.9b}$$

donde

$$V = \left(1, \frac{1}{m_b} q_i\right), \tag{2.10}$$

con $i = 1, 2$.

Finalmente, en Ec. (2.6d), las matrices $3 \times 3$ $W_m = (W_m^{\mu\nu})$, $m = 1, 2, 3$, dan los vértices de 4 patas y son

$$W_1 = -\frac{1}{2m_b} W, \tag{2.11a}$$

$$W_2 = -\frac{e^2}{2m_b} W, \tag{2.11b}$$

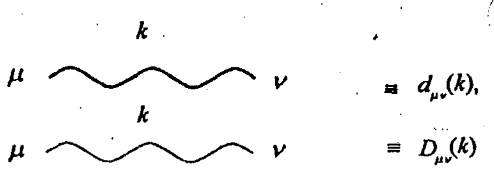
$$W_3 = -\frac{e}{m_b} W, \tag{2.11c}$$

donde

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

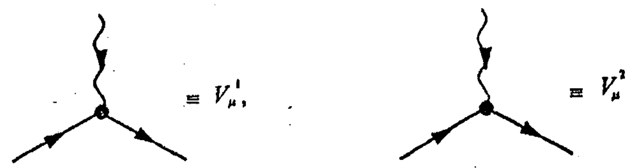
Luego, las reglas de Feynman para propagadores y vértices pueden escribirse:

(i) Propagadores. Asociamos con los propagadores de los campos de gauge $a_\mu$ y $A_\mu$ una línea gruesa ondulada y una línea fina ondulada conectando dos puntos genéricos, respectivamente,

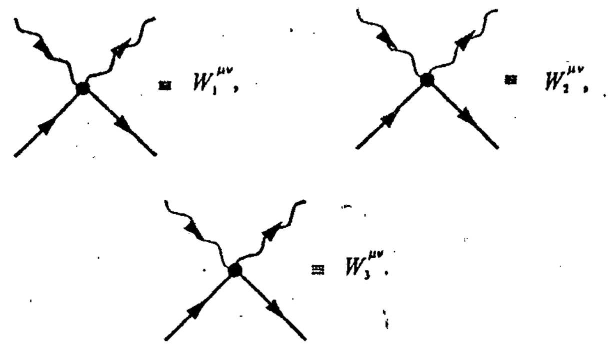



y con el propagador no relativista usual del campo de materia fermiónica $\psi$ una línea recta


(ii) Vértices. Así, los vértices de 3 patas del modelo están representados por




y los vértices de 4 patas por




Aquí, no hemos incluido el factor $(2\pi)^3$ y las funciones delta de conservación del momento. Ellas están sobreentendidas. Además, como es usual, debemos tener en cuenta un signo menos para todo loop fermiónico cerrado y otro signo menos para diagramas relacionados a través del intercambio de dos líneas fermiónicas, internas o externas. Además, en el caso en que aparezcan partículas idénticas, debe ser también tenido en cuenta un factor combinatorio corrigiendo el doble conteo.

## III. CUANTIFICACIÓN BRST

Vamos a construir el formalismo BRST para el modelo analizado [3, 5-7].

Los siguientes paréntesis son todos paréntesis $D(F)$. Así, desde ahora en adelante, escribiremos estos paréntesis sin la indicación "$D(F)$".

En esta situación, es conveniente notar que la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}_c$, dada por Ec. (1.6), puede ser dividida de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_0 - a_0 \left(\frac{1}{e}\Sigma_1 + i\Sigma_2\right) - ieA_0\Sigma_2. \tag{3.1}$$

Podemos escribir

$$[\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)]_- = C^c_{\ ab}\Sigma_c(x)\delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.2a}$$

$$[H_0, \Sigma_a(x)]_- = D^b_{\ a}\Sigma_b(x), \tag{3.2b}$$

con $a, b, c = 1, ..., 4$ y $H_0 = \int d^2x\, \mathcal{H}_0$, donde $\mathcal{H}_0$ es la densidad Hamiltoniana particular de Ec. (3.1).

En Ec. (3.2a), notemos que, para el sistema Hamiltoniano vinculado bajo consideración, todos los coeficientes $C^{c}_{ab}$ se anulan. Esto es una consecuencia de que el presente modelo es Abeliano.

Además, en Ec. (3.2b), todos los coeficientes $D^{b}_{a}$ se anulan para el Hamiltoniano elegido $H_0$. Esto último es siempre posible hacer en cualquier teoría de CS usual [7]. Por ejemplo, un caso en el cual esta elección no es factible es cuando términos con altas derivadas son adicionados al Lagrangiano [8].

Más aún, debido a la arbitrariedad de los multiplicadores de Lagrange, la densidad Hamiltoniana que aparece en Ec. (1.8) puede también escribirse como sigue:

$$\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_0 - \rho^a \Sigma_a, \tag{3.3}$$

donde $a = 1, ..., 4$, con la relación entre las densidades Hamiltonianas $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_c$ dada por Ec. (3.1).

En el formalismo BRST se consideran a los multiplicadores de Lagrange $\rho_a$ como variables dinámicas y se les asocia un conjunto correspondiente de momentos canónicamente conjugados $\xi^a$, tales que

$$\left[\rho_a(x), \xi^b(y)\right]_- = \delta_a{}^b \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.4}$$

Por supuesto, estos momentos deben ser anulados dando lugar a los vínculos de primera clase $\xi_a = 0$, los cuales generan las transformaciones de gauge $\rho_a \rightarrow \rho_a + u_a$ de los multiplicadores, poniendo en evidencia sus arbitrariedades.

Así, nuestro conjunto de variables dinámicas independientes será

$$A_\Sigma = \left(a_\mu, A_\mu, \psi_\alpha, \psi^\dagger_\alpha, \rho_a\right) \tag{3.5}$$

y su conjunto correspondiente de momentos canónicamente conjugados vendrá dado por

$$P^\Sigma = \left(p^\mu, P^\mu, \pi^\dagger_\alpha, \pi_\alpha, \xi^a\right). \tag{3.6}$$

El conjunto total de vínculos de primera clase está definido por las funciones

$$\Xi_A = \left(\Sigma_a, \xi_a\right), \tag{3.7}$$

donde $A = 1, ..., 8$.

Por esto, Ecs. (3.2) toman la forma

$$[\Xi_A(x), \Xi_B(y)]_- = C^C_{AB} \Xi_C(x) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.8a}$$

$$[H_0, \Xi_A(x)]_- = D^B_A \Xi_B(x), \tag{3.8b}$$

donde todos los coeficientes $C^C_{AB}$ y $D^B_A$ se anulan.

Ahora, debemos introducir la densidad Hamiltoniana invariante BRST $\mathcal{H}_1$. Para esto, consideramos los campos fantasmas fermiónicos (espinores de Majorana) $\mathsf{Q}_A$ y sus momentos canónicamente conjugados $\mathsf{P}^A$ satisfaciendo

$$\left[\mathsf{Q}_A(x), \mathsf{P}^B(y)\right]_+ = \delta_A{}^B \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.9}$$

La densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}_1$ se escribe como

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 + \mathsf{P}_B D^B_A \mathsf{Q}^A = \mathcal{H}_0. \tag{3.10}$$

Luego, debemos considerar la densidad Hamiltoniana con el gauge fijado invariante BRST $\mathcal{H}_\chi$ dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\chi(x) &= \mathcal{H}_1(x) - \int d^2y \, [\chi(x), Q(y)]_+ \\ &= \mathcal{H}_0(x) - \int d^2y \, [\chi(x), Q(y)]_+ ,\end{aligned} \tag{3.11}$$

donde $\chi = \mathsf{P}_A \Upsilon^A$ es la variable de fijado de gauge, siendo $\Upsilon^B$ las funciones que definen las condiciones de fijado de gauge dadas por el conjunto de cantidades

$$\Upsilon^A = -\left(\rho^a, \Theta^a\right). \tag{3.12}$$

En Ec. (3.11), $Q$ es el generador BRST dado por la expresión

$$Q = \Xi_A \mathsf{Q}^A + \frac{1}{2} \mathsf{P}_C C^C{}_{AB} \mathsf{Q}^A \mathsf{Q}^B = \Xi_A \mathsf{Q}^A. \tag{3.13}$$

Como el conjunto de vínculos definidos por las funciones (3.7) puede ser dividido en dos subconjuntos, consideraremos a los fantasmas de la siguiente manera:

$$\mathsf{Q}_A = \left(\mathsf{q}_a, \mathsf{p}_a\right), \tag{3.14a}$$

$$\mathsf{P}^A = \left(\mathsf{p}^{\dagger a}, \mathsf{q}^{\dagger a}\right), \tag{3.14b}$$

introduciendo los antifantasmas, valiendo los siguientes paréntesis canónicos:

$$\left[\mathsf{q}_a(x), \mathsf{p}^{\dagger b}(y)\right]_+ = \delta_a{}^b \delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.15a}$$

$$\left[\mathsf{p}_a(x), \mathsf{q}^{\dagger b}(y)\right]_+ = \delta_a{}^b \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.15b}$$

De esta manera, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\chi(x) = \mathcal{H}_0(x) &+ \mathsf{p}^\dagger_a(x) \mathsf{p}^a(x) + \Sigma_a(x) \rho^a(x) + \xi_a(x) \Theta^a(x) \\ &+ f^a{}_b \mathsf{q}^\dagger_a(x) \nabla^2 \mathsf{q}^b(x) + \mathsf{q}^\dagger_3(x) \mathsf{q}^3(x),\end{aligned} \tag{3.16}$$

donde $f^a{}_b$ son los elementos de la matriz

$$f = \begin{pmatrix} -e & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{i}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Así, la densidad Lagrangiana BRST $\mathcal{L}_\chi$ queda dada por

$$\mathcal{L}_\chi = \dot{A}_\Sigma P^\Sigma + \mathsf{P}^A \dot{\mathsf{Q}}_A - \mathcal{H}_\chi. \tag{3.18}$$

Como el sistema posee vínculos de primera y segunda clase, la función de partición BRST queda dada por [6,7]:

$$\begin{aligned}Z_\chi = \int & \mathbb{D}A_\Sigma \mathbb{D}P^\Sigma \mathbb{D}\mathsf{Q}_A \mathbb{D}\mathsf{P}^A \delta(\Gamma_I) \, (detF)^{1/2} \\ & \times exp\left(i \int d^3x \, \mathcal{L}_\chi\right),\end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $detF$ está dado por Ec. (1.7).

Es fácil probar que esta integral de camino es equivalente a la de Ec. (2.1) en la forma FS. Por esto, concluimos que ambos métodos pueden ser considerados como alternativos.

## IV. CONCLUSIONES

Considerando el método de cuantificación de la integral de camino, fueron establecidas las reglas de Feynman del modelo. El modelo tiene cinco vértices, dos de 3 patas y tres de 4 patas. En base a esto, podría estudiarse perturbativamente el modelo.

En la última sección, se dio el formalismo BRST del presente modelo de gauge. La función de partición obtenida desde este formalismo es equivalente a aquélla obtenida por medio del método de FS, como debe ser esperado.

## REFERENCIAS


[1] E. C. Manavella, *Interacción Electromagnética de Partículas Compuestas en un Modelo de Gauge No Relativista. Cuantificación Canónica.* En este volumen.

[2] L. D. Faddeev, Theor. Math. Phys. **1**, 1 (1970); P. Senjanovic, Ann. Phys. (NY) **100**, 227 (1976).

[3] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics* (Springer-Verlag, 1982).

[4] G. 't Hooft and M. Velman, *Diagramar* (CERN, 1973).

[5] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, Ann. Phys. (NY) **98**, 287 (1976); E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. B **55**, 224 (1975); R. Marnelius, *Introduction to the Quantization of General Gauge Theories* (Institute of Theoretical Physics, Göteborg, Sweden, 1981); I. V. Tyupin, Lebedev Preprint FIAN 39, unpublished (in Russian).

[6] E. S. Fradkin and T. E. Fradkina, Phys. Lett. B **72**, 343 (1978).

[7] M. Henneaux , Phys. Rep. **126**, 1 (1985).

[8] A. Foussats, E. C. Manavella, C. E. Repetto , O. P. Zandron, and O. S. Zandron, J. Math. Phys. **36**, 1 (1995).

[9] R. Shankar, *Hamiltonian Description of Composite Fermions: Aftermath* (Department of Physics, Yale University, New Haven, 1999).