

# FORMALISMO LAGRANGIANO PARA EL MODELO t-J. RENORMALIZACIÓN Y DIAGRAMÁTICA.

A. Foussats, C.E. Repetto, O.P. Zandron y O.S. Zandron

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) - Instituto de Física Rosario (IFIR)  
Bvrd. 27 de Febrero 210 bis - (2000) - Rosario - Argentina  
e-mail: repetto@ifir.ifir.edu.ar - opz@ifir.ifir.edu.ar

En el presente trabajo se desarrolla un formalismo Lagrangiano perturbativo del modelo t-J en el marco de la representación de integral de camino. La descripción completa de la dinámica está dada por medio de la construcción de la diagramática estándar de Feynman para los operadores de Hubbard que verifican el álgebra graduada  $\text{spl}(2,1)$ . Se muestra que introduciendo apropiadas variables de campo fantasmas, los propagadores y vértices pueden ser renormalizados a todo orden. En particular, se estudia en detalle el propagador renormalizado del magnón ferromagnético para este formalismo, y se muestra que el ablandamiento de la frecuencia del magnón coincide con la que predice el modelo. También es analizado el caso antiferromagnético, y sus resultados son confrontados con los obtenidos por medio de la teoría del spin-polaron.

In the present work a Lagrangian perturbative formalism of the t-J model in the framework of the path-integral representation is developed. The complete description of the dynamics of the t-J model is given by means of the construction of the standard Feynman diagram approach for the Hubbard operators verifying the graded algebra  $\text{spl}(2,1)$ . We show that introducing proper ghost field variables, the propagators and vertices can be renormalized to each order. In particular, the renormalized ferromagnetic magnon propagator coming from our formalism is studied in details, and it is shown how the thermal softening of the magnon frequency is predicted by the model. The antiferromagnetic case is also analyzed, and the results are confronted with previous one obtained by means of the spin-polaron theories.

## I. INTRODUCCIÓN

En artículos previos<sup>(1)</sup>, a partir de un formalismo Lagrangiano de primer orden y mediante el método de Faddeev-Jackiw para sistemas vinculados, se obtuvo un funcional generatriz para el modelo t-J, donde se utilizó como variables de campo directamente a los operadores de Hubbard, de tal manera de trabajar con las excitaciones físicas reales.

Imponiendo a los operadores la condición de verificar las reglas de conmutación de los operadores de Hubbard, se obtuvo una familia de Lagrangianos de primer orden no polinómicos y un conjunto de vínculos de segunda clase. Se mostró que la familia de Lagrangianos construidos en función de los operadores de Hubbard con sus vínculos asociados se corresponde exactamente con aquellos Lagrangianos obtenidos a partir de la representación fermión esclavo.

En este trabajo, se desarrolló perturbativamente el Lagrangiano no polinómico del modelo t-J. Se realizó la descripción completa de la dinámica del modelo t-J mediante la diagramática de Feynman para los operadores de Hubbard que verifican el álgebra graduada  $\text{spl}(2,1)$ .

En el marco de la representación integral de camino, se mostró que introduciendo apropiadas variables de campo fantasmas, el modelo puede ser renormalizado a todo orden del desarrollo perturbativo.

Se estudió en detalle el propagador renormalizado del magnón para el caso ferromagnético. Se verificó el modelo comprobando que predice correctamente el efecto de ablandamiento térmico en la frecuencia del magnón. Se analizó el caso antiferromagnético, obteniendo resultados correctos cuando se los confronta con otros obtenidos a partir de teorías del "spin-polaron".

El punto de partida será la siguiente funcional generatriz para el modelo t-J en el espacio euclídeo:

$$Z = \int DS_{11} DS_{12} DS_{13} D\Psi_{i-} D\Psi_{i-}^* D\lambda_i (s \det M_{AB})_i^{1/2} \times \exp\left(-\int_0^\beta d\tau L_{\text{eff}}^E(S, \Psi)\right) \quad (1.1)$$

siendo el Lagrangiano efectivo:

$$L_{\text{eff}}^E(S, \Psi) = -\frac{i}{2s}(1+\rho) \sum_i \frac{S_{i2}\dot{S}_{i1} - S_{i1}\dot{S}_{i2}}{s+S_{i3}} - \sum_i \lambda_i (S_{i1}^2 + S_{i2}^2 + S_{i3}^2 - s^2) - s \sum_i \frac{1}{s+S_{i3}} (\dot{\Psi}_{i-}^* \Psi_{i-} + \dot{\Psi}_{i-} \Psi_{i-}^*) + H(S, \Psi) \quad (1.2)$$

y el Hamiltoniano  $H$ :

$$H = \sum_{i,j} t_{ij} \Psi_{i-} \Psi_{j-}^* \left( 1 + \left( \frac{S_{i1} - iS_{i2}}{s+S_{i3}} \right) \left( \frac{S_{j1} - iS_{j2}}{s+S_{j3}} \right) \right) - \frac{1}{8s^2} \sum_{i,j} J_{ij} (1-\rho_i)(1-\rho_j) (S_{i1}S_{j1} + S_{i2}S_{j2} + S_{i3}S_{j3} - s^2) - 2s\mu \sum_{i,\sigma} \frac{1}{s+S_{i3}} \Psi_{i-} \Psi_{i-}^* \quad (1.3)$$

donde  $J_{ij} > 0$  para el estado ferromagnético y  $J_{ij} < 0$  para el estado antiferromagnético;  $\rho$  es la densidad de agujeros que se supone constante.

De las expresiones anteriores, se ve claramente la estructura no polinómica del Lagrangiano efectivo.

## II. LA SUPERMATRIZ $\mathcal{M}_{AB}$ Y LOS CAMPOS FANTASMAS

La supermatriz  $\mathcal{M}_{AB}$  6x6 es la matriz simpléctica del formalismo de Faddeev-Jakiw, asociada a las tres variables de campo bosónicas  $S_i$ , al multiplicador de Lagrange  $\lambda$  y a las dos variables fermiónicas independientes  $\Psi_+$  y  $\Psi_-$ .

$$\mathcal{M}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -a & b & -2S_1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -c & -2S_2 & 0 & 0 \\ -b & c & 0 & -2S_3 & d & e \\ 2S_1 & 2S_2 & 2S_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & -e & 0 & f & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1-\rho}{s(s+S_3)} & b &= \frac{(1-\rho)S_2}{2s(s+S_3)^2} \\ c &= \frac{(1-\rho)S_1}{2s(s+S_3)^2} & d &= i \frac{s}{(s+S_3)^2} \Psi_- \\ e &= i \frac{s}{(s+S_3)^2} \Psi_+ & f &= -i \frac{2s}{s+S_3} \end{aligned}$$

La matriz  $\mathcal{M}_{AB}$  es una función (no polinómica) de los campos de la teoría, por lo tanto para obtener una diagramática adecuada es necesario escribir el superdeterminante de  $\mathcal{M}_{AB}$  como una integral de camino sobre un supercampo fantasma de Faddeev-Popov  $(\theta_a, Z)$ . Se puede demostrar fácilmente que el superdeterminante de  $\mathcal{M}_{AB}$  se escribe como el cociente de dos determinantes. El numerador es el determinante de la parte bosón-bosón de la matriz  $\mathcal{M}_{AB}$  (es decir está constituida por los elementos de matriz  $\mathcal{M}_{AB}$ , cuando  $A, B$  toman los valores 1, 2, 3 y 4); a dicha submatriz se la llamará  $A$ , mientras que al denominador, que es el determinante de la parte fermión-fermión de  $\mathcal{M}_{AB}$  ( $A, B$  toman los valores 5, 6), se la que llamará  $D$ .

El determinante de la matriz  $A$  de dimensión 4x4, real y antisimétrica, se puede escribir:

$$(\det A)^{1/2} = \int D\theta_a \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \theta^T A \theta\right) \quad (2.2)$$

donde  $\theta_a$  son cuatro campos fantasmas grassmanianos reales.

Por otro lado el  $(\det D)^{-1/2}$  se puede escribir en función de la integral de camino de un campo fantasma escalar complejo de la siguiente manera:

$$(\det D)^{-1/2} = \int DZ^* DZ \exp\left(-\int_0^\beta d\tau Z^* iM_{56} Z\right) \quad (2.3)$$

Entonces el Lagrangiano de los campos fantasmas está dado por:

$$L_{fantasma} = \theta^T A \theta + Z^* iM_{56} Z \quad (2.4)$$

y el Lagrangiano total es:

$$L = L_{eff}^E + L_{fantasma} \quad (2.5)$$

## III. CASO FERROMAGNÉTICO

Se supondrá de aquí en adelante que el sistema fluctúa alrededor de un estado ferromagnético  $J_y > 0$ . En dichas condiciones, las componentes del campo vectorial real  $S$  fluctúan alrededor del estado ordenado y el vector  $S$  se puede escribir:

$$S = (0, 0, s') + (\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3) \quad (3.1)$$

Desarrollando todos los términos no polinómicos del Lagrangiano alrededor del estado ordenado, y luego escribiéndolo en el espacio de Fourier de los momentos, se obtiene toda la diagramática de la teoría.

**Propagadores:**

1) el propagador  $D_{(0)}^{ab}(q, \omega_n)$  asociado al campo bosónico  $V^a = (S_1, S_2, S_3, \lambda)$  se representa por una línea de punto y raya, y su expresión explícita en el espacio de Fourier es:

$$D_{(0)}^{ab}(q, \omega_n) = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ -B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2s'} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2s'} & \frac{(1-\rho)\omega_q}{4s'^2 s(s+s')} \end{pmatrix}$$

donde se ha definido:

$$A = s(s+s')(1+\rho) \frac{\omega_q}{\omega_q^2 + \omega_n^2}$$

$$B = s(s+s')(1+\rho) \frac{\omega_n}{\omega_q^2 + \omega_n^2}$$

y

$$\omega_q = \frac{J^1 z}{8s} (s+s')(1+\rho)(1-\gamma_q) \quad (3.2)$$

En la ecuación (3.2),  $z$  es el número de primeros vecinos y  $z\gamma_q = \sum_I \exp(iq \cdot I)$ .

2) el propagador  $G_0(k, \nu_n)$  asociado al campo fermiónico  $\Psi_-$  se lo representa por una línea recta y su expresión explícita en el espacio de Fourier es:

$$G_0(k, \nu_n) = \frac{s+s'}{2s} \frac{1}{i\nu_n + (\varepsilon_k - \mu)} \quad (3.3)$$

donde  $k$  y  $\nu_n$  son el momento y la frecuencia de Matsubara del campo fermiónico respectivamente, y se define  $\varepsilon_k = -t \sum_I \exp[-ik \cdot I]$ .

3) El propagador asociado a los campos fantasmas grassmanianos se representa por una línea de punto y está dado por:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= (1+\rho) s(s+s') (\delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 - \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1) + \\ &+ \frac{1}{2s'} (\delta_\alpha^3 \delta_\beta^4 - \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

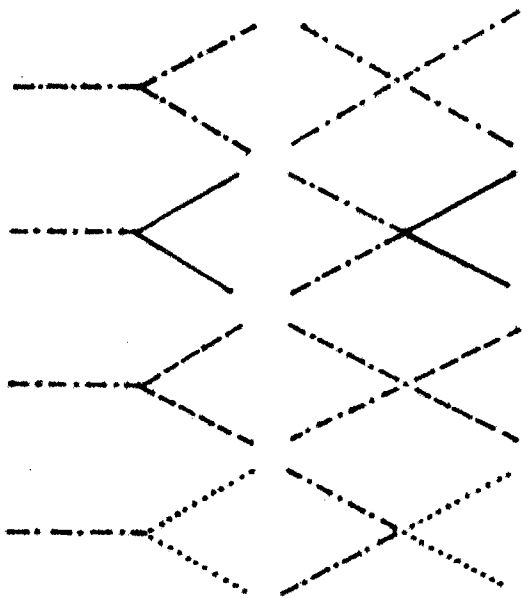
4) El propagador de los campos fantasmas escalares complejos se representa por una línea punteada y está dado por:

$$G = \frac{s+s'}{2s} \quad (3.5)$$

**Vértices:**

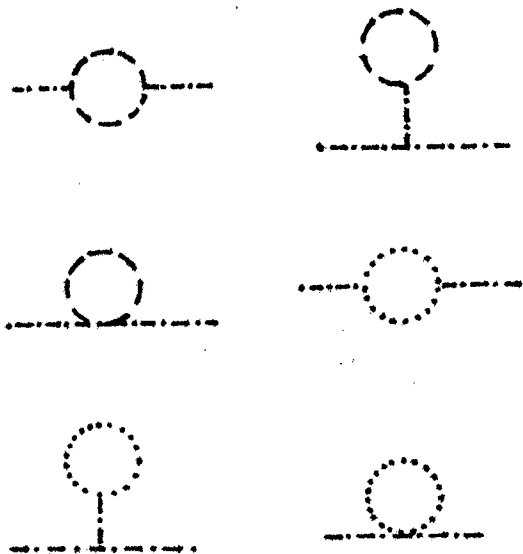
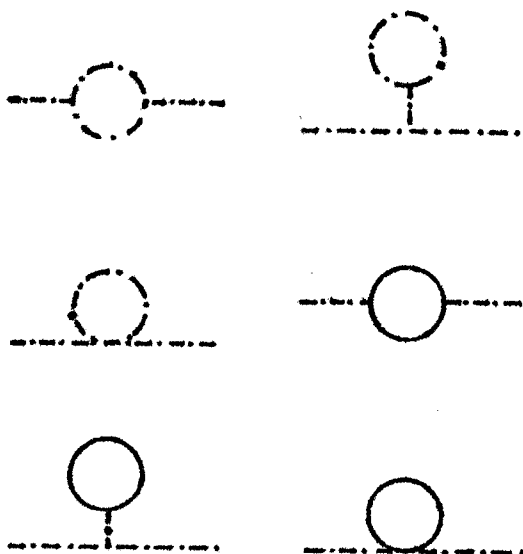
Se obtuvieron las expresiones explícitas de las distintas interacciones presentes en la teoría:  $n$  campos bosónicos; 2 campos fermiónicos y  $n$  bosónicos; 2 campos fantasmas fermiónicos y  $n$  campos bosónicos, 2 campos fantasmas bosónicos y  $n$  campos físicos bosónicos.

Se representan gráficamente aquellos vértices que se utilizarán en el cálculo:



**Autoenergía del campo bosónico y propagador del magnón renormalizado:**

La autoenergía del bosón se obtuvo como la suma de los siguientes diagramas a un lazo:



Los primeros seis diagramas corresponden a las contribuciones de los campos físicos mientras que los 6 últimos provienen de las interacciones con los campos fantasmas.

Se mostró:

1. Que las divergencias que aparecen en los primeros 6 diagramas se cancelan mutuamente con las de los últimos 6, permitiendo así obtener una expresión finita para la autoenergía del bosón.
2. Que los infinitos sólo aparecen en los cálculos a un lazo; en cálculos a más de un lazo los diagramas que contienen fantasmas dan contribuciones finitas.

A partir de la autoenergía del bosón y de la ecuación de Dyson se obtuvo la expresión explícita para el propagador renormalizado del campo bosónico  $V^a$ .

En particular, el propagador del magnón ferromagnético renormalizado (haciendo  $s = s'$ ) resulta:

$$D_{(R)}^{-+} = \frac{1}{2} (D_{(R)}^{11} + D_{(R)}^{22} + i(D_{(R)}^{12} - D_{(R)}^{21})) = 2s^2(1+\rho) \frac{1}{\omega_q - i\omega_n - P_q(\omega_n)} \quad (3.6)$$

donde:

$$P_q(\omega_n) = \frac{(1+\rho)}{2s^2 N_s} \left( \sum_{q'} n_B(\omega_{q'}) (\omega_{q'} - \omega_{q'-q}) + i\omega_n \sum_{q'} n_B(\omega_{q'}) \right) \quad (3.7)$$

Si se lleva a cabo la continuación analítica, se obtiene que la energía del magnón renormalizada resulta:

$$\omega_q(T) = \omega_q \left[ 1 - \frac{4(1+\rho)}{J'z} \sum_{q'} \omega_{q'} n_B(\omega_{q'}) \right] \quad (3.8)$$

que no es más que el ablandamiento por temperatura de la frecuencia del magnón.

1. Este resultado es la generalización para densidad de agujeros distinta de cero de la expresión obtenida para el ablandamiento de la energía del magnón ferromagnético en la non-linear spin waves<sup>(2)</sup>.

2. En este modelo se obtiene el ablandamiento cuando se computan las correcciones a un lazo sin tener en cuenta las correcciones debidas a los vértices, a diferencia de las ondas de spin donde el ablandamiento proviene de las correcciones a los vértices<sup>(2)</sup>. La corrección a los vértices cancelan procesos de scattering entre magnones de tal forma que sólo los procesos directos y de intercambio deben ser considerados como procesos físicos. En el caso en estudio, esta selección se realiza al considerar que el propagador sólo presenta polos en  $\omega_q$ .

3. Se mostró también que los vértices vestidos de n-patas resultan finitos. Todos los infinitos que aparecen en los gráficos a un lazo de funciones de n-patas se cancelan con los correspondientes diagramas construídos con los campos fantasmas.

#### IV. CASO ANTIFERROMAGNÉTICO

1. Como es usual en configuraciones antiferromagnéticas, se hace una rotación de una de las subredes de  $180^\circ$  alrededor del eje  $S_1$ .

2. Se obtiene el nuevo Lagrangiano. Los términos cinéticos son invariantes ante esta rotación; de allí que la matriz  $\mathcal{M}_{AB}$  no cambia y por lo tanto tampoco el Lagrangiano asociado a los campos fantasmas.

3. Se desarrolla el Lagrangiano alrededor del estado ordenado (3.1), y se considera la densidad de agujeros  $\rho$  pequeña y constante, obteniéndose todas las reglas de Feynman de la teoría.

4. Se obtiene el propagador libre del magnón antiferromagnético y la función espectral, las que coinciden totalmente con las de la literatura corriente, cuando el dopaje se anula<sup>(3)</sup>.

5. Debido a que los modos fermiónicos de la teoría son no propagantes, se obtiene la autoenergía del fermión de forma autoconsistente. Los resultados coinciden con los obtenidos en la teoría del "spin polaron" para el caso en que la densidad de agujeros es nula<sup>(4)</sup>.

#### V. CONCLUSIONES

1. En este trabajo se obtienen la diagramática y las reglas de Feynman del modelo para los operadores de Hubbard que verifican el álgebra spl (2,1).

2. Como se trata de una teoría vinculada con vínculos de segunda clase, el determinante de los mismos está presente. La exponenciación del determinante se realiza como es usual introduciendo los campos fantasmas de Faddeev-Popov en el Lagrangiano efectivo. Se mostró que los campos fantasmas son necesarios para cancelar las divergencias que aparecen en las cantidades físicas a un lazo.

3. Las divergencias aparecen sólo a un lazo, por lo tanto las cantidades están renormalizadas a todo orden en la teoría perturbativa. De esta forma, se renormalizan las autoenergías del bosón y el fermión y los diferentes vértices del modelo.

4. Dos hechos remarcables de este modelo: a) el ablandamiento térmico de la frecuencia del magnón, y b) la autoenergía del fermión a temperatura cero en la

configuración antiferromagnética son relacionados con resultados conocidos provenientes de las teorías de ondas de spin y del "spin polaron".

5. Los dos hechos anteriores permiten pensar que este modelo es bueno y por lo tanto el objetivo futuro será por ejemplo el cálculo de la vida media del magnón.

#### Referencias

- 1- A. Foussats, A. Greco and O.S. Zandron, *Ann. Phys.* **275**, 238-253, (1999); *Ann. Phys.* **279**, 263-281, (2000); A. Foussats, A. Greco, C.E. Repetto, O.P. Zandron and O.S. Zandron, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 5849, (2000).
- 2- D.C. Mattis, "The Theory of Magnetism I", (P. Fulde Ed.), Springer Series in Solid-State Sciences, Vol. 17, Spinger-Verlag, Berlin, (1981).
- 3- E. Manousakis, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 317 (1991).
- 4- G. Martinez and P. Horsch, *Phys. Rev. B* **44**, 317 (1991).