ESTADOS RESONANTES Y ESTRUCTURA SINGULAR

Rodolfo Id Betan, **Roberto Laura**, **Mario Castagnino**

Instituto de Física Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario Argentina
e-mail: idbetan@ifir.ifir.edu.ar
e-mail: laura@ifir.ifir.edu.ar
e-mail: castagni@ifir.ifir.edu.ar

Extendiendo la noción de estados mezclas a funcionales actuando sobre el espacio de observables, podemos definir correctamente una descomposición espectral compleja de la evolución temporal para problemas de decaimiento, donde los estados de Gamow están bien definidos como funcionales. Mostramos que la norma y energía de los estados de Gamow son nulas.

We extend the notion of mixed states to functionals acting on the space of observables. We define a suitable complex decomposition of the temporal evolution for decay problems, where the Gamow states are defined as functionals. We prove that the norm and energy of Gamow states is zero.

I. INTRODUCCIÓN

Los vectores de Gamow [1] han sido extensamente utilizados en la literatura para representar estados cuánticos de decaimiento [2] [3] [4] [5] porque decaen en forma exponencial. Es bien conocido que un estado en un espacio de Hilbert no puede evolucionar de esta manera [6] [7], luego los vectores de Gamow son muy útiles, pero siendo que no pertenecen al espacio de Hilbert, no pueden ser incluídos en el dominio de la mecánica cuántica ordinaria, al menos en una forma natural y simple [8]. Este es el gran dilema de los vectores de Gamow que hace tan difícil su uso a los físicos. Más aún, los vectores de Gamow tienen las siguientes propiedades indeseables:

a- En representación coordenadas divergen a distancias grandes de la región de scattering.

b- Su norma no está definida. Algunos autores arriban a la conclusión que es cero, otros que es uno. Lo mismo ocurre con su energía.

c-La multiplicación de vectores de Gamow que representan estados de captura con vectores de Gamow que representan estados de decaimiento está indefinida.

Diferentes soluciones han sido propuesta para todos estos problemas [9] [10] [11] [12] [13] [14], pero ninguna de ellas puede ser considerada definitiva, como se demuestra en el paper [15].

Creemos que el origen de estos problemas está en el uso de técnicas desarrolladas a partir del espectro usual discreto en un problema de espectro continuo, y en la suposición que los vectores de Gamow son estados puros. En este trabajo probamos que todos los problemas citados pueden ser resueltos si consideramos a los vectores de Gamow como objetos más generales, utilizando una técnica especifica para espectro continuo [16] [17] [18].

II. ESTADOS PUROS Y VECTORES DE GAMOW

Consideremos un Hamiltoniano "libre" H_0, con espectro continuo $\mathbb{R}^+$. Representemos por $|\omega\rangle$ los autovectores generalizados de H_0 con autovalor ω ($H_0\,|\omega\rangle = \omega\,|\omega\rangle$) y suponemos que ellos forman un sistema ortonormal completo ("representación H_0"). Consideremos el siguiente Hamiltoniano H "total" del sistema

$$H = H_0 + V = \int d\omega\, \omega\, |\omega\rangle\langle\omega| + \int d\omega \int d\omega'\, V_{\omega\omega'}\, |\omega\rangle\langle\omega'|, \tag{1}$$

donde $V_{\omega\omega'}$ es una función regular de las variables ω y ω'.

Como la evolución temporal es generada por el Hamiltoniano "total" H, es conveniente cambiar a la representación en términos de los autovectores generalizados de H ("representación H").

Para cada autovector generalizado $|\omega\rangle$ del Hamiltoniano H_0, existe un autovector generalizado $|\omega^+\rangle$ del Hamiltoniano $H = H_0 + V$, relacionados a través de la solución de la ecuación de Lippmann-Schwinger

$$|\omega^+\rangle = |\omega\rangle + \frac{1}{\omega + i0 - H}\, V\, |\omega\rangle. \tag{2}$$

En lo que sigue supondremos, por simplicidad, un sistema para el cual los autovectores generalizados $|\omega^+\rangle$ forman un sistema ortonormal completo.

La probabilidad de hallar un estado puro $|\varphi\rangle$ en el estado puro $|\psi\rangle$ al tiempo t es $P(t) = |A(t)|^2$,

$$A(t) = \langle\psi|e^{-i\,H\,t}|\varphi\rangle = \int_0^\infty d\omega'\, e^{-i\,\omega'\,t}\, \langle\psi|\omega'^+\rangle\langle\omega'^+|\varphi\rangle. \tag{3}$$

Para los modelos simples que estudiaremos, la extensión analítica al semiplano complejo inferior de la resolvente $R(z) \equiv (z - H)^{-1}$ tiene un polo simple para algún valor $z = z_0$, en el semiplano complejo inferior y muy cerca del semieje real positivo. Si este es el caso, la integral en la ec. (3) puede contener una contribución dominante para los valores ω' cercanos a $\omega_0 \equiv \mathrm{Re}\, z_0$. Para describir este efecto resonante, resulta útil deformar el dominio de integración para ω' a una curva conveniente en el plano complejo. Para realizar esta deformación, necesitamos las extensiones analíticas $|z\rangle$, $\langle\widetilde{z}|$, $|z^+\rangle$ y $\langle\widetilde{z}^+|$, de los autovectores generalizados $|\omega\rangle$, $\langle\omega|$, $|\omega^+\rangle$ y $\langle\omega^+|$. Todos estos objetos sólo pueden ser considerados como *funcionales* actuando sobre los vectores de onda usuales. En efecto, si $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ es una función de onda en la "representación H_0", el "bra" $\langle\omega|$ es un *funcional lineal* cuya acción sobre φ está definida como $\langle\omega|\varphi\rangle \equiv \varphi(\omega)$. Análogamente, el "ket" $|\omega\rangle$ es un *funcional antilineal* definido como $\langle\varphi|\omega\rangle \equiv \overline{\varphi(\omega)}$.

Como nuestros objetos serán principalmente complejos, debemos extender los funcionales anteriores al plano complejo. En el dominio del plano complejo para el cual la extensión analítica de la función φ está bien definida, definimos el *funcional lineal* $\langle\widetilde{z}|$ a través de la ecuación $\langle\widetilde{z}|\varphi\rangle \equiv \varphi(z)$, esto es, el funcional $\langle\widetilde{z}|$ actuando sobre la función $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ da el valor de la extensión analítica de la función φ en el punto z del plano complejo. En el dominio del plano complejo para el cual la extensión analítica de la función $\overline{\varphi}$ está bien definida, definimos el *funcional antilineal* $|z\rangle$ a través de la relación $\langle\varphi|z\rangle \equiv \varphi^{\#}(z) = \overline{\varphi(\overline{z})}$, esto es, el funcional $|z\rangle$, actuando sobre la función $\overline{\varphi} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ da el valor de la extensión analítica de la función $\overline{\varphi}$ en el punto z del plano complejo.

La resolvente $R(z) \equiv (z - H)^{-1}$ es una función analítica de la variable compleja z, excepto para el corte en $\mathbb{R}^+$. De acuerdo a la ec. (2), tenemos

$$
\begin{aligned}
|\omega^+\rangle &= |\omega\rangle + R(\omega + i0)\, V\, |\omega\rangle, \\
\langle\omega^+| &= \langle\omega| + \langle\omega|\, V\, R(\omega - i0).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Luego, la extensión analítica de $|\omega^+\rangle$ y $\langle\omega^+|$ involucra la extensión analítica de la resolvente. Definimos la extensión analítica $R^+(z)$ ($R^-(z)$) de resolvente $R(z)$ desde arriba (abajo) al semiplano complejo inferior (superior)[1]

$$
\begin{aligned}
R^+(z) &\equiv \begin{cases} R(z) & z \in \mathbb{C}^+ \\ cont_{s\in\mathbb{C}^+ \to z}\, R(s) & z \in \mathbb{C} \end{cases}, \\
R^-(z) &\equiv \begin{cases} cont_{s\in\mathbb{C}^- \to z}\, R(s) & z \in \mathbb{C}^+ \\ R(z) & z \in \mathbb{C}^- \end{cases}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Las extensiones analíticas de $|\omega^+\rangle$ y $\langle\omega^+|$ son

$$
|z^+\rangle = |z\rangle + R^+(z)\, V\, |z\rangle, \quad \langle\widetilde{z}^+| = \langle\widetilde{z}| + \langle\widetilde{z}|\, V\, R^-(z). \tag{6}
$$

[1] La extensión analítica de un operador función de una variable compleja z podría siempre ser comprendida en un sentido débil. Por ejemplo $\langle\varphi|cont_{s\in\mathbb{C}^+ \to z}\, R(s)|\psi\rangle \equiv cont_{s\in\mathbb{C}^+ \to z}\langle\varphi|R(s)|\psi\rangle$, siendo φ y ψ funciones test adecuadas.

En lo que sigue, suponemos por simplicidad que $R^-(z)$ tiene un polo simple en un punto $z = z_0$ en el semiplano complejo inferior, y luego $R^-(z)$ tiene un polo simple en el punto $z = \overline{z}_0$ en el semiplano complejo superior. Consecuentemente $|z^+\rangle$ tiene un polo en z_0, y $\langle\widetilde{z}^+|$ tiene un polo en $\overline{z}_0$.

Con objeto de definir los vectores de Gamow deformamos el contorno de integración. Volviendo a la ec. (3), podemos deformar la integral sobre $\mathbb{R}^+$ para la variable ω' en la curva $C \cup \Gamma$ en el semiplano complejo inferior (Fig. 1). Teniendo en cuenta el polo simple en z_0, obtenemos la siguiente amplitud para hallar $\varphi(t)$ en el estado ψ

$$
A(t) = e^{-i z_0 t} \langle\psi|f_0\rangle\langle\widetilde{f}_0|\varphi\rangle + \int_\Gamma dz'\, e^{-i z' t} \langle\psi|f_{z'}\rangle\langle\widetilde{f}_{z'}|\varphi\rangle, \tag{7}
$$

donde,

$$
\begin{aligned}
\langle\widetilde{f}_0|\varphi\rangle &\equiv cont_{\omega' \to z_0}\langle\omega'^+|\varphi\rangle, \\
\langle\psi|f_0\rangle &\equiv (-2\pi i)\, cont_{\omega' \to z_0}\, (\omega' - z_0)\langle\psi|\omega'^+\rangle, \\
\langle\widetilde{f}_{z'}|\varphi\rangle &\equiv cont_{\omega' \to z'}\langle\omega'^+|\varphi\rangle, \\
\langle\psi|f_{z'}\rangle &\equiv cont_{\omega' \to z'}\langle\psi|\omega'^+\rangle, \qquad z' \in \Gamma.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Es simple probar, usando sus definiciones, que los funcionales (8) son autovectores generalizados del Hamiltoniano con autovalores complejos,

$$
\begin{aligned}
&\langle\widetilde{f}_0|\, H = z_0\, \langle\widetilde{f}_0|, \quad H\, |f_0\rangle = z_0\, |f_0\rangle, \quad \langle\widetilde{f}_{z'}|H = z'\, \langle\widetilde{f}_{z'}|, \\
&H|f_{z'}\rangle = z'\, |f_{z'}\rangle, \qquad z' \in \Gamma.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Es interesante notar que la representación coordenada de los "vectores de Gamow" tiene un comportamiento divergente para valores crecientes de la coordenada. Por ejemplo, para un problema unidimensional en $\mathbb{R}^+$ con potencial a soporte compacto V, obtenemos $\langle x|f_0\rangle \sim \exp(+i\sqrt{z_0}x)$, $\langle\widetilde{f}_0|x\rangle \sim \exp(+i\sqrt{z_0}x)$, esto es, un factor oscilante modulado por una exponencial creciente. Luego, si intentamos definir la "norma" del funcional $|f_0\rangle$ por $\langle f_0|f_0\rangle \equiv \int_0^\infty dx\, \langle f_0|x\rangle\langle x|f_0\rangle$, la exponencial creciente del integrando daría un valor infinito. La energía $\langle f_0|\, H\, |f_0\rangle$ es también divergente y el "producto" $\langle\widetilde{f}_0|f_0\rangle$ no está definido debido a los términos oscilantes.

Sin embargo, expresiones como $\langle\psi|f_0\rangle$ o $\langle\widetilde{f}_0|\varphi\rangle$ están generalmente bien definidas, al menos para "vectores test" bien comportados φ y ψ. Si este es el caso, la ec. (7) da una descomposición espectral compleja bien definida para la amplitud de transición $A(t)$.

La amplitud de supervivencia puede ser obtenidad a partir de la ec. (7) con $\varphi = \psi$. Más aún, si $\mathrm{Im}\, z_0 \ll \mathrm{Re}\, z_0$, puede ser probado que para valores intermedios del tiempo, el autovalor complejo z_0 da la contribución principal para la probabilidad de supervivencia del estado puro [7], esto es. $|\langle\varphi|\exp(-iHt)|\varphi\rangle|^2 \cong \exp(-\Gamma t)$, donde $\Gamma \equiv 2\,|\mathrm{Im}\, z_0|$.

III. ESTADOS MEZCLAS Y VECTORES DE GAMOW

En la ec. (3), dimos la probabilidad $P(t)$ para hallar al sistema en el estado puro ψ al tiempo t, si estuvo inicialmente en el estado puro φ. Si representamos el estado puro por un operador densidad $\rho \equiv |\varphi\rangle\langle\varphi|$, el operador densidad dependiente del tiempo es $\rho_t = \exp(-iHt)\,\rho\,\exp(+iHt)$. Análogamente, si definimos el proyector $\Pi_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, la probabilidad $P(t)$ dada en la ec. (3) también puede ser obtenida como $P(t) = Tr\,(\rho_t\,\Pi_\psi)$, y luego

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \langle\varphi|\, e^{iHt}\,|\psi\rangle\langle\psi|\, e^{-iHt}\,|\varphi\rangle = \\
&= e^{i\,(\bar{z}_0 - z_0)\,t}\,\langle\varphi|\widetilde{f}_0\rangle\langle f_0|\psi\rangle\langle\psi|f_0\rangle\langle\widetilde{f}_0|\varphi\rangle + \qquad (10)\\
&\int_\Gamma dz'\, e^{i\,(\bar{z}_0 - z')\,t}\langle\varphi|\widetilde{f}_0\rangle\langle f_0|\psi\rangle\langle\psi|f_{z'}\rangle\langle\widetilde{f}_{z'}|\varphi\rangle + \\
&\int_{\overline{\Gamma}} dz e^{i\,(z - z_0)\,t}\,\langle\varphi|\widetilde{f}_z\rangle\langle f_z|\psi\rangle\langle\psi|f_0\rangle\langle\widetilde{f}_0|\varphi\rangle + \\
&\int_{\overline{\Gamma}} dz \int_\Gamma dz' e^{i\,(z-z')\,t}\langle\varphi|\widetilde{f}_z\rangle\langle f_z|\psi\rangle\langle\psi|f_{z'}\rangle\langle\widetilde{f}_{z'}|\varphi\rangle.
\end{aligned}
$$

Uno se halla tentado a generalizar a casos mas generales la expresión dada en la ec. (10), *válida para calcular probabilidades de transición entre estados puros normalizados.* Por ejemplo, en un proceso de decaimiento unidimensional podríamos tratar de calcular la probabilidad de hallar la partícula a una distancia mayor que R al tiempo t (esto es equivalente a haber detectado la partícula pasando en el punto R antes del tiempo t). Para calcular esta probabilidad usando "vectores de Gamow", podemos tratar de reemplazar en la ecuación (10) el proyector $\Pi_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ correspondiente al estado puro ψ, por el proyector $\Pi_{[R,\infty)} \equiv \int_R^\infty dx\,|x\rangle\langle x|$ sobre un estado localizado a una distancia mayor que R, fuera de la barrera de potencial. Pero entonces, aparecen términos divergentes: por ejemplo $\langle f_0|\Pi_{[R,\infty)}|f_0\rangle = \int_R^\infty dx\,\langle f_0|x\rangle\langle x|f_0\rangle = \infty$, debido al factor exponencial creciente $\langle f_0|x\rangle\langle x|f_0\rangle \sim \exp(+i[\sqrt{z_0} - \sqrt{\bar{z}_0}]x)$. El mismo tipo de problemas aparece si tratamos de sustituir en la ec. (10) el proyector Π_ψ por $I = \int_0^\infty dx\,|x\rangle\langle x|$, para calcular la probabilidad total $Tr\,(\rho_t) = Tr\,(\rho_t\, I) = 1$.

Notamos, entonces, que el uso de "vectores de Gamow" para calcular la evolución temporal de valores medios para observables los cuales no son proyectores sobre un estado puro normalizado, no puede ser generalizado en forma directa a partir de la ec. (10). Es evidente que cada observable importante como el Hamiltoniano H_0 y H o el operador identidad I, pertenecen a este tipo de observables, y por los tanto es necesario una formulación diferente si queremos incluir resonancias en la evolución temporal.

IV. ESTADOS GENERALIZADOS Y VECTORES DE GAMOW

Las expresiones dadas para los operadores H_0 y H, sugieren que consideremos la siguiente forma general para operadores autoadjuntos representando observables del sistema

$$
O = \int d\omega\, O_\omega\,|\omega\rangle\langle\omega| + \int d\omega \int d\omega'\, O_{\omega\omega'}\,|\omega\rangle\langle\omega'|, \qquad (11)
$$

donde $O_\omega = \overline{O_\omega}$ y $O_{\omega\omega'} = \overline{O_{\omega'\omega}}$.

El primer término de la derecha se lo llama ***término singular***, siendo que puede ser escrito como $\int d\omega \int d\omega'\, O_\omega\, \delta(\omega - \omega')|\omega\rangle\langle\omega'|$ y por lo tanto contiene un objeto singular como es la delta de Dirac. El segundo término de la derecha es el *término regular* siendo que $O_{\omega\omega'}$ es una función regular. El método de los papers [16] [17] [19] está dedicado a eliminar la multiplicación entre deltas de Dirac las cuales generan tantos problemas.

Sea $|\psi_a\rangle$ un vector estado puro y p_a la probabilidad de que el sistema cuántico esté en este estado puro ($a = 1, 2, ...,$ $\sum_a p_a = 1$, $\langle\psi_a|\psi_a\rangle = 1$). En este caso, el estado del sistema puede ser representado por el siguiente operador densidad $\rho \equiv \sum_a p_a\,|\psi_a\rangle\langle\psi_a|$.

El valor medio de un observable representado por un operador O de la forma dado en la ec. (11) es

$$
\begin{aligned}
\langle O\rangle_\rho &= Tr\,(\rho\, O) \qquad (12)\\
&= \int d\omega\, \overline{\rho_\omega}\, O_\omega + \int d\omega \int d\omega'\, \overline{\rho_{\omega\omega'}}\, O_{\omega\omega'},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\overline{\rho_\omega} \equiv \sum_a p_a\langle\omega|\psi_a\rangle\langle\psi_a|\omega\rangle, \quad \overline{\rho_{\omega\omega'}} \equiv \sum_a p_a\langle\omega'|\psi_a\rangle\langle\psi_a|\omega\rangle.
$$

Desde un punto de vista más general, $\overline{\rho_\omega}$ y $\overline{\rho_{\omega\omega'}}$ pueden ser considerados como "componentes" de un *funcional lineal* $(\rho|$, actuando sobre el observable $|O)$ con "componentes" O_ω y $O_{\omega\omega'}$. La acción del funcional estado sobre un observable da el valor medio $\langle O\rangle_\rho = (\rho|O)$. En esta formulación, es conveniente definir los "observables generalizados" $|\omega) \equiv |\omega\rangle\langle\omega|$, $|\omega\omega') \equiv |\omega\rangle\langle\omega'|$, en forma tal que el observable O puede ser escrito como

$$
|O) \equiv O = \int d\omega\, O_\omega\,|\omega) + \int d\omega \int d\omega'\, O_{\omega\omega'}\,|\omega\omega'). \quad (13)
$$

Es útil también definir los "estados generalizados" $(\omega|$ y $(\omega\omega'|$ los cuales satifacen las relaciones

$$
(\omega|O) \equiv O_\omega, \qquad (\omega\omega'|O) \equiv O_{\omega\omega'}, \qquad (14)
$$

(podria ser enfatizado que de acuerdo a estas definiciones. $(\omega| \neq (|\omega\rangle\langle\omega|)^\dagger$ y $(\omega\omega'| \neq (|\omega\rangle\langle\omega'|)^\dagger$). Usando los estados generalizados definido en la ecs. (14), los estados funcionales toman la siguiente forma

$$
(\rho| = \int d\omega\, \overline{\rho_\omega}\,(\omega| + \int d\omega \int d\omega'\, \overline{\rho_{\omega\omega'}}\,(\omega\omega'|. \qquad (15)
$$

Si calculamos los "elementos de matriz" de un operador O de la forma dado en la ecuación (11), en la "representación H_0" obtenemos $\langle\omega|O|\omega'\rangle = \delta(\omega-\omega')\,O_\omega + O_{\omega\omega'}$ (donde el término singular y regular aparecen naturalmente). Es simple comprender, a partir de la definición de $|\omega^+\rangle$ dado en la ec. (2), que si usamos la "representación H", el elemento de matriz $\langle\omega^+|O|\omega'^+\rangle$ incluye también un término singular $\delta(\omega-\omega')\,O_\omega$, y por lo tanto existe un término de la forma $\int d\omega\, O_\omega\, |\omega^+\rangle\langle\omega^+|$ en el operador O. Este término es invariante bajo la evolución temporal en la representación de Heisenberg.

Como los vectores de Gamow son estados que decaen exponencialmente no pueden estar presentes en el término invariante. Deseamos separar la parte independiente del tiempo de aquella dependiente en el observable. Definimos la parte invariante y fluctuante de O como sigue

$$O_{inv} \equiv \int d\omega\, O_\omega\, |\omega^+\rangle\langle\omega^+|, \qquad O_{fluc} \equiv O - O_{inv}. \tag{16}$$

Los elementos de matriz O_{fluc} son

$$\begin{aligned}\langle\omega^+|O_{fluc}|\omega'^+\rangle = \int d\varepsilon\, &[\langle\omega^+|\varepsilon\rangle\langle\varepsilon|\omega'^+\rangle - \\ &\delta(\omega-\varepsilon)\,\delta(\varepsilon-\omega')]\,(\varepsilon|O) \\ &+ \int d\varepsilon \int d\varepsilon'\, \langle\omega^+|\varepsilon\rangle\langle\varepsilon'|\omega'^+\rangle\,(\varepsilon\varepsilon'|O).\end{aligned} \tag{17}$$

La parte invariante de O da la parte independiente del tiempo del valor medio, mientras que la contribución dependiente del tiempo está contenida en la parte fluctuante,

$$\begin{aligned}\langle O\rangle_t = (\rho_t|O) = \int d\omega\, (\rho|\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega|O) + \\ \int d\omega \int d\omega'\, e^{i(\omega-\omega')t}(\rho|\Phi_{\omega\omega'})(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|O),\end{aligned} \tag{18}$$

donde hemos itroducido las siguientes definiciones para los estados generalizados,

$$\begin{aligned}|\Phi_\omega) \equiv |\omega^+\rangle\langle\omega^+|, \quad (\widetilde{\Phi}_\omega| \equiv (\omega|, \quad |\Phi_{\omega\omega'}) \equiv |\omega^+\rangle\langle\omega'^+|, \\ (\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}| \equiv \int d\varepsilon\, [\langle\omega^+|\varepsilon\rangle\langle\varepsilon|\omega'^+\rangle - \delta(\omega-\varepsilon)\,\delta(\varepsilon-\omega')]\,(\varepsilon| \\ + \int d\varepsilon \int d\varepsilon'\, \langle\omega^+|\varepsilon\rangle\langle\varepsilon'|\omega'^+\rangle\,(\varepsilon\varepsilon'|.\end{aligned} \tag{19}$$

En la siguiente sección veremos que los vectores de Gamow están contenidos en la continuación analítica del segundo término de ec. (18).

A. Propiedades de los Estados Generalizados

Los estados y observables generalizados definidos en las ecs. (19) tienen las siguientes propiedades:

i) *Ellos forman un sistema biortonormal completo para observables y estados.*

$$\begin{aligned}(\widetilde{\Phi}_\omega|\Phi_{\omega'}) &= \delta(\omega-\omega'), \\ (\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|\Phi_{\varepsilon\varepsilon'}) &= \delta(\omega-\varepsilon)\delta(\omega'-\varepsilon'), \\ (\widetilde{\Phi}_\omega|\Phi_{\varepsilon\varepsilon'}) &= (\widetilde{\Phi}_{\varepsilon\varepsilon'}|\Phi_{\omega'}) = 0, \\ \mathbb{I} &= \int d\omega\, |\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega| \\ &+ \int d\omega \int d\omega'\, |\Phi_{\omega\omega'})(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|,\end{aligned} \tag{20}$$

donde $\mathbb{I}$ es el superoperador identidad.

ii) *Ellos proveen la descomposición espectral del generador de la evolución temporal.*

En la representación de Heisenberg la evolución temporal de un observable O de la forma dada en la ec. (11), es dada por $O_t = \exp(+iHt)\,O\,\exp(-iHt) = \exp(+i\mathbb{L}t)\,O$, donde $\mathbb{L}$ es el superoperador de Liouville-Von Newman, definido como $\mathbb{L}O \equiv HO - OH$. Resulta simple probar que

$$\mathbb{L} = \int d\omega \int d\omega'\, (\omega-\omega')\, |\Phi_{\omega\omega'})(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|. \tag{21}$$

Luego $|\Phi_\omega)$ $((\widetilde{\Phi}_\omega|)$ es un autovector por derecha (izquierda) de $\mathbb{L}$ con autovalor cero, y $|\Phi_{\omega\omega'})$ $((\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|)$ es un autovector por derecha (izquierda) de $\mathbb{L}$ con autovalor $(\omega-\omega')$. Los vectores de Gamow serán también autovectores de $\mathbb{L}$ pero con autovalores complejos.

iii) *Los estados generalizados* $(\widetilde{\Phi}_\omega|$ *y* $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|$ *tienen propiedades "físicas" bien definidas*

Cualquier funcional estado puede ser escrito como combinación lineal

$$\begin{aligned}(\rho| = (\rho|\,\mathbb{I} = \int d\omega\, (\rho|\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega| + \\ \int d\omega \int d\omega'\, (\rho|\Phi_{\omega\omega'})(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|,\end{aligned}$$

y luego $(\widetilde{\Phi}_\omega|$ y $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|$ puede ser considerado como una base para los estados generalizados.

El estado generalizados $(\widetilde{\Phi}_\omega|$ verifica la condición de probabilidad total $(\widetilde{\Phi}_\omega|I) = 1$ (la generalización de la condición $Tr\,\rho = 1$ para operadores densidad). El valor medio de la energía en el estado $(\widetilde{\Phi}_\omega|$ es $(\widetilde{\Phi}_\omega|H) = \omega$. Más aún, podemos mostrar $\langle H^n\rangle = (\widetilde{\Phi}_\omega|H^n) = \omega^n$ ($n = 1, 2, \ldots$), lo cual implica $\langle(H - \langle H\rangle)^n\rangle = 0$. Luego, el valor medio ω de la energía no tiene dispersión, y podemos decir que el estado $(\widetilde{\Phi}_\omega|$ *tiene* energía ω.

El estado generalizado $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|$ satisface $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|I) = 0$ y $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|H) = 0$, por lo que este funcional no puede representar por si mismo ningún estado físico, siendo que tiene probabilidad y energía nula. Los vectores de Gamow heredan estas propiedades matemáticas como veremos en la siguiente sección.

iv) *Ellos proveen una representación conveniente para describir la forma asintótica de un estado para tiempos muy largos.* Si $(\rho|\Phi_{\omega\omega'})$ y $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|O)$ son funciones regulares de las variables ω y ω', el segundo factor de la expresión dada en la ec. (18) para el valor medio dependiente del tiempo $\langle O\rangle_t$ del observable tiende a anularse para tiempos muy largos, debido al factor rápidamente oscilante $e^{i(\omega-\omega')t}$ dentro de la integral doble. Luego, obtenemos $\lim_{t\to\infty}(\rho_t|O)=\int d\omega(\rho|\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega|O)$, o (en un sentido débil)

$$(\rho_\infty| \equiv W\lim_{t\to\infty}(\rho_t| = \int d\omega\,(\rho|\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega|.$$

Por lo tanto las componentes $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|$ del estado son eliminadas durante la evolución temporal. Las propiedades "no físicas" $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|H) = 0$ y $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|I) = 0$ discutidas arriba, resultan esenciales para la conservación de la energía y la probabilidad

$$\langle H\rangle = (\rho|H) = (\rho_t|H) = (\rho_\infty|H),$$
$$\langle I\rangle = (\rho|I) = (\rho_t|I) = (\rho_\infty|I) = 1.$$

B. Vectores de Gamow

En la ec. (18) hemos obtenido, la descomposición espectral para el valor medio de la evolución temporal de un observable. Deseamos deformar la integral sobre $\mathbb{R}^+$ para la variable ω (ω') en la curva en el semiplano complejo superior (inferior). Por lo que necesitamos las siguientes extensiones analíticas

$$(\rho|\Phi_{zz'}) \equiv cont_{\omega\to z}cont_{\omega'\to z'}(\rho|\Phi_{\omega\omega'}),$$
$$(\widetilde{\Phi}_{zz'}|O) \equiv cont_{\omega\to z}cont_{\omega'\to z'}(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|O). \quad (22)$$

Si z (z') pertenece al semiplano complejo superior (inferior), entonces $(\rho|\Phi_{zz'})$ es analítica y $(\widetilde{\Phi}_{zz'}|O)$ tiene polos simples para $z = \overline{z}_0$ y $z' = z_0$. La siguiente expresión es obtenida para la evolución temporal del valor medio

$$\begin{aligned}(\rho_t|O) = &\int_0^\infty d\omega\,(\rho|\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega|O) + \\ &e^{i(\overline{z}_0-z_0)t}(\rho|\Phi_{00})(\widetilde{\Phi}_{00}|O) + \\ &\int_\Gamma dz'\,e^{i(\overline{z}_0-z')t}(\rho|\Phi_{0z'})(\widetilde{\Phi}_{0z'}|O) + \\ &\int_{\overline{\Gamma}} dz\,e^{i(z-z_0)t}(\rho|\Phi_{z0})(\widetilde{\Phi}_{z0}|O) + \\ &\int_{\overline{\Gamma}} dz\int_\Gamma dz'\,e^{i(z-z')t}(\rho|\Phi_{zz'})(\widetilde{\Phi}_{zz'}|O), \quad (23)\end{aligned}$$

donde hemos introducido los siguientes definiciones

$$\begin{aligned}(\rho|\Phi_{00}) &\equiv cont_{\omega\to\overline{z}_0}\,cont_{\omega'\to z_0}\,(\rho|\Phi_{\omega\omega'}) = (\rho||\widetilde{f}_0)\langle\widetilde{f}_0|) \\ (\widetilde{\Phi}_{00}|O) &\equiv cont_{\omega\to\overline{z}_0}cont_{\omega'\to z_0}4\pi^2(\omega-\overline{z}_0)(\omega'-z_0)\times \\ &\quad(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|O) \quad (24)\\ &= \langle f_0|(O-O_{inv})|f_0\rangle \\ (\rho|\Phi_{0z'}) &\equiv cont_{\omega\to\overline{z}_0}\,cont_{\omega'\to z'}\,(\rho|\Phi_{\omega\omega'}) = (\rho_0||\widetilde{f}_0)\langle\widetilde{f}_{z'}|) \\ (\widetilde{\Phi}_{0z'}|O) &\equiv cont_{\omega\to\overline{z}_0}\,cont_{\omega'\to z'}\,(2\pi i)\,(\omega-\overline{z}_0)\,(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|O) \\ &= \langle f_0|(O-O_{inv})|f_{z'}\rangle \\ (\rho|\Phi_{z0}) &\equiv cont_{\omega\to z}\,cont_{\omega'\to z_0}\,(\rho|\Phi_{\omega\omega'}) = (\rho||\widetilde{f}_z)\langle\widetilde{f}_0|) \\ (\widetilde{\Phi}_{z0}|O) &\equiv cont_{\omega\to z}\,cont_{\omega'\to z_0}\,(-2\pi i)\,(\omega'-z_0)\,(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|O) \\ &= \langle f_z|(O-O_{inv})|f_0\rangle \\ (\rho|\Phi_{zz'}) &\equiv cont_{\omega\to z}\,cont_{\omega'\to z'}\,(\rho|\Phi_{\omega\omega'}) = (\rho||\widetilde{f}_z)\langle\widetilde{f}_{z'}|) \\ (\widetilde{\Phi}_{zz'}|O) &\equiv cont_{\omega\to z}\,cont_{\omega'\to z'}\,(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|O) \\ &= \langle f_z|(O-O_{inv})|f_{z'}\rangle. \quad (25)\end{aligned}$$

Es importante comprender que en las definiciones de los funcionales dados en las ecs. (25), las continuaciones analíticas pueden ser comprendidas en el sentido débil, esto es, ellos deben ser realizadas *después* de la aplicación de los funcionales dependiendo sobre los parámetros reales ω y ω' a funciones test convenientes, esto es así debido a que la nueva descomposición espectral dada en la ec. (23) fue obtenida usando el teorema de Cauchy sobre la ec. (18).

La ec. (23) provee una descomposición espectral alternativa a la original dada por la ec. (18), donde las resonancias en z_0 y $\overline{z}_0$ aparecen explícitamente. Como $\overline{z}_0 - z_0 = -2i\,\mathrm{Im}\,z_0$, y por definición $\mathrm{Im}\,z_0 < 0$, $(\widetilde{\Phi}_{00}|$ es un modo que decae exponencialmente y por lo tanto un "estado generalizado de Gamow". Esta descomposición tiene las mismas propiedades que las de la sección previa. En particular la propiedades $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|H) = (\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|I) = 0$, de los estados generalizados $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|$ es también verificada por los nuevos estados generalizados $(\widetilde{\Phi}_{00}|$, $(\widetilde{\Phi}_{0z'}|$, $(\widetilde{\Phi}_{z0}|$ y $(\widetilde{\Phi}_{zz'}|$, pues ellos son obtenidos por extensiones analíticas de los funcionales $(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'}|$ (la extensión analítica de cero es cero). Como $(\widetilde{\Phi}_{00}|I) = 0$ y $(\widetilde{\Phi}_{00}|H) = 0$, concluimos que el estado generalizado de Gamow no puede representar por sí mismo un estado fisico siendo que tiene probabilidad y energía nula. Ellos representan *términos matemáticos convenientes en una descomposción espectral.* Siendo su naturaleza puramente matemática no resulta extraño que sus propiedades se vean como no físicas. Ellos verifican las condiciones de biortonormalidad

$$(\widetilde{\Phi}_\omega|\Phi_{\omega'}) = \delta(\omega-\omega'), \quad (\widetilde{\Phi}_{00}|\Phi_{00}) = 1,$$
$$(\widetilde{\Phi}_\omega|\Phi_{00}) = (\widetilde{\Phi}_{00}|\Phi_{\omega'}) = 0,\ etc. \quad (26)$$

en particular $(\widetilde{\Phi}_{00}|\Phi_{00}) = 1$ indica que el producto interno entre un vector creciente y un vector que decae está bien definido.

V. APPLICACIÓN: POTENCIAL BARRERA UNIDIMENSIONAL

Apliquemos el formalismo presentado al proceso de decaimiento exponencial unidimensional ya mencionado al final de la sección III. Consideremos un estado puro $|\varphi\rangle$ localizado dentro de la barrera. La probabilidad de hallar la partícula a un distancia mayor que R a tiempo t es dada por $(\rho_t|\Pi_{[R,\infty)})$, donde

$$\Pi_{[R,\infty)} = \int_R^{\infty} dx\,|x\rangle\langle x| = \int_0^{\infty} dx\,|x\rangle\langle x| - \int_0^R dx\,|x\rangle\langle x|.$$

El vector $|x\rangle$ representa a un autovector del operador coordenada con autovalor x. Comparando con la descomposición $O = O_{inv} + O_{fluc}$, dada en la ec. (16), obtenemos

$$\Pi^{inv}_{[R,\infty)} = I = \int d\omega\,|\omega^+\rangle\langle\omega^+| = \int d\omega\,|\omega\rangle\langle\omega|,$$

$$\Pi^{fluc}_{[R,\infty)} = -\int_0^R dx\,|x\rangle\langle x|,$$

y luego

$$(\tilde{\Phi}_\omega|\Pi_{[R,\infty)}) = (\omega|\Pi_{[R,\infty)}) = 1, \qquad (27)$$
$$(\tilde{\Phi}_{\omega\omega'}|\Pi_{[R,\infty)}) = \langle\omega^+|\Pi^{fluc}_{[R,\infty)}|\omega'^+\rangle$$
$$= -\int_0^R dx\,\langle\omega^+|x\rangle\langle x|\omega'^+\rangle.$$

Si la condición inicial es un estado puro $|\varphi\rangle$, entonces $(\rho|O) = \langle\varphi|O|\varphi\rangle$, y luego,

$$(\rho|\Phi_\omega) = (\rho||\omega^+\rangle\langle\omega^+|) = \langle\varphi|\omega^+\rangle\langle\omega^+|\varphi\rangle,$$
$$(\rho|\Phi_{\omega\omega'}) = (\rho||\omega^+\rangle\langle\omega'^+|) = \langle\varphi|\omega^+\rangle\langle\omega'^+|\varphi\rangle. \qquad (28)$$

Reemplazando las ecs. (27) y (28) en la expresión dada en la ec. (18) para la evolución temporal del valor medio, obtenemos

$$\langle\Pi_{[R,\infty)}\rangle_t = 1 - \int_0^R dx \int d\omega \int d\omega'\, e^{i(\omega-\omega')t}\,\langle\varphi|\omega^+\rangle \times$$
$$\langle\omega^+|x\rangle\langle x|\omega'^+\rangle\langle\omega'^+|\varphi\rangle.$$

Esta última expresión sastiface

$$\langle\Pi_{[R,\infty)}\rangle_{t=0} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty}\langle\Pi_{[R,\infty)}\rangle_t = 1,$$

esto es, la partícula inicialmente localizada en el interior de la barrera se hallará fuera para tiempos muy largos.

Suponiendo que la transición desde cero a uno de $\langle\Pi_{[R,\infty)}\rangle_t$ puede ser dominada por un comportamiento exponencial, usamos la descomposición espectral compleja dada en la ec. (23)

$$\langle\Pi_{[R,\infty)}\rangle_t = 1 - e^{i(\bar{z}_0 - z_0)t}\,\langle\varphi|\tilde{f}_0\rangle\langle\tilde{f}_0|\varphi\rangle \times$$
$$\int_0^R dx\langle f_0|x\rangle\langle x|f_0\rangle -$$
$$\int_\Gamma dz' e^{i(\bar{z}_0 - z')t}\langle\varphi|\tilde{f}_0\rangle\langle\tilde{f}_{z'}|\varphi\rangle \int_0^R dx\langle f_0|x\rangle\langle x|f_{z'}\rangle$$
$$-\int_{\overline{\Gamma}} dz e^{i(z-z_0)t}\langle\varphi|\tilde{f}_z\rangle\langle\tilde{f}_0|\varphi\rangle \int_0^R dx\langle f_z|x\rangle\langle x|f_0\rangle$$
$$-\int_{\overline{\Gamma}} dz \int_\Gamma dz'\, e^{i(z-z')t}\langle\varphi|\tilde{f}_z\rangle\langle\tilde{f}_{z'}|\varphi\rangle \times$$
$$\int_0^R dx\langle f_z|x\rangle\langle x|f_{z'}\rangle.$$

Esta es una expresión bien definida sin términos divergentes como los obtenidos con el procedimiento directo de la sección III.

VI. CONCLUSIONES

Hemos mostrado que existe una estructura matemática para definir los estados de Gamow y ésta resuelve los viejos problemas relacionados con estos objetos. Ellos deben ser descritos por *estados generalizados mezclas*. Con una definición adecuada de "norma" y "energía" podemos demostrar que ambos se anulan para estados de Gamow. Luego ellos no pueden ser considerados como objetos físicos. Esto no constituye un problema siendo que ellos son útiles para la descomposición espectral y luego sus propiedades deben ser válidas sólo sobre bases matemáticas. Esto no es una excepción sino una regla con este tipo de objetos matemáticos, las ondas planas $|\omega\rangle$, por ejemplo, no son objetos físicos siendo que constituyen señales monocromáticas eternas definidas en todo el espacio tridimensional que ciertamente no puede ser producida en el laboratorio. Más aún ellos no pertenecen al espacio de Hilbert sino que son funcionales lineales sobre este espacio. Sin embargo aún siendo objetos no físicos son muy útiles como objetos matemáticos, pues permiten construir la expansión de Fourier de estados físicos. Todas estas propiedades son compartidas por los vectores de Gamow, ellos permiten construir una expansión con un término dominante del tipo exponencial.

[1] G. Gamov, *Z. Phys.* **51**, 204 (1928).

[2] R. G. Lovas, R. J. Liotta, A. Insolia, K. Varga and D. S. Delion, *Physics Reports* **294,** 265 (1998)

[3] P. Curutchet, T. Vertse and R. J. Liotta, *Physical Review C* **39,** 1020 (1989)

[4] O. Civitarese, A. G. Dumrauf, *Physical Review C* **47**, 1060 (1993)

[5] G. García-Calderón, R. Peierls, *Nuclear Physics A* **265**, 443 (1976)
[6] E. Merzbacher, Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, New York, (1970)
[7] L. Khalfin, *JETP* **33**, 1371 (1957)
[8] A. Bohm, M. Gadella, *Dirac kets, Gamow vectors and Gel'fand triplets,* Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, (1989).
[9] T. Berggren, *Nuclear Physics A* **109**, 265 (1968)
[10] W. Romo, *Nuclear Physics A* **116**, 618 (1968)
[11] B. Simon, *Physics Letters* **71A**, 211 (1979)
[12] T. Berggren, *Phys. Lett. B* **373**, 1 (1996)
[13] E. Brandas, N. Elander (Eds), *Resonances,* Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1989).
[14] L. Fonda, G. Ghirardi, A. Rimini, *Prog. Phys.* **41**, 587 (1978)
[15] O. Civitarese, M. Gadella, R. Id Betan, *Nuclear Physics A* **660**, 255 (1999)
[16] I. Antoniou, Z. Suchanecki, R. Laura, S. Tasaki, *Physica A* **241**, 737 (1997)
[17] R. Laura, M. Castagnino, *Phys. Rev. A* **57**, 4140 (1998)
[18] R. Laura, M. Castagnino, R. Id Betan. *Physica A* **271**, 357 (1999)
[19] R. Laura, M. Castagnino, *Phys. Rev. E* **57**, 3948 (1998)
[20] Castagnino, E. Gunzig, R. Laura, Int. Jour. of Theor. Physics, **38**, 2805 (1999)
[21] M. Castagnino, R. Laura, *Functional approach to quantum decoherence and the classical final limit,* to appear in *Phys. Rev. A.*

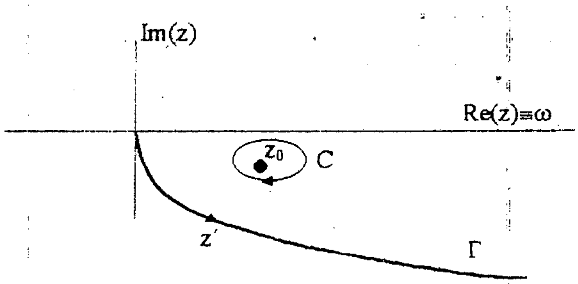

Figura 1