

LA INTEGRAL DE CAMINO PARA LOS OPERADORES DE HUBBARD. FORMALISMO PERTURBATIVO PARA EL CASO FERROMAGNÉTICO BOSÓNICO PURO.

A. Foussats, C.E. Repetto, O.P. Zandron y O.S. Zandron*

Instituto de Física Rosario (IFIR) - Universidad Nacional de Rosario
 Bvrd. 27 de Febrero 210 bis - (2000) - Rosario - Argentina
 e-mail: repetto@ifir.ifir.edu.ar - opz@ifir.ifir.edu.ar

En trabajos previos se construyó una familia de Lagrangianos no polinómicos de primer orden, utilizando como variables de campo los operadores de Hubbard. En el presente trabajo, partiendo de esta familia de Lagrangianos para el caso ferromagnético bosónico puro, y construyendo la función de partición, se muestra que el correspondiente formalismo perturbativo es finito a todo orden. Además, los infinitos que aparecen en el formalismo, son exactamente cancelados mediante la introducción de campos fantasmas. Finalmente, es posible obtener una expresión para el propagador vestido del magnón, y se muestra el ablandamiento en la energía del magnón.

In previous works a family of first order non polynomial Lagrangian is constructed, using the Hubbard operators as fields variables. In the present work, starting from this Lagrangian family for the ferromagnetic boson case and constructing the correlation-generating functional, it is shown that the perturbative formalism is finite at every order. Moreover, the infinities of the formalism by introducing the fields ghost are cancelled. Finally, it is possible to obtain an expression for the dressed magnon propagator, and the softening of the magnon energy is shown.

I. INTRODUCCIÓN

Los operadores X de Hubbard son adecuados para dar un potente marco en el cual puedan ser explicadas las excitaciones elementales en sólidos. El uso de estos operadores es también importante cuando se tienen en cuenta las correlaciones electrónicas⁽¹⁾. Este es el escenario en el cual aparecen los efectos de la superconductividad a alta temperatura crítica (T_c), y es la principal razón por la cual el álgebra de los operadores de Hubbard es de tanto interés en la actualidad.

El álgebra de los operadores X de Hubbard está completamente definida por:

1. Las reglas de conmutación:

$$[\hat{X}_i^{\alpha\beta}, \hat{X}_j^{\gamma\delta}] = \delta_{ij} \delta^{\beta\gamma} \hat{X}_i^{\alpha\delta} - \delta^{\alpha\delta} \hat{X}_i^{\gamma\beta} \quad (1.1)$$

2. La condición de completitud:

$$\hat{X}_i^{++} + \hat{X}_i^{--} = \hat{I} \quad (1.2)$$

3. Las reglas de multiplicación para un dado sitio:

$$\hat{X}_i^{\alpha\beta} \hat{X}_i^{\gamma\delta} = \delta^{\beta\gamma} \hat{X}_i^{\alpha\delta} \quad (1.3)$$

Por simplicidad, consideraremos el caso para el cual los índices α, β sólo pueden tomar los valores $+$ y $-$, y de esta manera los operadores de Hubbard verifican el álgebra $SU(2)$.

Una teoría de muchos cuerpos construida utilizando los operadores de Hubbard como variables de campos, se puede tratar utilizando técnicas de teoría cuántica de campos. Una manera de atacar el problema es a través de la formulación de la integral de camino. Es importante notar que una adecuada formulación de la integral de camino debe ser independiente de una dada representación, y debe poder escribirse en función de una acción efectiva con una dinámica bien definida.

II. FUNCIÓN DE PARTICIÓN, LAGRANGIANO EFECTIVO Y DESARROLLO PERTURBATIVO

En trabajos anteriores⁽²⁻⁵⁾ se analizaron las dinámicas clásica y cuántica para el álgebra $SU(2)$ y para el álgebra general graduada $spl(2,1)$. En ambos casos se encontró una familia de Lagrangianos de primer orden escritos en términos de los operadores de Hubbard X , los cuales son directamente considerados las variables dinámicas de campo que satisfacen el álgebra en consideración. En este contexto, los operadores de Hubbard X son las excitaciones físicas reales.

En el caso bosónico puro, a partir de un Lagrangiano clásico de primer orden se describe el modelo de Heisenberg puro, y se desarrolla el formalismo cuántico perturbativo, empleando técnicas de integral de camino.

Como se sabe, el modelo más importante en la actualidad al tratar electrones fuertemente correlacionados, es el modelo t-J, y es un buen candidato para explicar la superconductividad a altas temperaturas críticas. En el álgebra $spl(2,1)$ está contenida toda la matemática necesaria para este modelo. En Ref. 3 se presenta una nueva discusión sobre la construcción de una familia de Lagrangianos de primer orden que describen la dinámica del modelo t-J. Este sistema dinámico vinculado se trató en el marco del formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw.

En este trabajo consideraremos el caso ferromagnético bosónico puro. Los operadores de Hubbard pueden escribirse en función de las tres componentes del vector de spin \vec{S} . En este caso, la integral de camino euclideanizada resulta:

$$Z = \int \mathcal{D} S_{i1} \mathcal{D} S_{i2} \mathcal{D} S_{i3} \delta(\Omega_i) \det A_i^{1/2} \exp \left(\int_0^\beta d\tau L^E(S) \right) \quad (2.1)$$

donde

$$L^E(S) = \frac{i}{2s} \sum_i \left(\frac{S_{i1} \dot{S}_{i2} - S_{i2} \dot{S}_{i1}}{s + S_{i3}} \right) - \sum_{i,j} J_{ij} S_{i1} S_{j1} + S_{i2} S_{j2} + S_{i3} S_{j3} - s^2 \quad (2.2)$$

con $J > 0$ y el vínculo Ω_i se escribe

$$\Omega_i = S_{i1}^2 + S_{i2}^2 + S_{i3}^2 - s^2 = 0 \quad (2.3)$$

En la ecuación (2.1), A_i es la matriz simpléctica, y como es usual se sube el determinante al exponente usando fantasmas. Llamando $I_4(A) = 4 \det A^{1/2}$ se tiene:

$$I_4 = \int \mathcal{D} \theta_\alpha \exp \left(- \int_0^\beta d\tau \theta^T A \theta \right) \quad (2.4)$$

definiendo

$$L_{ghost,\theta} = \theta^T A \theta \quad (2.5)$$

y donde $\theta_\alpha, \alpha = 1, 2, 3, 4$ son cuatro variables de Grassmann reales. Subiendo el vínculo (2.3) con el multiplicador de Lagrange λ , se obtiene el Lagrangiano total:

$$L = L_{eff}^E + L_{ghost,\theta} \quad (2.6)$$

donde el Lagrangiano efectivo euclideanizado está dado por:

$$L_{eff}^E = \frac{i}{2s} \sum_i \frac{S_{i1} \dot{S}_{i2} - S_{i2} \dot{S}_{i1}}{s + s'} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{S_{i3}}{s + s'} \right)^n \right] - 2s' \sum_i \lambda_i S_{i3} - \sum_i \lambda_i (S_{i1}^2 + S_{i2}^2 + S_{i3}^2) - \frac{J'}{8s^2} \sum_{i,j} [S_{i1} S_{(i+1)j} + S_{i2} S_{(i+1)j} + S_{i3} S_{(i+1)j} - S_{i1}^2 - S_{i2}^2 - S_{i3}^2] \quad (2.7)$$

En la expresión anterior se escribió explícitamente el desarrollo en serie de la parte no polinómica del Lagrangiano (2.2). A partir de este Lagrangiano, se definen el propagador para el campo bosónico extendido $V^a = S_1, S_2, S_3, \lambda$ y los vértices.

La parte bilineal del Lagrangiano (2.7)

$$L^b(V) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_i^a D_{ab}^{-1} V_j^b \quad (2.8)$$

define la matriz inversa D_{ab}^{-1} del propagador asociado al campo bosónico extendido.

Luego, el propagador bosónico desnudo $a \xrightarrow{\omega, q} b$ en el espacio k queda así definido por:

$$D_{(0)}^{ab}(q, \omega_n) = \begin{pmatrix} \frac{2s^2 \omega_q}{\omega_q^2 + \omega_n^2} & \frac{2s^2 \omega_n}{\omega_q^2 + \omega_n^2} & 0 & 0 \\ \frac{-2s^2 \omega_n}{\omega_q^2 + \omega_n^2} & \frac{2s^2 \omega_q}{\omega_q^2 + \omega_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2s} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2s} & \frac{-\omega_q}{8s^4} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

tomando $s = s'$, donde

$$\omega_q = \frac{J'z}{4} 1 - \gamma_q \quad (2.10)$$

y se definió $z\gamma_q = \sum_i \exp iq \cdot I$.

El propagador D_0^+ del magnón ferromagnético resulta:

$$D_0^+ = \langle T S^-(\tau) S^+(0) \rangle = \frac{1}{2} D_0^{11} + D_0^{22} + i D_0^{12} - D_0^{21} = \frac{2s^2}{\omega_q - i\omega_n} \quad (2.11)$$

una función analítica con un polo en $\omega_q > 0$.

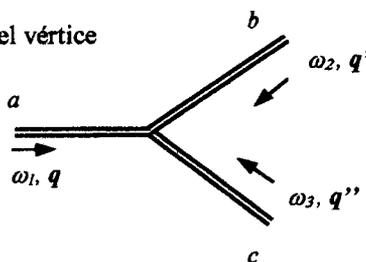
La parte de interacción del Lagrangiano (2.7) se escribe:

$$L_{int} = \frac{-i}{8s^3} \sum_i S_{i1} \dot{S}_{i2} - S_{i2} \dot{S}_{i1} S_{i3} - \sum_i \lambda_i (S_{i1}^2 + S_{i2}^2 + S_{i3}^2) + \frac{i}{4s^2} \sum_i S_{i1} \dot{S}_{i2} - S_{i2} \dot{S}_{i1} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{S_{i3}}{2s} \right)^n \quad (2.12)$$

Después de pasar al espacio k y considerando solamente la interacción de tres bosones, el Lagrangiano de interacción resulta de la forma:

$$L_{int}^{3B} = \frac{1}{3!} F_{abc}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) V^a(\omega_1, q) V^b(\omega_2, q') V^c(\omega_3, q'') \quad (2.13)$$

donde el vértice



se escribe

$$F_{abc}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = - \left[\frac{1}{8s^3} \left[\omega_2 - \omega_1 \delta_a^1 \delta_b^2 - \delta_a^2 \delta_b^1 \delta_c^3 + \omega_3 - \omega_1 \delta_a^1 \delta_c^2 - \delta_a^2 \delta_c^1 \delta_b^3 + \omega_3 - \omega_2 \delta_b^1 \delta_c^2 - \delta_b^2 \delta_c^1 \delta_a^3 \right] + 2 \left[\delta_a^4 \delta_b^1 \delta_c^1 + \delta_b^2 \delta_c^2 + \delta_b^3 \delta_c^3 + \delta_a^4 \delta_b^1 \delta_c^1 + \delta_a^2 \delta_b^2 \delta_c^3 + \delta_a^3 \delta_b^3 \delta_c^3 \right] + \delta_c^4 \delta_a^1 \delta_b^1 + \delta_a^2 \delta_b^2 + \delta_a^3 \delta_b^3 \right] \quad (2.14)$$

A partir de la ecuación (2.5), el Lagrangiano de los campos fantasmas, considerando hasta la interacción de tres campos, se escribe:

$$L_{ghost} = \theta_\alpha^T G^{\alpha\beta} \theta_\beta + \theta_\alpha^T \Gamma_\alpha^{\alpha\beta} V^a \theta_\beta \quad (2.15)$$

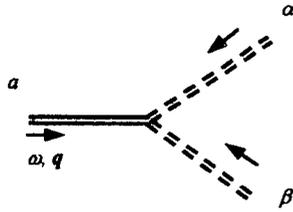
donde:

- el primer término es la parte bilineal en el campo fantasma,
- el segundo término es el vértice de tres patas (1 bosón y 2 fantasmas).

El propagador fantasma $\alpha \xrightarrow{=} \beta$ está definido por la inversa de la matriz $G^{\alpha\beta}$ y resulta:

$$G_{\alpha\beta} = 2s^2 \delta_a^1 \delta_b^2 - \delta_a^2 \delta_b^1 + \frac{1}{2s} \delta_a^3 \delta_b^4 - \delta_a^4 \delta_b^3 \quad (2.16)$$

El vértice de tres patas



proveniente del segundo término del Lagrangiano (2.15) se describe mediante las siguientes tres matrices 4x4 (dado que $\Gamma_4 = 0$):

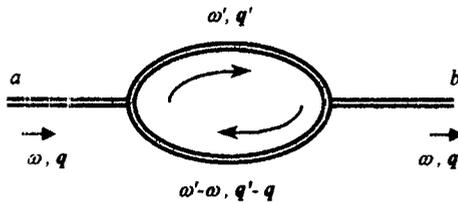
$$\begin{aligned} \Gamma_1^{\alpha\beta} &= -2 \delta_\alpha^1 \delta_\beta^4 - \delta_\alpha^4 \delta_\beta^1 - \frac{1}{8s^3} \delta_\alpha^2 \delta_\beta^3 - \delta_\alpha^3 \delta_\beta^2 \\ \Gamma_2^{\alpha\beta} &= -2 \delta_\alpha^2 \delta_\beta^4 - \delta_\alpha^4 \delta_\beta^2 + \frac{1}{8s^3} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^3 - \delta_\alpha^3 \delta_\beta^1 \\ \Gamma_3^{\alpha\beta} &= -2 \delta_\alpha^3 \delta_\beta^4 - \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 + \frac{1}{4s^3} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 - \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

III. CÁLCULO DE LA AUTOENERGÍA DEL MAGNÓN

Si se consideran únicamente los vértices de tres patas, la autoenergía Π_{ab} está compuesta de cuatro partes:

$$\Pi_{ab} = \Pi_{ab}^{(1)} + \Pi_{ab}^{(2)} + \Pi_{ab}^{(3)} + \Pi_{ab}^{(4)} \quad (3.1)$$

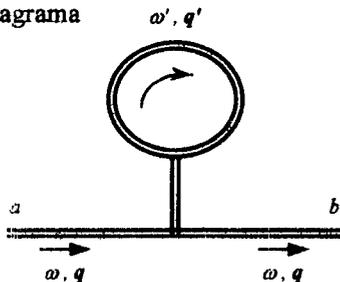
El primer término proveniente del diagrama



cuya expresión es:

$$\Pi_{ab}^{(1)}(\omega, q) = \frac{1}{2N_s} \sum_{\omega', q'} F_{abc}(\omega, \omega') D_{(0)}^{dc}(\omega', q') \cdot F_{abf}(\omega, \omega') D_{(0)}^{fe}(\omega' - \omega, q' - q) \quad (3.2)$$

La parte $\Pi_{ab}^{(2)}$ es la autoenergía correspondiente al siguiente diagrama

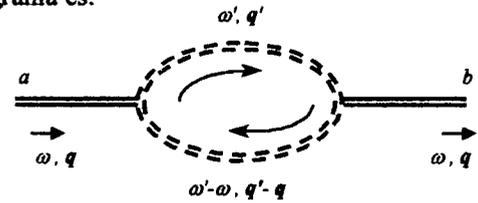


$$\Pi_{ab}^{(2)}(\omega, q) = \frac{1}{2N_s} \sum_{\omega', q'} F_{acb}(\omega) D_{(0)}^{cd}(0) F_{abf}(\omega') D_{(0)}^{fe}(\omega', q') \quad (3.3)$$

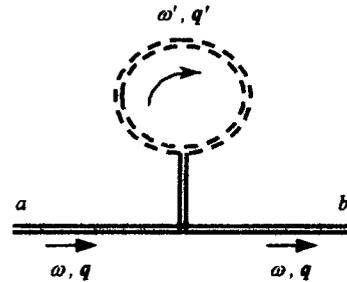
La parte $\Pi_{ab}^{(3)}$ es la autoenergía debida al vértice $\Gamma_a^{\alpha\beta}$ de tres patas (2 fantasmas - 1 bosón) dada por

$$\Pi_{ab}^{(3)}(\omega, q) = \frac{-1}{2N_s} \sum_{\omega', q'} \Gamma_a^{\beta\alpha}(\omega, \omega') \mathcal{G}_{\alpha\gamma}(\omega', q') \cdot \Gamma_b^{\gamma\delta}(\omega, \omega') \mathcal{G}_{\delta\beta}(\omega' - \omega, q' - q) \quad (3.4)$$

cuyo diagrama es:



y la parte $\Pi_{ab}^{(4)}$ es la autoenergía debido al siguiente diagrama



$$\Pi_{ab}^{(4)}(\omega, q) = \frac{-1}{2N_s} \sum_{\omega', q'} F_{abc}(\omega) D_{(0)}^{cd}(0) \Gamma_d^{\beta\alpha}(\omega') \mathcal{G}_{\alpha\beta}(\omega', q') \quad (3.5)$$

Se muestra que las divergencias constantes que aparecen en las ecuaciones anteriores (3.2) y (3.3) correspondientes a los dos primeros gráficos, son iguales y de signo contrario a las divergencias de los gráficos (3.4) y (3.5) de los campos fantasmas, y por lo tanto se cancelan mutuamente.

Se concluye, que las divergencias aparecen sólo a un lazo, y los fantasmas contribuyen para cancelar infinitos. Por lo tanto, la autoenergía del magnón será finita.

IV. PROPAGADOR VESTIDO DEL MAGNÓN

Finalmente, para confrontar los resultados del modelo con los provenientes del tratamiento de onda de spin no lineal⁽⁶⁾, hay que definir el propagador vestido del magnón. Con este propósito hay que calcular la autoenergía asociada al propagador libre del magnón ecuación (2.11), y luego evaluar la corrección a la energía del magnón.

De acuerdo con la ecuación de Dyson, el propagador del magnón vestido $D_{(\nu)}^+$ resulta:

$$D_{(\nu)}^+ = \frac{2s^2}{\omega_q - i\omega_n - 2s^2 P_q(\omega_n)} \quad (4.1)$$

La corrección a la frecuencia ω_q del magnón viene dada por:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega_q) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \Re_s P_q(i\omega_n = \omega_q + i\delta) = \\ &= \frac{4\omega_q}{2s^2 J' 2N_s} \sum_q n_b(\omega_q) \omega_q \end{aligned} \quad (4.2)$$

Finalmente el propagador vestido del magnón se escribe:

$$D_{(\nu)}^+ = \frac{2s^2}{\omega_q - i\omega_n} \quad (4.3)$$

donde $\omega_q^* = \omega_q \left(1 - \frac{4}{J^2} \sum_q \omega_q n_B(\omega_q) \right)$.

Por lo tanto este modelo describe en el orden perturbativo más bajo el efecto del ablandamiento de la energía del magnón^(6,7).

V. CONCLUSIONES

Utilizando como variables de campo los operadores de Hubbard X , donde spin y carga no se desacoplan, es posible construir una teoría vinculada (con vínculos de segunda clase).

La necesaria introducción de campos fantasmas, los cuales tienen un tratamiento simple, permite la cancelación de infinitos y en consecuencia la obtención de un modelo perturbativo finito.

Contrariamente a las teorías desacopladas (representaciones fermión y bosón esclavo) que conducen a modelos vinculados con vínculos de primera clase, el presente formalismo no requiere la introducción de parámetros de calibre.

Finalmente, se puede destacar que este modelo lleva a la correcta expresión del ablandamiento del magnón.

Referencias

- 1- A. Izyumov, Physics - Uspekhi **40**, 445, (1997).
- 2- A. Foussats, A. Greco and O.S. Zandron, Int. J. of Theor. Phys. **38**, 1439-1453, (1999).
- 3- A. Foussats, A. Greco and O.S. Zandron, Ann. Phys. **275**, 238-253, (1999).
- 4- A. Foussats, A. Greco and O.S. Zandron, Ann. Phys. **279**, 263-281, (2000).
- 5- A. Foussats, A. Greco, C.E. Repetto, O.P. Zandron and O.S. Zandron, J. Phys. A: Mth. Gen. **33**, 1-18, (2000).
- 6- D.C. Mattis, "The Theory of Magnetism I", (P. Fulde Ed.), Springer Series in Solid-State Sciences, Vol. 17; Spinger-Verlag, Berlin, (1981).
- 7- R.M. White, "Quantum Theory of Magnetism", (P. Fulde Ed.), Springer Series in Solid-State Sciences, Second Edition, Spinger-Verlag, Berlin, (1983).