

RESOLUCION NUMERICA DEL PENDULO INVERTIDO

Oswaldo Fornaro[†]

IFIMAT: Instituto de Física de Materiales Tandil
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Pinto 399 (B7000GHG) Tandil, Argentina
email: ofornaro@exa.unicen.edu.ar

[†]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

Dadas las coordenadas generalizadas y las ecuaciones de ligadura, es posible derivar las ecuaciones diferenciales de movimiento que definen un sistema mecánico, mediante la aplicación de las ecuaciones de Lagrange o Hamilton. En muchas ocasiones, no es posible integrar fácilmente el sistema de ecuaciones diferenciales resultante y por lo tanto no se puede utilizar expresiones analíticas para describir el movimiento del sistema. En este trabajo se propone utilizar métodos numéricos sencillos (por ejemplo: Runge-Kutta de cuarto orden) como una herramienta adicional en el estudio de sistemas mecánicos. Como ejemplo, se propone el movimiento de un péndulo plano caracterizado por poseer energía mecánica total inicial $E_i = 2mgl$ y cuyo punto de anclaje se desplaza verticalmente siguiendo una función del tiempo $\epsilon \cos \omega t$.

Given the generalized coordinates and constrain equations, it is possible to derive the differential motion equations that define a mechanical system, by using Lagrange or Hamilton equations. However, in many opportunities it is not possible to make a direct integration, and so, it is not possible the use of analytical expressions to describe the problem. In this work, it is proposed to use simple numerical methods (ie: fourth order Runge-Kutta) as a tool in the study of mechanical systems. As an example, it is shown the motion of a pendulum with initial mechanical energy $E_i = 2mgl$, when the pivot is vertically displaced with a time function $\epsilon \cos \omega t$.

I. INTRODUCCION

El movimiento del péndulo plano actuando en un campo gravitatorio uniforme es un caso típico de estudio en la Mecánica Clásica^{1,2} y constituye un ejemplo típico en la introducción a la física no-lineal. Su estudio ha recibido particular atención debido a que la ecuación diferencial que describe el movimiento aparece frecuentemente en diversas ramas de la física moderna y por ello suele utilizarse como modelo sencillo en muchos sistemas físicos^{3,4}.

Un caso de estudio especialmente interesante lo constituye un péndulo cuyo eje de fijación se mueve periódicamente en forma vertical. A este dispositivo se lo conoce como *Péndulo de Kapitza*, ya que fue Pjotr Kapitza uno de los que estudió en detalle en forma experimental el comportamiento de este sistema³.

En este sistema, los parámetros que definen el movimiento son: la frecuencia y amplitud del movimiento del punto de fijación, la energía mecánica inicial y el valor del término disipativo contenido en la ecuación de movimiento. En función de los valores de estos parámetros, el péndulo puede desarrollar una familia de respuestas diferentes, rico en fenómenos no-lineales. Por ejemplo, para $E_i = 2mgl$ y ω correspondiente a la resonancia paramétrica, el movimiento resultante será en una sola dirección. Sin embargo, en cercanías de este valor, puede moverse alrededor del mínimo en movimiento periódico y abruptamente empezar a girar en torno al centro, y luego recomenzar su movimiento periódico alrededor de un mínimo y comenzar a girar nuevamente en el mismo sentido o en el contrario. Con el incremento del rozamiento, los efectos de la resonancia paramétrica pueden desaparecer. Este comportamiento es utilizado como ejemplo de introducción al caos en sistemas mecánicos⁵.

Otra situación interesante aparece cuando el movimiento del punto de sujeción posee frecuencias altas respecto a la frecuencia propia, o amplitudes que no pueden consi-

derarse pequeñas respecto a la longitud l del péndulo. En este caso puede ocurrir la estabilización del movimiento del péndulo en la posición superior.

Dada la complejidad matemática de la ecuación diferencial involucrada, se hace difícil interpretar el movimiento resultante en forma analítica, salvo para algunas condiciones iniciales simples. El objetivo de este trabajo es resolver la ecuación diferencial utilizando un método numérico, para poder simular diferentes condiciones iniciales y verificar la respuesta del sistema para diferentes condiciones iniciales y valores de los parámetros característicos.

II. SISTEMA FISICO

El dispositivo bajo estudio puede verse en la Figura 1. La partícula de masa m está sujeta a la barra rígida l que se supone sin peso y puede girar libremente alrededor del punto O , que además posee un movimiento vertical periódico con una frecuencia ω . Si fijamos nuestro sistema de referencia en la posición media de este desplazamiento, la posición de O estará dada por $\epsilon \cos \omega t$. La fase puede tomarse arbitrariamente nula, ya que no se han fijado aun las condiciones iniciales del movimiento. Dado que ϕ describe el sistema por completo como única coordenada generalizada, la ecuación de Lagrange puede escribirse como^{1,2}:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = f_{\phi} \quad (1)$$

donde $\mathcal{L} = T - V$ es la Lagrangiana del sistema, definida como la diferencia entre la energía cinética y la potencial, mientras que f_{ϕ} representa las fuerzas generalizadas que actúan sobre el sistema y no pueden ser tenidas en cuenta en el potencial V .

La posición de m queda descrita en coordenadas de laboratorio según x , horizontal e y en la dirección vertical. Desarrollando T y V , obtenemos en forma directa:

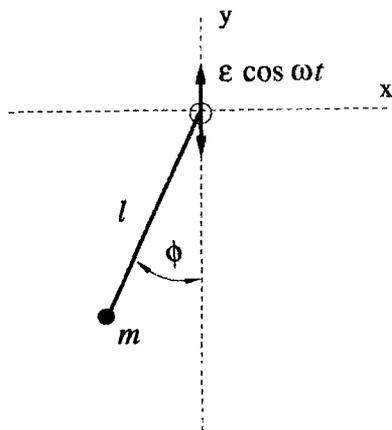


Figura 1: Esquema del movimiento estudiado. Ver el texto por los detalles.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (l\dot{\phi})^2 + \frac{m}{2} \epsilon \omega^2 \sin^2 \omega t - m\epsilon \omega l \dot{\phi} \sin \omega t \sin \phi - mgl \cos \omega t + mgl \cos \phi \quad (2)$$

Aplicando (1) surge la ecuación diferencial de movimiento del sistema:

$$ml^2 \ddot{\phi} + b\dot{\phi} + ml(g - \epsilon \omega^2 \cos \omega t) \sin \phi = 0 \quad (3)$$

o reescrita en forma conveniente

$$\ddot{\phi} + \beta \dot{\phi} + \omega_0^2 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{l} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \cos \omega t \right] \sin \phi = 0 \quad (4)$$

donde se ha utilizado la igualdad $\beta = b/2ml^2$ representando un coeficiente de amortiguamiento y $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ corresponde a la frecuencia propia del péndulo.

Esta ecuación es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden y dado que se quiere obtener la respuesta para valores arbitrarios de la energía, no es posible utilizar la aproximación de pequeña amplitud, $\sin \phi \approx \phi$ para simplificarla¹. Por el mismo motivo no tiene sentido plantear la solución por el método de las perturbaciones o de soluciones sucesivas². La ecuación (4) puede descomponerse en un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \psi \\ \dot{\psi} = -\beta\psi - \omega_0^2 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{l} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \cos \omega t \right] \sin \phi \end{cases} \quad (5)$$

asociado a las condiciones iniciales

$$\begin{cases} \phi(0) = \phi_0 \\ \psi(0) = \dot{\phi}(0) = \psi_0 \end{cases} \quad (6)$$

El sistema (5)-(6) puede resolverse utilizando métodos numéricos sencillos. En este trabajo se propone utilizar el método de Runge-Kutta de cuarto orden para tal fin.

III. IMPLEMENTACION DEL METODO NUMERICO

Dada una función $y' = f(x, y)$, el método de Runge-Kutta de cuarto orden permite calcular iterativamente el valor de la función incógnita y en cada punto del intervalo donde se ha definido la función, a partir del cálculo anterior, por medio de una serie de potencias de la función en el sub-intervalo entre los puntos consecutivos, sin necesidad de calcular realmente las derivadas de la función $f(x, y)$ ^{6,7}

Entonces

$$\begin{aligned} y_0 &= f(0) \\ y_{n+1} &= y_n + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 \end{aligned} \quad (7)$$

donde h es el intervalo en x entre y_{n+1} e y_n , y

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(t, w) \\ K_2 &= hf(t + h/2, w + K_1/2) \\ K_3 &= hf(t + h/2, w + K_2/2) \\ K_4 &= hf(t + h, w + K_3) \end{aligned} \quad (8)$$

Este algoritmo es muy sencillo de programar, ya que se necesita solamente calcular los miembros a derecha de la ecuación (8) en cada paso del cálculo, eligiendo un valor del intervalo h adecuado para minimizar el error⁶, que se mantendrá en un cuarto orden en h .

En nuestro caso, el sistema fue implementado en C estándar utilizando las Librerías Numéricas Meschach⁸ que poseen Licencia de libre utilización con propósitos académicos. El programa fue desarrollado de tal modo que los datos de entrada puedan ser ingresados manualmente sin recompilación del código en cada caso estudiado. Los datos necesarios para cada ejecución son: las condiciones iniciales $\phi(0)$ y $\dot{\phi}(0)$ y los parámetros que caracterizan al sistema: ω (frecuencia de la pulsación externa); ϵ (amplitud de la pulsación) y β (factor de amortiguamiento). En el cálculo se asume $g = 1$ y $l = 1$ y por lo tanto $\omega_0 = 1$. Otros valores que definen la integración son el tiempo inicial y final y el paso de integración h . Cabe destacar que existen numerosas librerías numéricas y programas gratuitos y comerciales, que pueden resolver el sistema (5-6). No es el propósito de este trabajo recopilar dicha información, sino más bien el de utilizar uno de los métodos accesibles para estudiar el sistema físico en cuestión.

IV. DISCUSION DE LOS RESULTADOS

Mediante la utilización del programa desarrollado es posible reproducir el funcionamiento del sistema mecánico de la Figura 1 bajo diferentes situaciones. A continuación se muestran diferentes casos que permiten introducir al estudiante a escenarios más complejos como son las manifestaciones del comportamiento no lineal, bifurcaciones de la solución, e introducción al caos. Así, en el punto A. se comprueba el funcionamiento del programa bajo una situación conocida, dada por energías moderadas y frecuencias de la pulsación $\omega < \omega_0$. En B. C. y D. se muestra la respuesta para la energía inicial $E = 2mgl$ y frecuencias desde $\omega \approx \omega_0$ hasta varias veces su valor, pasando por la resonancia paramétrica. En el punto E. se discute la estabilización

del funcionamiento invertido del péndulo y finalmente en E. se analiza el efecto del coeficiente de rozamiento β sobre la selección del punto de funcionamiento del sistema.

A. PEQUEÑAS AMPLITUDES

En principio se comprobó el funcionamiento del programa para pequeñas amplitudes de la pulsación externa y frecuencias menores que la característica del sistema, $\omega < \omega_0$. Se consideró una energía inicial menor a $2mgl$. El movimiento resultante es la contribución del cuasiperiódico del péndulo en el sistema de referencia no inercial en el que el punto de fijación se mueve con la ley $\varepsilon \cos \omega t$. Para el cálculo se tomó $\omega = 0.5\omega_0$; $\beta = 0.01$; $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \sqrt{g/l} = 1$.

En la Figura 2 se representó el movimiento en el espacio de fases $(\phi, \dot{\phi})$. La órbita en este espacio es una espiral que tiende al centro a medida que la amplitud del péndulo disminuye. Para tiempos muy grandes, m se moverá prácticamente en forma vertical, siguiendo el desplazamiento del pivote. En nuestro caso, se puede observar que la espiral de la Figura 2 se deforma periódicamente por la contribución de la pulsación externa.

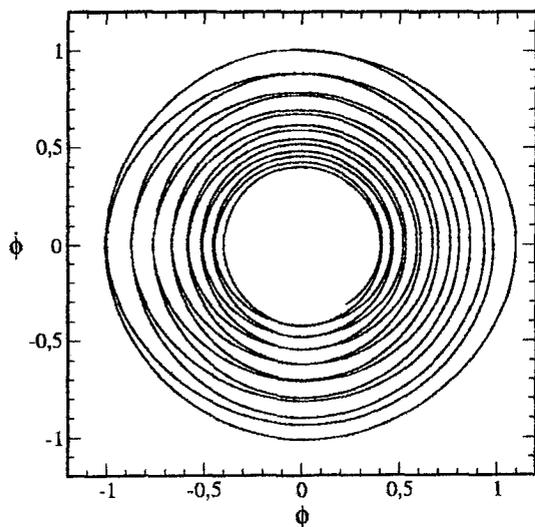


Figura 2: Movimiento resultante con las condiciones $\omega = 0.5 \omega_0$; $\beta = 0.01$; $\phi(0) = 0$; $\dot{\phi}(0) = \sqrt{g/l} = 1$ en el espacio de Fases $(\phi, \dot{\phi})$. La espiral hacia el centro indica que el movimiento es disipativo.

B. ENERGIA INICIAL $E_i = 2mgl$, $\omega \rightarrow \omega_0$

Para interpretar la respuesta del sistema, analicemos primero el caso homogéneo; $\varepsilon = 0$. Si se considera una Energía inicial $E_i = 2mgl$, la partícula m subirá hasta el punto superior, $(\phi = \pi)$, aunque no puede alcanzarlo, debido en principio a que para $\phi = \pi$ el potencial alcanza un máximo local, siendo ésta una situación de equilibrio inestable, pero además de esto el término de amortiguamiento ocasiona

una pérdida de energía mecánica, por lo que la velocidad se anula antes de alcanzar el punto superior. La respuesta para la solución no homogénea, ($\varepsilon > 0$), dependerá del valor que tome $\dot{\phi}$ para $(\phi = \pi)$. De este modo, si $\dot{\phi}$ alcanza el punto superior con velocidad $|\dot{\phi}| > 0$, el péndulo tendrá suficiente energía para pasar por este punto y completar al menos una revolución alrededor del centro. En caso contrario, cambiará de dirección y retornará con dirección al mínimo.

En la Figura 3 a) podemos observar el comportamiento de ϕ en función del tiempo con las condiciones particulares $\omega = \omega_0$; $\beta = 0.01$; $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = 2$. Al comienzo de la simulación, ϕ se aleja de $\phi = 0$, efectuando una revolución alrededor del centro y permaneciendo alrededor del próximo mínimo, $\phi = 2\pi$. En el diagrama de fases de la Figura 3 b) se observa como la partícula se desplaza desde las coordenadas $(\phi = 0, \dot{\phi} = 2)$ hacia la espiral centrada en

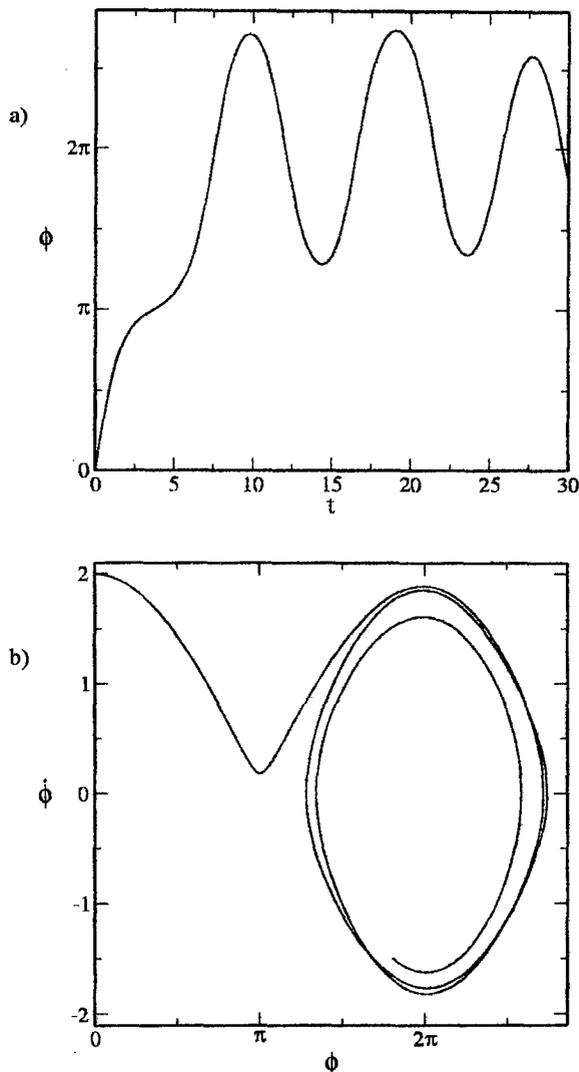


Figura 3: Movimiento resultante con las condiciones $\omega = \omega_0$; $\beta = 0.01$; $\phi(0) = 0$; $\dot{\phi}(0) = 2$. a) $\phi(t)$; b) espacio de Fases $(\phi, \dot{\phi})$. Notar el mínimo alrededor de $\phi = 2\pi$

positiva de ϕ , mientras que cuando existe rozamiento el comportamiento es distinto en ambos casos. La clave del distinto comportamiento está en los valores de velocidad del sistema cuando alcanza un máximo local. Es importante resaltar que no es posible predecir este valor o para que revolución la velocidad no será suficiente para alcanzar el máximo para que el movimiento del péndulo cambie de dirección. La Figura 8 b) muestra una situación similar para $\omega = \omega_0$.

La introducción de esta discusión está motivada en el hipotético análisis de una situación experimental. En un dispositivo mecánico real, pueden aparecer pequeñas variaciones en el coeficiente de rozamiento originadas en cambios de las condiciones experimentales, por ejemplo por la temperatura que adquiere el sistema mecánico en funcionamiento, la viscosidad del lubricante, partículas de polvo en los rodamientos, etc., que pueden dar lugar a una serie

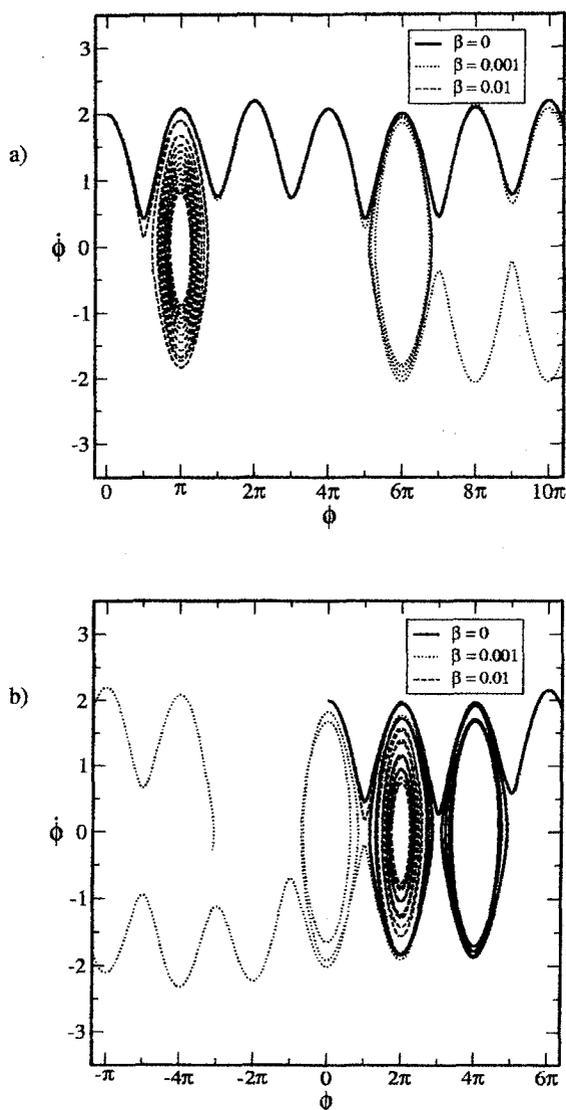


Figura 8: Aparición de distintas soluciones para pequeñas variaciones de β . $\phi(0) = 2(g/l)$; en a) $\omega = 0,9\omega_0$ y b) $\omega = \omega_0$.

de diferentes comportamientos que no podrían explicarse analíticamente ni numéricamente al desconocer exactamente la forma de dicho coeficiente. Sin embargo en este caso, este tipo de cálculo puede ser útil para comprender cualitativamente las observaciones experimentales.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha analizado el movimiento de un péndulo cuyo punto de sujeción se desplaza periódicamente según su eje vertical. Para tal efecto se obtuvo la ecuación diferencial de movimiento y posteriormente se la resolvió numéricamente, utilizando como algoritmo de integración el método de Runge-Kutta de cuarto orden. El programa de cálculo se desarrolló de tal modo que sólo se interactúe con las condiciones iniciales y con las variables que caracterizan el sistema.

En este marco se analizaron diferentes casos de estudio que remarcan las características no lineales del problema, bifurcación de las soluciones frente a pequeñas variaciones de las variables externas e introducción al caos, demostrando que se puede utilizar esta metodología para analizar algunos sistemas donde la complejidad matemática de la solución no permite una solución analítica.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue desarrollado en el IFIMAT: Instituto de Física de Materiales Tandil y fue soportado por CICPBA: Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires, CONICET: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas y SeCyT-UNCPBA: Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

REFERENCIAS

- [1] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica*, Vol. 1: "Mecánica", 2^{da} Ed., Ed. Reverté, España, 1985.
- [2] J. B. Marion, "Dinámica clásica de las partículas y sistemas", Ed. Reverté, España, 1981
- [3] E. Butikov, *Eur. J. Phys.* **20**, 1999, p429.
- [4] E. Butikov, *Am. J. Phys.* **69**, 2001, p755.
- [5] S.-Y. Kim y B. Hu, *Phys. Rev. E* **58**, 1998, p3028.
- [6] W. E. Milne, "Numerical Solution of Differential Equations" 2^{da} Ed. Dover Publications, New York, 1970.
- [7] R. L. Burden y J. D. Faires, "Análisis Numérico". Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1985.
- [8] Centre for Mathematics and its Applications, School of Mathematical Sciences, Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia.