MÉTODO DE FADDEEV-JACKIW APLICADO A LA INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA DE PARTÍCULAS COMPUESTAS EN UN MODELO DE GAUGE NO RELATIVISTA

E. C. Manavella
Instituto de Física Rosario, Bv. 27 de Febrero 210 Bis, Rosario, Argentina
y Departamento de Física (UNR), Av. Pellegrini 250, Rosario, Argentina
e-mail: manavell@ifir.ifir.edu.ar

La generalización supersimétrica del formalismo de cuantificación simpléctico de Faddeev-Jackiw se aplica a un modelo de campos de gauge $U(1)\times U(1)$ no relativista clásico para la interacción electromagnética de partículas compuestas. Este modelo que contiene un campo $U(1)$ de Chern-Simons y el campo $U(1)$ electromagnético puede ser acoplado tanto a un campo de materia bosónica como a uno de materia fermiónica. Explícitamente, se considera el segundo caso, esto es, un sistema de fermiones compuestos en presencia de un campo electromagnético. Finalmente, los resultados son comparados con los obtenidos por medio del formalismo Hamiltoniano de Dirac.

The supersymmetric generalization of the Faddeev-Jackiw symplectic quantization formalism is applied to a classical nonrelativistic $U(1)\times U(1)$ gauge field model for the electromagnetic interaction of composite particles. This model containing a Chern-Simons $U(1)$ field and the electromagnetic $U(1)$ field can be coupled to both a bosonic or a fermionic matter field. Explicitly, the second case, i.e., a composite fermion system in the presence of an electromagnetic field is considered. Finally, the results are compared with those obtained by means of the Dirac Hamiltonian formalism.

I. INTRODUCCIÓN

En Ref. [1] propusimos un modelo de gauge $U(1)\times U(1)$ no relativista clásico para partículas compuestas interactuando con el campo electromagnético en (2+1) dimensiones.

En aquel trabajo, entre otras cosas, realizamos la cuantificación canónica del modelo. Esto fue hecho para el caso de fermiones compuestos (FCs). El modelo bajo consideración fue analizado en el contexto del formalismo de Dirac para sistemas Hamiltonianos vinculados [2, 3].

Además, analizamos, de la misma manera, una versión simplificada del modelo de partida similar a un modelo usado dentro del contexto de la materia condensada.

Un formalismo distinto usado para realizar la cuantificación canónica de sistemas vinculados fue propuesta por Faddeev y Jackiw (FJ) [4].

La generalización supersimétrica del método de cuantificación de FJ incluyendo variables dinámicas de Grassmann fue dado primero en Ref. [5] y fue aplicado en distintos modelos [6, 7].

En Ref. [6], reformulando matemáticamente la generalización supersimétrica del método de cuantificación de FJ se pudo calcular fácilmente la inversa de la supermatriz simpléctica y obtener así ecuaciones generales para los paréntesis graduados de FJ generalizados entre las variables dinámicas.

El propósito de este trabajo es estudiar el modelo de partida propuesto en Ref. [1] con la generalización supersimétrica del método de cuantificación de FJ y comparar los resultados obtenidos con los correspondientes a dicho trabajo.

El artículo está organizado como sigue. En Sec. II, recordamos la formulación matemática de la generalización supersimétrica del método de cuantificación de FJ. Luego, en Sec. III, brevemente sintetizamos las principales características del primer modelo propuesto en Ref. [1] y, usando el procedimiento desarrollado en Sec. II, llevamos a cabo la cuantificación de FJ para un dado conjunto de condiciones de fijado de gauge. Finalmente, en Sec. IV, damos nuestras conclusiones.

II. GENERALIZACIÓN SUPERSIMÉTRICA DEL MÉTODO DE CUANTIFICACIÓN DE FADDEEV-JACKIW

En esta sección, recordamos el formalismo de FJ adecuado al caso de teorías de campos supersimétricas [5, 6].

La densidad Lagrangiana de primer orden más general puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathcal{L}(\Xi, \dot{\Xi}) = \dot{\Xi}^A K_A(\Xi) - \mathcal{V}(\Xi). \tag{2.1}$$

Las funcionales $K_A(\Xi)$ son las componentes de la 1-forma $K(\Xi) = K_A(\Xi) d\Xi^A$ y la funcional $\mathcal{V}(\Xi)$ es el potencial simpléctico. De Ec. (2.1), puede verse que que $\mathcal{V}(\Xi)$ tiene paridad Grassmanniana par y $K_A(\Xi)$ tiene paridad Grassmanniana $|A|$, donde el índice compuesto A toma valores sobre los diferentes rangos del conjunto completo de variables. Las variables de campo dinámicas Ξ^A definen un espacio de configuración extendido construído con el conjunto original de campos más un conjunto de campos auxiliares necesarios para llevar al sistema a su forma de primer orden (2.1).

Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la densidad Lagrangiana (2.1) son

$$(-1)^{|B|}M_{AB}(x,y)\dot{\Xi}^B - \frac{\delta\mathcal{V}(y)}{\delta\Xi^A(x)} = 0. \quad (2.2)$$

Los elementos de la supermatriz simpléctica $M_{AB}(\Xi)$ son las componentes de la 2-forma simpléctica $M(\Xi) = dK(\Xi)$. Esta derivada exterior se expresa como un rotor generalizado escrito con derivadas funcionales

$$M_{AB}(x,y) = \frac{\delta K_B(y)}{\delta\Xi^A(x)} - (-1)^{|A||B|}\frac{\delta K_A(x)}{\delta\Xi^B(y)}. \quad (2.3)$$

De aquí, la paridad Grassmanniana de la supermatriz M_{AB} es $(|A|+|B|)$.

Cuando la supermatriz M_{AB} es no singular, existe la matriz inversa $\left(M^{AB}\right)^{-1}$, esto es, se cumple

$$\int d^2z M_{AB}(x,z)\left(M^{BC}\right)^{-1}(z,y) = \delta^C_A\delta(\vec{x}-\vec{y}). \quad (2.4)$$

De las ecuaciones de movimiento (2.2), obtenemos

$$\dot{\Xi}^A = (-1)^{|A|}\left(M^{AB}\right)^{-1}(x,y)\frac{\delta\mathcal{V}(y)}{\delta\Xi^B(x)}. \quad (2.5)$$

Teniendo en cuenta que el potencial simpléctico es precisamente la densidad Hamiltoniana del sistema, Ec. (2.5) queda

$$\dot{\Xi}^A = \left[\Xi^A(x), \mathcal{V}(y)\right] = \left[\Xi^A(x), \Xi^B(y)\right]\frac{\delta\mathcal{V}(y)}{\delta\Xi^B(x)}. \quad (2.6)$$

De estas dos últimas ecuaciones, encontramos que los paréntesis graduados generalizados vienen dados por (ver Ref. [5])

$$\left[\Xi^A(x), \Xi^B(y)\right] = (-1)^{|A|}\left(M^{AB}\right)^{-1}(x,y). \quad (2.7)$$

Claramente, de Ec. (2.4), la paridad Grassmann de la supermatriz $\left(M^{AB}\right)^{-1}$ es $(|A|+|B|)$.

Es fácil mostrar que los paréntesis (2.7) son iguales a los paréntesis de Dirac graduados de la teoría [5, 8].

Por otro lado, en las teorías de campo invariantes de gauge, además de los verdaderos grados de libertad dinámicos existen también grados de libertad de gauge y la supermatriz M_{AB} es singular.

En este caso, consideramos que el conjunto de las variables de campo se particiona en la forma $\Xi^A = (\varphi^a\,,\chi^p)$ y el conjunto de las componentes de la 1-forma K_A en la forma $K_A = (k_a\,, l_p = 0)$.

El índice compuesto A toma los valores $A = (a,p)$, donde $A = 1,...,N; a = 1,...,n; p = 1,...,m (m < N)$.

Se tiene lo siguiente:

(i) $\varphi^a(x)$ es el conjunto original de variables de campo dinámicas simplécticas cuyo término cinético tiene coeficiente distinto de cero k_a. En esta definición, incluímos también todas las otras variables de campo cuyo coeficiente k_a podría ser generado adicionando al Lagrangiano una derivada total con respecto al tiempo. De aquí en adelante, estas variables serán llamadas variables de campo simplécticas no singulares, y así la subsupermatriz simpléctica cuadrada asociada $\bar{M}_{ab}$ de la supermatriz simpléctica (2.3) es no singular.

(ii) χ^p es el conjunto original de variables de campo dinámicas simplécticas sin el correspondiente término cinético en el Lagrangiano puesto que $l_p = 0$. De aquí en adelante, serán llamadas variables de campo simplécticas singulares.

Así, la densidad Lagrangiana (2.1) puede ser escrita

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{\varphi}^a k_a(\varphi) - \mathcal{V}^{(0)}, \quad (2.8)$$

donde $\mathcal{V}^{(0)} = \mathcal{V}$, y la supermatriz simpléctica (2.3) queda

$$M^{(0)}_{AB} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

En esta situación, existen m modos cero por izquierda (o derecha) $\mathbf{v}_{\mathcal{I}}$ $(\mathcal{I} = 1,...,m)$ de la supermatriz $M^{(0)}_{AB}$, donde cada $\mathbf{v}_{\mathcal{I}}$ es un supervector columna con N componentes $v^A_{\mathcal{I}}$. Así, los modos cero verifican la siguiente ecuación:

$$v^A_{\mathcal{I}}(\vec{x},t)\int d^2y M_{AB}(\vec{x},\vec{y},t) = 0, \quad (2.10)$$

donde $A, B = 1,...,N$.

De Ec. (2.2), luego de la multiplicación por izquierda por los modos cero $v^A_{\mathcal{I}}$ de la supermatriz singular, podemos obtener los vínculos $\Phi_{\mathcal{I}}$ (de paridad de Grassmann $|\mathcal{I}|$):

$$\Phi_{\mathcal{I}}(x) = v^A_{\mathcal{I}}(\vec{x},t)\int d^2y \frac{\delta}{\delta\Xi^A(\vec{x},t)}\mathcal{V}(\vec{y},t) = 0. \quad (2.11)$$

Estos vínculos son introducidos en la densidad Lagrangiana por medio de adecuados multiplicadores de Lagrange $\lambda^{\mathcal{I}}$ de paridad de Grassmann $|\mathcal{I}|$:

$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}^a k_a(\varphi) - \lambda^{\mathcal{I}}\Phi_{\mathcal{I}} - \mathcal{V}(\Xi). \quad (2.12)$$

En esta situación, podemos aplicar el algoritmo de FJ una vez más, agrandando el espacio de configuración considerando el conjunto de variables de campo $\Xi^A = \left(\varphi^a\,,\chi^p,\xi^{\mathcal{I}}\right)$ y para las componentes de la 1-forma K_A podemos escribir $K_A = (k_a\,, l_p = 0, \Phi_{\mathcal{I}})$. Esto se hace redefiniendo las variables $\lambda^{\mathcal{I}}$ como

$$\lambda^{\mathcal{I}} = -\dot{\xi}^{\mathcal{I}}. \quad (2.13)$$

Ahora, el índice compuesto A toma los valores $A = (a,p,\mathcal{I})$, donde $A = 1,...,N; a = 1,...,n; p,\mathcal{I} = 1,...,m$.

Así, la densidad Lagrangiana en primera iteración se escribe

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{\varphi}^a k_a(\varphi) + \dot{\xi}^{\mathcal{I}}\Phi_{\mathcal{I}}(\varphi,\chi) - \mathcal{V}^{(1)}(\Xi), \quad (2.14)$$

donde el nuevo potencial simpléctico es por definición $\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}|_{\Phi_{\mathcal{I}}=0}$.

En términos del nuevo conjunto de variables dinámicas, la supermatriz simpléctica en notación compacta se escribe como

$$M^{(1)}_{AB} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab} & M_{a\Sigma} \\ -(-1)^{|\Lambda||b|}M_{\Lambda b} & M_{\Lambda\Sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

donde $\bar{M}_{ab}$, como dijimos, es una subsupermatriz cuadrada $n \times n$ no singular, construída del conjunto simpléctico inicial de variables de campo, la subsupermatriz rectangular $M_{a\Sigma}$ tiene n filas y $2m$ columnas y $M_{\Lambda\Sigma}$ es una $2m \times 2m$ subsupermatriz cuadrada.

En notación compacta, las matrices $M_{a\Sigma}$ y $M_{\Lambda\Sigma}$, respectivamente, quedan

$$M_{a\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta\Phi_{\mathcal{J}}(y)}{\delta\varphi^a(x)} \end{pmatrix}, \tag{2.16a}$$

$$M_{\Lambda\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta\Phi_{\mathcal{J}}(y)}{\delta\chi^p(x)} \\ -(-1)^{|\mathcal{I}||q|}\frac{\delta\Phi_{\mathcal{I}}(x)}{\delta\chi^q(y)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16b}$$

Cuando la supermatriz (2.15) es singular, el algoritmo de FJ debe ser repetido hasta que todos los modos cero no ortogonales hayan sido eliminados. En cada paso iterativo, el espacio de configuración se agranda y la supermatriz simpléctica se modifica.

En esta situación, la supermatriz simpléctica $M_{AB}^{(k)}(x,y)$ tiene una forma general dada en Ecs. (2.15) y (2.16), pero ésta tiene una dimensión mayor. Cuando no son generados nuevos vínculos, el procedimiento iterativo finaliza.

Como ocurre en las teorías invariantes de gauge, una vez que el procedimiento iterativo finaliza, la supermatriz simpléctica permanece aún singular.

Con el propósito de obtener una supermatriz no singular, debemos adicionar términos de fijado de gauge a la densidad Lagrangiana, los cuales rompen las simetrías de gauge dando lugar así a los paréntesis graduados de FJ generalizados en tal gauge particular.

Supongamos que la inversa de la supermatriz simpléctica $M_{AB}^{(k)}$ existe y puede ser escrita como

$$\left[M^{(k)AB}\right]^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} A^{ab}(x,y) & B^{a\Sigma}(x,y) \\ C^{\Lambda b}(x,y) & D^{\Lambda\Sigma}(x,y) \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

donde la supermatriz funcional

$$D^{\Lambda\Sigma} = \begin{pmatrix} D^{pq} & D^{p\mathcal{J}} \\ D^{\mathcal{I}q} & D^{\mathcal{I}\mathcal{J}} \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Usando Ecs. (2.15), (2.16) y (2.17) en Ec. (2.4), obtenemos

$$\begin{aligned} A^{ab}(x,y) = \left(\bar{M}^{ab}\right)^{-1}(x,y) - (-1)^{|d||\mathcal{J}|}\int d^2z d^2w \\ \times \left[\int d^2u \left(\bar{M}^{ac}\right)^{-1}(x,u)\frac{\delta\Phi_{\mathcal{I}}(z)}{\delta\varphi^c(u)}\right] \\ \times \left[\int d^2v \left(\bar{M}^{db}\right)^{-1}(v,y)\frac{\delta\Phi_{\mathcal{J}}(w)}{\delta\varphi^d(v)}\right] \\ \times D^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(z,w), \end{aligned} \tag{2.19a}$$

$$\begin{aligned} B^{a\Sigma}(x,y) = -\int d^2z d^2u \left(\bar{M}^{ab}\right)^{-1}(x,u)\frac{\delta\Phi_{\mathcal{I}}(z)}{\delta\varphi^b(u)} \\ \times D^{\mathcal{I}\Sigma}(z,y), \end{aligned} \tag{2.19b}$$

$$\begin{aligned} C^{\Lambda b}(x,y) = (-1)^{|a||\mathcal{J}|}\int d^2z d^2u \left(\bar{M}^{ab}\right)^{-1}(u,y) \\ \times \frac{\delta\Phi_{\mathcal{J}}(z)}{\delta\varphi^a(u)} D^{\Lambda\mathcal{J}}(x,z), \end{aligned} \tag{2.19c}$$

$$\int d^2z \Phi_{\Lambda\Theta}(x,z) D^{\Theta\Sigma}(z,y) = \delta_\Lambda^\Sigma \delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{2.20}$$

donde los elementos de matriz de la supermatriz funcional $\Phi_{\Lambda\Sigma}(x,y)$, inversa de la supermatriz $D^{\Lambda\Sigma}(x,y)$, se obtienen de las ecuaciones

$$\Phi_{pq}(x,y) = 0, \tag{2.21a}$$

$$\Phi_{p\mathcal{J}}(x,y) = \frac{\delta\Phi_{\mathcal{J}}(y)}{\delta\chi^p(x)}, \tag{2.21b}$$

$$\Phi_{\mathcal{I}q}(x,y) = -(-1)^{|\mathcal{I}||q|}\frac{\delta\Phi_{\mathcal{I}}(x)}{\delta\chi^q(y)}, \tag{2.21c}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{I}\mathcal{J}}(x,y) = (-1)^{|\mathcal{I}||a|}\int d^2u d^2v \frac{\delta\Phi_{\mathcal{I}}(x)}{\delta\varphi^a(u)}\left(\bar{M}^{ab}\right)^{-1}(u,v) \\ \times \frac{\delta\Phi_{\mathcal{J}}(y)}{\delta\varphi^b(v)}. \end{aligned} \tag{2.21d}$$

Finalmente, de Ecs. (2.7), (2.17), (2.18) y (2.19), los paréntesis de FJ graduados generalizados pueden ser calculados y se escriben como siguen [6] :

$$\begin{aligned} \left[\varphi^a(x), \varphi^b(y)\right] &= (-1)^{|a|}\left(\bar{M}^{ab}\right)^{-1}(x,y) \\ &\quad -(-1)^{|a|+|d||\mathcal{J}|}\int d^2z d^2w \\ &\quad \times \left[\int d^2u \left(\bar{M}^{ac}\right)^{-1}(x,u)\frac{\delta\Phi_{\mathcal{I}}(z)}{\delta\varphi^c(u)}\right] \\ &\quad \times \left[\int d^2v \left(\bar{M}^{db}\right)^{-1}(v,y)\frac{\delta\Phi_{\mathcal{J}}(w)}{\delta\varphi^d(v)}\right] \\ &\quad \times D^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(z,w), \end{aligned} \tag{2.22a}$$

$$\begin{aligned} \left[\varphi^a(x), \chi^q(y)\right] &= -(-1)^{|a|}\int d^2z d^2u \left(\bar{M}^{ab}\right)^{-1}(x,u) \\ &\quad \times \frac{\delta\Phi_{\mathcal{I}}(z)}{\delta\varphi^b(u)} D^{\mathcal{I}q}(z,y), \end{aligned} \tag{2.22b}$$

$$\left[\chi^p(x), \chi^q(y)\right] = (-1)^{|p|} D^{pq}(x,y). \tag{2.22c}$$

III. CUANTIFICACIÓN DE FADDEEV-JACKIW DE MODELOS DE PARTÍCULAS COMPUESTAS

Vamos a considerar una teoría de campos no relativista clásica con simetría de gauge $U(1) \times U(1)$ para la interacción electromagnética de partículas compuestas en (2+1) dimensiones. En particular, analizaremos un sistema de FCs. Consideraremos que este sistema puede ser descripto por la siguiente densidad Lagrangiana singular [1] :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cf}^{em} + \mathcal{L}_{em}, \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{L}_{cf}^{em}$ se escribe como

$$\mathcal{L}_{cf}^{em} = i\,\psi^\dagger \mathcal{D}_0\psi + \frac{1}{2m_b}\,\psi^\dagger\,\vec{\mathcal{D}}^2\psi - \mu\,\psi^\dagger\,\psi + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho}\,a_\mu\partial_\nu a_\rho \tag{3.2a}$$

y $\mathcal{L}_{em}$ es

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.2b}$$

En Ecs. (3.2), los índices griegos toman los valores $\mu,\nu,\rho = 0,1,2$.

Empleamos unidades donde $\hbar = c = 1$. La métrica Minkowskiana es $g_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1)$ y $\varepsilon^{012} = \varepsilon^{12} = 1$.

En Ec. (3.2a), la derivada covariante, que involucra tanto al campo de gauge $U(1)$ de Chern-Simons a_μ como al campo de gauge $U(1)$ electromagnético A_μ, se escribe como $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ia_\mu - ieA_\mu$ y llamamos $\vec{\mathcal{D}}^2 = \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2$. El campo de materia ψ es un campo espinorial cargado describiendo FCs. La carga del electrón se toma como $-e$. m_b es la masa de banda de los electrones. μ es el potencial químico para los mismos. $\tilde{\phi}$ es la intensidad del tubo de flujo, en unidades del cuanto de flujo 2π. (La carga ficticia de cada partícula que interactúa con el campo de gauge ficticio ha sido elegida como de intensidad uno.)

Un sistema de bosones compuestos puede ser considerado según estas mismas líneas, la única diferencia es que, en este caso, el campo de materia es un campo escalar cargado.

Usando la expresión para la derivada covariante, podemos reescribir Ec. (3.2a) como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cf}^{em} &= i\,\frac{\tau+1}{2}\,\psi^\dagger\,\partial_0\psi + i\,\frac{\tau-1}{2}\,\partial_0\psi^\dagger\,\psi \\ &+\psi^\dagger\,(a_0+eA_0)\,\psi + \frac{1}{2m_b}\,\psi^\dagger\,\vec{\mathcal{D}}^2\psi - \mu\,\psi^\dagger\,\psi \\ &+\frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho}\,a_\mu\,\partial_\nu a_\rho.\end{aligned} \tag{3.3}$$

En Ec. (3.3), el término fermiónico cinético está escrito en la forma general usando el parámetro arbitrario τ, lo cual es la manera usual de obtener expresiones simétricas para los momentos canónicamente conjugados correspondientes a los campos de materia $\psi^\dagger$ y ψ [3].

Ahora, procederemos a realizar la cuantificación canónica del modelo en base al método de FJ.

Así, el punto de partida es escribir la densidad Lagrangiana (3.1) en la forma de primer orden (2.1) introduciendo como variables dinámicas las componentes del momento conjugado canónico P^μ del campo de gauge A_μ como sigue:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{a}_i k_a^i + \dot{A}_i k_A^i + \dot{\psi} k_\psi + \dot{\psi}^\dagger k_{\psi^\dagger} - \mathcal{V}^{(0)}, \tag{3.4}$$

donde $i = 1,2$ es un índice espacial.

La densidad de potencial simpléctico $\mathcal{V}^{(0)}$ está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{(0)} &= -\frac{1}{2\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_0\partial_i a_j + \frac{1}{2}P^iP_i + \partial_i A_0 P^i \\ &+\frac{1}{4}F_{ij}\,(A)\,F^{ij}\,(A) + \mu\psi^\dagger\psi - \psi^\dagger\,(a_0+eA_0)\,\psi \\ &-\frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\,\vec{\mathcal{D}}^2\psi,\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $P^i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{A}_i$, y los coeficientes en la parte simpléctica de (3.4) son

$$k_a^i = \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_j, \tag{3.6a}$$

$$k_A^i = P^i, \tag{3.6b}$$

$$k_{\psi_\alpha} = -i\frac{\tau+1}{2}\psi_\alpha^\dagger, \tag{3.6c}$$

$$k_{\psi_\alpha^\dagger} = i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha, \tag{3.6d}$$

$$l_{a_0} = 0, \tag{3.6e}$$

$$l_{A_0} = 0. \tag{3.6f}$$

Por esto, el conjunto inicial de variables de campo simplécticas que definen el espacio de configuración extendido del sistema dinámico está dado por $(a_\mu, A_\mu, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha)$. En este caso, la supermatriz simpléctica singular 12×12 $M_{AB}^{(0)}(x,y)$, cuyos elementos matriciales fueron escritos en Ec. (2.3), toma la forma

$$M_{AB}^{(0)}(x,y) = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

De acuerdo a la definición de variables no singulares simplécticas dada en Sec. II, podrían ser generados coeficientes k_i para las variables de campo P^i. Así, en Ec. (3.7), la subsupermatriz 10×10 no singular que llamamos $\bar{M}^{(0)}$ se construye del conjunto simpléctico inicial de variables de campo no singulares $(a_i, A_i, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha)$ y está dada por

$$\bar{M}^{(0)}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\delta_{\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 0 & -i\delta_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \times\delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{3.8}$$

Usando Ec. (2.10), puede ser visto que de acuerdo a las dos variables simplécticas singulares a_0 y A_0, la matriz (3.7) tiene dos modos cero.

De esta manera, calculando los vínculos mediante Ecs. (2.11), encontramos

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi\phi}\varepsilon^{ij}\,\partial_i a_j + \psi^\dagger\psi = 0, \tag{3.9a}$$

$$\Phi_2 = \partial_i P^i + e\psi^\dagger\psi = 0. \tag{3.9b}$$

Ecuaciones (3.9a,b) son precisamente las componentes temporales de las ecuaciones de movimiento para los campos a_μ y A_μ, respectivamente.

Ahora, debemos llevar a cabo el primer paso iterativo, y así la expresión para la correspondiente densidad Lagrangiana en primera iteración es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)} = {} & \dot{a}_i k_a^i + \dot{A}_i k_A^i + \dot{\psi} k_\psi + \dot{\psi}^\dagger k_{\psi^\dagger} + \dot{\xi}^1 \Phi_1^1 + \dot{\xi}^3 \Phi_3^1 \\ & -\mathcal{V}^{(1)},\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde $\mathcal{V}^{(1)}$ está definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}^{(0)}|_{\Phi_1^1=\Phi_3^1=0} = {} & \frac{1}{2}P^i P_i + \frac{1}{4}F_{ij}\,(A)\,F^{ij}\,(A) \\ & +\mu\psi^\dagger\psi - \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\vec{\mathcal{D}}^2\psi.\end{aligned} \tag{3.11}$$

El espacio de configuración extendido está ahora definido por el siguiente conjunto de variables: $(a_i, A_i, P^i, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha, a_0, A_0, \xi^1, \xi^3)$.

Usando Ecs. (2.15) y (2.16), calculamos la supermatriz simpléctica modificada $M_{AB}^{(1)}$, obtenida después de la primera iteración

$$M_{AB}^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab}^{(0)} & N \\ -N^T & O \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

donde T indica transposición, O es la matriz nula 4×4 y N es la matriz 10×4 dada por

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2\pi\phi}\varepsilon^{ij}\partial_j(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_i(x) \\ 0 & 0 & \psi_\alpha & e\psi_\alpha \\ 0 & 0 & -\psi_\alpha^\dagger & -e\psi_\alpha^\dagger \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{3.13}$$

Con el propósito de evaluar $sdetM_{AB}^{(1)}$, es conveniente reescribir la supermatriz $M_{AB}^{(1)}$ en la forma estándar reagrupando sus elementos matriciales. Por esto, escribimos

$$M_{AB}^{(1)}(x,y) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

cuyas partes Bose-Bose 10×10 A y Fermi-Fermi 4×4 D son elementos pares de un álgebra de Grassmann, y cuyas partes Bose-Fermi 10×4 B y Fermi-Bose 4×10 C son elementos impares, y están dadas, respectivamente, por

$$A = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_i(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_i(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{3.15a}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\psi_\alpha & \psi_\alpha^\dagger \\ -e\psi_\alpha & e\psi_\alpha^\dagger \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{3.15b}$$

$$C = -B^T, \tag{3.15c}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -i\delta_{ij} \\ -i\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{3.15d}$$

donde $f = -\frac{1}{2\pi\phi}\varepsilon^{ij}$ y $g = \frac{1}{2\pi\phi}\varepsilon^{ij}\partial_j(x)$.

El superdeterminante de la supermatriz (3.14) es [9]

$$\begin{aligned} sdetM_{AB}^{(1)} &= detAdet^{-1}(D - CA^{-1}B) \\ &= det^{-1}Adet(A - BD^{-1}C) = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Por esto, $M_{AB}^{(1)}$ es singular.

Así, la matriz simpléctica modificada obtenida después de que la primera iteración es completada es nuevamente singular. Como puede ser visto de Ec. (2.10), existen cuatro nuevos modos cero asociados a la matriz (3.12).

Consecuentemente, usando una vez más Ec. (2.11) para la densidad de potencial simpléctico $\mathcal{V}(y,t) = \mathcal{V}^{(1)}(y,t)$, debemos buscar nuevos vínculos. Es fácil probar que no aparecen nuevos vínculos.

En esta situación, el procedimiento iterativo finaliza. Como estamos tratando con una teoría de gauge, la matriz simpléctica final es singular. Como fue mencionado en Sec. II, la invertibilidad de la supermatriz $\Phi_{\Lambda\Sigma}$, y por esto la invertibilidad de la supermatriz simpléctica completa, es realizada rompiendo la simetría en el potencial simpléctico.

Esto puede hacerse mediante un término de fijado de gauge adicionado a la densidad Lagrangiana. La situación más simple es considerar las siguientes condiciones de fijado de gauge para los campos a_μ y A_μ :

$$\Theta_1 = a_0 = 0, \tag{3.17a}$$

$$\Theta_2 = \partial^i a_i = 0, \tag{3.17b}$$

$$\Theta_3 = \nabla^2 A_0 - \partial_i P^i = 0, \tag{3.17c}$$

$$\Theta_4 = \partial^i A_i = 0. \tag{3.17d}$$

Aplicando el conjunto de condiciones dadas por Ecs. (3.17a,c) no obtenemos la requerida supermatriz no singular $M_{AB}^{(k)}$. Lo mismo ocurre con el conjunto de condiciones dadas por Ecs. (3.17b,d) (gauge de Coulomb).

Consecuentemente, el conjunto de vínculos que debemos tener en cuenta para calcular los elementos de matriz graduados $\Phi_{\Lambda\Sigma}(x,y)$ está constituído por Ecs. (3.9) y (3.17). Usando Ecs. (2.21), encontramos que la matriz 8×8 $\Phi_{\Lambda\Sigma}(x,y)$ puede ser escrita en la forma

$$\Phi_{\Lambda\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -h \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.18}$$

donde $h = \nabla^2(x)$. Esta matriz es no singular.

De esta manera, la matriz 8×8 $D_{\Lambda\Sigma}(x,y)$ definida en Ec. (2.20), necesaria para calcular los paréntesis graduados de FJ generalizados en el gauge dado por Ecs. (3.17), es ahora fácilmente encontrada y está dada por

$$D_{\Lambda\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u & 0 & 0 & 0 & -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

donde $u = (4\pi|\vec{x} - \vec{y}|)^{-1}$ y $v = \delta(\vec{x} - \vec{y})$.

Ahora, usando Ecs. (2.22), los paréntesis graduados de FJ generalizados entre las variables de campo en el gauge (3.17) que hemos encontrado son campo-campo:

$$[a_1(x), a_2(y)] = 2\pi\tilde{\phi}\delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.20a}$$

$$[\psi_\alpha^\dagger(x), \psi_\beta(y)] = -i\,\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.20b}$$

campo-momento:

$$[A_i(x), P^j(y)] = \delta_i^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{1}{4\pi}\partial_i(x)\partial^j(x)\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \tag{3.20c}$$

con todos los otros paréntesis graduados nulos.

Los paréntesis (3.20) coinciden con los paréntesis de Dirac graduados obtenidos en Ref. [1], como era de esperar.

Una vez que son encontrados los paréntesis de FJ graduados (3.20), la transición a la teoría cuántica se realiza en la forma habitual.

IV. CONCLUSIONES

Partiendo de un modelo de gauge $U(1) \times U(1)$ no relativista clásico para partículas compuestas interactuando con el campo electromagnético en (2+1) dimensiones, fue llevada a cabo la cuantificación canónica. Esto fue hecho para el caso de FCs. El modelo bajo consideración fue analizado en el contexto de la generalización supersimétrica del formalismo de FJ.

En el caso analizado, el número de vínculos es menor que el correspondiente a Ref. [1] usando el procedimiento de Dirac.

En este caso, los paréntesis graduados generalizados fueron encontrados quitando la singularidad en la supermatriz simpléctica. Esto fue hecho adicionando un término de fijado de gauge en el potencial simpléctico.

El método analizado permite encontrar los vínculos y los paréntesis nombrados en forma más rápida que en el procedimiento de Dirac, esto es debido en parte al menor número de vínculos involucrados en el presente formalismo.

Finalmente, los paréntesis citados son iguales a aquéllos obtenidos por medio del formalismo de Dirac, como era de esperar.

REFERENCIAS

[1] E. C. Manavella, Int. J. Theor. Phys. **40**, 1453 (2001).

[2] P. A. M. Dirac (Can. J. Math. **2**, 129, 1950); *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University Press, New York, 1964).

[3] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics* (Springer-Verlag, 1982).

[4] L. Faddeev and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. **60**, 1692 (1988).

[5] J. Govaerts, Int. J. Mod. Phys. A **5**, 3625 (1990).

[6] A. Foussats, C. Repetto, O. P. Zandron, and O. S. Zandron, Ann. Phys. (NY) **268**, 225 (1998).

[7] A. Foussats, C. Repetto, O. P. Zandron, and O. S. Zandron, Class. Quantum Grav. **14**, 269 (1997); Int. J. Theor. Phys. **36**, 55 (1997); Int. J. Theor. Phys. **36**, 2923 (1997); E. C. Manavella, C. E. Repetto, and O. P. Zandron, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1837 (1999).

[8] M. V. E. Costa and H. O. Girotti, Phys. Rev. Lett. **60**, 1771 (1988).

[9] B. DeWitt, *Supermanifolds* (Cambridge: Cambridge University Press, 1984).