IMPLEMENTACIÓN DEL FORMALISMO DE FADDEEV-JACKIW A UN MODELO DE PARTÍCULAS COMPUESTAS CON APLICACIONES EN MATERIA CONDENSADA

E. C. Manavella
Instituto de Física Rosario, Bv. 27 de Febrero 210 Bis, Rosario, Argentina
y Departamento de Física (UNR), Av. Pellegrini 250, Rosario, Argentina
e-mail: manavell@ifir.ifir.edu.ar

Se considera un modelo de campos de gauge $U(1)\times U(1)$ no relativista clásico para la interacción electromagnética de partículas compuestas y se lleva a cabo la cuantificación canónica en base a la generalización supersimétrica del formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw. Este modelo está relacionado a uno conocido en el campo de la materia condensada. Explícitamente, se dan los resultados para un sistema de fermiones compuestos. Finalmente, estos resultados son comparados con los obtenidos por medio del formalismo Hamiltoniano de Dirac.

A classical nonrelativistic $U(1)\times U(1)$ gauge field model for the electromagnetic interaction of composite particles is considered and the canonical quantization by means of the supersymmetric generalization of the Faddeev-Jackiw symplectic formalism is carried out. This model is related to a known one in the field of condensed matter. Explicitly, the results for a composite fermion system are given. Finally, these results are compared with those obtained by means of the Dirac Hamiltonian formalism.

I. INTRODUCCIÓN

En Ref. [1] mediante la generalización supersimétrica del método de cuantificación de Faddeev-Jackiw (FJ) se procedió a realizar la cuantificación canónica de uno de los modelos analizados en Ref. [2], para un dado conjunto de condiciones de fijado de gauge. Luego, se compararon los resultados con los correspondientes a Ref. [2], en donde se utilizó el método de cuantificación de Dirac para sistemas Hamiltonianos vinculados [3].

El propósito de este trabajo es estudiar similarmente el segundo modelo considerado en Ref. [2].

El artículo está organizado como sigue. En Sec. II, recordamos las principales fórmulas correspondientes a la generalización supersimétrica del método de cuantificación de FJ. Luego, en Sec. III, brevemente sintetizamos las principales características del segundo modelo usado en Ref. [2] y, usando lo desarrollado en Sec. II, llevamos a cabo la cuantificación de FJ. Finalmente, en Sec. IV, damos nuestras conclusiones.

II. GENERALIZACIÓN SUPERSIMÉTRICA DEL MÉTODO DE CUANTIFICACIÓN DE FADDEEV-JACKIW

En esta sección, escribiremos solamente las fórmulas del formalismo de FJ adecuado a teorías de campos supersimétricas necesarias para desarrollar el presente artículo. Una síntesis de dicho formalismo puede verse en Ref. [1].

La densidad Lagrangiana de primer orden más general puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathcal{L}(\Xi,\dot{\Xi}) = \dot{\Xi}^A K_A(\Xi) - \mathcal{V}(\Xi). \tag{2.1}$$

Las funcionales $K_A(\Xi)$ son las componentes de la 1-forma $K(\Xi) = K_A(\Xi)d\Xi^A$ y la funcional $\mathcal{V}(\Xi)$ es el potencial simpléctico. El índice compuesto A toma valores sobre los diferentes rangos del conjunto completo de variables. Las variables de campo dinámicas Ξ^A definen un espacio de configuración extendido construído con el conjunto original de campos más un conjunto de campos auxiliares necesarios para llevar al sistema a su forma de primer orden (2.1).

Los elementos de la supermatriz simpléctica $M_{AB}(\Xi)$ están dados por

$$M_{AB}(x,y) = \frac{\delta K_B(y)}{\delta \Xi^A(x)} - (-1)^{|A||B|}\frac{\delta K_A(x)}{\delta \Xi^B(y)} . \tag{2.2}$$

La densidad Lagrangiana (2.1) puede escribirse

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{\varphi}^a k_a(\varphi) - \mathcal{V}^{(0)}, \tag{2.3}$$

donde $\mathcal{V}^{(0)} = \mathcal{V}$ y $\varphi^a(x)$ es el conjunto original de variables de campo dinámicas simplécticas cuyo término cinético tiene coeficiente distinto de cero k_a.

La supermatriz simpléctica (2.2) queda

$$M_{AB}^{(0)} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

donde $\bar{M}_{ab}$ es la subsupermatriz simpléctica cuadrada asociada no singular.

Los vínculos $\Phi_{\mathcal{I}}$ en el formalismo de FJ están dados por

$$\Phi_{\mathcal{I}}(x) = v_{\mathcal{I}}^A(\vec{x},t)\int d^2y \frac{\delta}{\delta\Xi^A(\vec{x},t)}\mathcal{V}(\vec{y},t) = 0, \tag{2.5}$$

donde $\mathcal{I} = 1,...,m$ y $v_{\mathcal{I}}^A$ son las componentes de los modos cero por izquierda (o derecha) $\mathbf{v}_{\mathcal{I}}$ de la supermatriz $M_{AB}^{(0)}$.

Estos vínculos son introducidos en la densidad Lagrangiana por medio de adecuados multiplicadores de Lagrange $\lambda^{\mathcal{I}}$:

$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}^a k_a(\varphi) - \lambda^{\mathcal{I}} \Phi_{\mathcal{I}} - \mathcal{V}(\Xi). \qquad (2.6)$$

En esta situación, podemos aplicar el algoritmo de FJ una vez más, agrandando el espacio de configuración considerando el conjunto de variables de campo $\Xi^A = (\varphi^a, \chi^p, \xi^{\mathcal{I}})$ y para las componentes de la 1-forma K_A podemos escribir $K_A = (k_a, l_p = 0, \Phi_{\mathcal{I}})$. Esto se hace redefiniendo las variables $\lambda^{\mathcal{I}}$ como

$$\lambda^{\mathcal{I}} = -\dot{\xi}^{\mathcal{I}}. \qquad (2.7)$$

Ahora, el índice compuesto A toma los valores $A = (a, p, \mathcal{I})$, donde $A = 1, ..., N; a = 1, ..., n; p, \mathcal{I} = 1, ..., m$.

Así, la densidad Lagrangiana en primera iteración se escribe

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{\varphi}^a k_a(\varphi) + \dot{\xi}^{\mathcal{I}} \Phi_{\mathcal{I}}(\varphi, \chi) - \mathcal{V}^{(1)}(\Xi), \qquad (2.8)$$

donde el nuevo potencial simpléctico es por definición $\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}|_{\Phi_{\mathcal{I}}=0}$.

En términos del nuevo conjunto de variables dinámicas, la supermatriz simpléctica en notación compacta se escribe como

$$M^{(1)}_{AB} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ab} & M_{a\Sigma} \\ -(-1)^{|\Lambda||b|} M_{\Lambda b} & M_{\Lambda\Sigma} \end{pmatrix}, \qquad (2.9)$$

donde $\bar{M}_{ab}$, como dijimos, es una subsupermatriz cuadrada $n \times n$ no singular, construída del conjunto simpléctico inicial de variables de campo, la subsupermatriz rectangular $M_{a\Sigma}$ tiene n filas y $2m$ columnas y $M_{\Lambda\Sigma}$ es una $2m \times 2m$ subsupermatriz cuadrada.

En notación compacta, las matrices $M_{a\Sigma}$ y $M_{\Lambda\Sigma}$, respectivamente, quedan

$$M_{a\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta\Phi_{\mathcal{J}}(y)}{\delta\varphi^a(x)} \end{pmatrix}, \qquad (2.10a)$$

$$M_{\Lambda\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta\Phi_{\mathcal{J}}(y)}{\delta\chi^p(x)} \\ -(-1)^{|\mathcal{I}||q|}\frac{\delta\Phi_{\mathcal{I}}(x)}{\delta\chi^q(y)} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.10b)$$

III. CUANTIFICACIÓN DE FADDEEV-JACKIW DE UN MODELO SIMPLE

Ahora, consideramos la siguiente densidad Lagrangiana singular [2] :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger \partial_0 \psi + i\frac{\tau-1}{2}\partial_0\psi^\dagger\psi - \mu\psi^\dagger\psi + \psi^\dagger a_0 \psi \\ & + \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger \vec{\mathcal{D}}^2 \psi + \frac{1}{2\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij} a_0 \partial_i a_j, \end{aligned} \qquad (3.1)$$

donde $i, j = 1, 2$.

Empleamos unidades donde $\hbar = c = 1$. La métrica de Minkowski es $g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1); \mu, \nu = 0, 1, 2$ y $\varepsilon^{012} = \varepsilon^{12} = 1$.

En Ec. (3.1), a_μ es un campo de tipo Chern-Simons y A_μ es el campo electromagnético. El campo de materia ψ es un campo espinorial cargado que describe fermiones compuestos. La carga del electrón se toma como $-e$. m_b es la masa de banda de los electrones. μ es el potencial químico para los mismos. $\tilde{\phi}$ es la intensidad del tubo de flujo, en unidades del cuanto de flujo 2π. (La carga ficticia de cada partícula que interactúa con el campo de gauge ficticio ha sido elegida como de intensidad uno.)

Un sistema de bosones compuestos puede ser considerado según estos mismos argumentos, la única diferencia es que, en este caso, el campo de materia es un campo escalar cargado.

La densidad Lagrangiana (3.1) se la obtuvo quitando algunos términos de la densidad Lagrangiana correspondiente a Ref. [1] y es esencialmente aquélla considerada por Halperin et al. [4] .

La densidad Lagrangiana (3.1) puede ser escrita en la forma de primer orden (2.3) como

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{\psi} k_\psi + \dot{\psi}^\dagger k_{\psi^\dagger} - \mathcal{V}^{(0)}, \qquad (3.2)$$

donde $i = 1, 2$.

La densidad de potencial simpléctico $\mathcal{V}^{(0)}$ está dada por

$$\mathcal{V}^{(0)} = -\frac{1}{2\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij} a_0 \partial_i a_j + \mu\psi^\dagger\psi - \psi^\dagger a_0 \psi - \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger \vec{\mathcal{D}}^2 \psi, \qquad (3.3)$$

donde los coeficientes en la parte simpléctica de (3.2) son

$$k_{\psi_\alpha} = -i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger_\alpha, \qquad (3.4a)$$

$$k_{\psi^\dagger_\alpha} = i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha, \qquad (3.4b)$$

$$l_{a_\mu} = 0, \qquad (3.4c)$$

$$l_{A_i} = 0. \qquad (3.4d)$$

Por esto, el conjunto inicial de variables de campo simplécticas que definen el espacio de configuración extendido del sistema dinámico está dado por $(a_\mu, A_i, \psi^\dagger_\alpha, \psi_\alpha)$. En este caso, la supermatriz simpléctica singular $M^{(0)}_{AB}(x,y)$, cuyos elementos de matriz fueron escritos en Ec. (2.4), toma la forma

$$M^{(0)}_{AB}(x,y) = \begin{pmatrix} \bar{M}^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

donde la matriz 4×4 no singular que llamamos $\bar{M}^{(0)}$ se construye del conjunto de variables de campo no singulares $(\psi^\dagger_\alpha, \psi_\alpha)$ y está dada por

$$\bar{M}^{(0)}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -i\delta_{\alpha\beta} \\ -i\delta_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \qquad (3.6)$$

De Ec. (3.5), puede ser visto que de acuerdo a las cinco variables simplécticas singulares a_μ y A_i, existen cinco modos cero.

De esta manera, calculando los vínculos mediante Ec. (2.5), encontramos

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi\bar{\phi}}\varepsilon^{ij}\,\partial_i a_j + \psi^\dagger\psi = 0, \tag{3.7a}$$

$$\Phi_2^i = \varepsilon^{ij}\,\partial_j a_0 = 0, \tag{3.7b}$$

$$\Phi_3^i = \psi^\dagger\,(i\partial_i + a_i + eA_i)\,\psi = 0, \tag{3.7c}$$

donde $i, j = 1, 2$.

Ahora, llevando a cabo el primer paso iterativo, la expresión para la correspondiente densidad Lagrangiana es, de (2.8)

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{\psi}k_\psi + \dot{\psi}^\dagger k_{\psi^\dagger} + \dot{\xi}^1\Phi_1^1 + \dot{\xi}_i^2\Phi_2^{1i} + \dot{\xi}_i^3\Phi_3^{1i} - \mathcal{V}^{(1)}, \tag{3.8}$$

donde $\mathcal{V}^{(1)}$ está definida por

$$\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}^{(0)}|_{\Phi_1^1=\Phi_2^{1i}=\Phi_3^{1i}=0} = \mu\psi^\dagger\psi + \frac{1}{2m_b}\psi^\dagger\partial_k\partial^k\psi - \frac{i}{2m_b}\psi^\dagger\left[\left(\partial_k a^k + e\partial_k A^k\right) + \left(a^k + eA^k\right)\partial_k\right]\psi. \tag{3.9}$$

El espacio de configuración extendido está ahora definido por el siguiente conjunto de variables: $\left(\psi_\alpha^\dagger, \psi_\alpha, a_\mu, A_i, \xi^1, \xi_i^2, \xi_i^3\right)$.

Usando Ecs. (2.9) y (2.10), calculamos la supermatriz simpléctica modificada $M_{AB}^{(1)}$, obtenida después de la primera iteración. Esta supermatriz en la forma canónica se escribe

$$M_{AB}^{(1)}(x,y) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i\,\delta_{\alpha\beta} \\ -i\,\delta_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{3.11a}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_\alpha & 0 & 0 & \theta_{\alpha k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\psi_\alpha^\dagger & 0 & 0 & -\theta_{\alpha k}^\dagger \end{pmatrix}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{3.11b}$$

$$C = -B^T, \tag{3.11c}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e\delta_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} & -e\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\theta\delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{3.11d}$$

donde $\theta_{\alpha k} = (i\partial_k + a_k + eA_k)\,\psi_\alpha, B^T$ es la matriz transpuesta de B y $\theta = \psi^\dagger\psi$.

El superdeterminante de la supermatriz (3.10) es [5]

$$\begin{aligned} sdetM_{AB}^{(1)} &= detAdet^{-1}(D - CA^{-1}B) \\ &= det^{-1}Adet(A - BD^{-1}C) = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por esto, $M_{AB}^{(1)}$ es singular.

En forma directa, puede ser mostrado que esta supermatriz tiene seis nuevos modos cero.

Así, usando Ec. (2.5) para la densidad de potencial simpléctico $\mathcal{V}(y,t) = \mathcal{V}^{(1)}(y,t)$, debemos buscar nuevos vínculos. Es fácil probar que no aparecen nuevos vínculos.

En esta situación, el procedimiento iterativo finaliza.

IV. CONCLUSIONES

Partiendo de un modelo de gauge $U(1) \times U(1)$ no relativista clásico para partículas compuestas interactuando con el campo electromagnético en (2+1) dimensiones, fue llevada a cabo la cuantificación canónica. Esto fue hecho para el caso de fermiones compuestos. El modelo bajo consideración es similar a uno usado dentro del contexto de la materia condensada y fue analizado en el contexto de la generalización supersimétrica del formalismo de cuantificación de FJ.

En el modelo considerado, el número de vínculos es menor que el correspondiente a Ref. [2] usando el procedimiento de Dirac.

El método analizado permite encontrar los vínculos en forma más rápida que en el método de Dirac, esto es debido en parte al menor número de vínculos involucrados en el presente formalismo.

REFERENCIAS

[1] E. C. Manavella, *Método de Faddeev-Jackiw Aplicado a la Interacción Electromagnética de Partículas Compuestas en un Modelo de Gauge No Relativista*. En este volumen.

[2] E. C. Manavella, Int. J. Theor. Phys. **40**, 1453 (2001).

[3] P. A. M. Dirac (Can. J. Math. **2**, 129, 1950); *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University Press, New York, 1964); K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics* (Springer-Verlag, 1982).

[4] B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, Phys. Rev. B **47**, 7312 (1993).

[5] B. DeWitt, *Supermanifolds* (Cambridge: Cambridge University Press, 1984).