

Derrames de fluidos no Newtonianos sobre una superficie plana no horizontal

Carlos Alberto Perazzo¹ and Julio Gratton^{2,*}

¹Universidad Favaloro, Solís 459, 1078, Buenos Aires, Argentina

²INFIP Conicet, Dpto. de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pab. I, Buenos Aires, Argentina.

En este trabajo se deducen las ecuaciones que describen el derrame de un fluido no Newtoniano sobre una superficie plana inclinada, bajo la aproximación de lubricación. Se presentan dos familias de soluciones del tipo onda viajera, una que se desplaza cuesta abajo y la otra cuesta arriba. Se analizan casos límites de pequeña y gran inclinación.

In this work the governing equations of the creeping flow of a non-Newtonian liquid on an incline are derived within the lubrication approximation. Two families of traveling wave solutions are presented: one of them running downslope, and the other running upslope. The limiting cases of gentle slope and steep slope are analyzed.

I. INTRODUCCIÓN

Una buena cantidad de esfuerzos teóricos, numéricos y experimentales han sido dirigidos a estudiar el flujo de fluidos lentos viscosos bajo la acción de la gravedad. En [1] se establecieron las ecuaciones que gobiernan el derrame de fluidos Newtonianos sobre una superficie plana horizontal, y este caso fue estudiado experimentalmente en [1, 2], y numéricamente en [3]. En [4], se dedujeron las ecuaciones para el mismo caso pero para fluidos no Newtonianos. Las ecuaciones para el derrame sobre superficies inclinadas fueron obtenidas en [5], y una gran cantidad de trabajos fueron hechos al respecto (ver [6] y las referencias allí), pero todos ellos contemplan sólo fluidos con reología Newtoniana. En este trabajo se deducen las ecuaciones que gobiernan el derrame de fluidos *no Newtonianos* sobre una superficie plana no horizontal dentro de la aproximación de lubricación, y se discuten sus limitaciones y propiedades.

II. ECUACIONES BÁSICAS

Sea un fluido que derrama sobre una superficie plana inclinada que forma un ángulo $\alpha > 0$ con la horizontal. La coordenada z es perpendicular al plano, y la coordenada x creciente cuesta abajo. Indicaremos con w y u las respectivas componentes de la velocidad. Sea $h \equiv h(x, t)$ la superficie libre del fluido, y L una longitud característica de la corriente paralela a la dirección del plano. Como primera hipótesis supondremos que:

$$h \ll L \quad (1)$$

Asumiremos que el término inercial es despreciable frente al de esfuerzos. Luego, la ecuación de conservación del momento lineal en las direcciones perpendicular y

paralela al plano y la de continuidad resultan:

$$0 = -\partial_x p + \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} + \rho g \sin \alpha \quad (2)$$

$$0 = -\partial_z p + \partial_x \tau_{zx} + \partial_z \tau_{zz} - \rho g \cos \alpha \quad (3)$$

$$0 = \partial_x u + \partial_z w \quad (4)$$

donde ρ es la densidad del fluido, g es la aceleración de la gravedad, y τ es el tensor de esfuerzos. Supondremos que la reología es del tipo ley de potencia y está dada por

$$\tau_{ij} = AE^{(1-\lambda)/\lambda} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (5)$$

$$E = (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2} \quad (6)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad (7)$$

con A y λ constantes positivas. El caso Newtoniano se recupera tomando $\lambda = 1$, y la viscosidad será $A/2$.

Sean U y W velocidades características en las direcciones x y z respectivamente, de modo que $|u| \sim U$ y $|w| \sim W$. De (1) y (4) resulta de inmediato que

$$W \sim U \frac{h}{L} \ll U \quad (8)$$

de modo que el flujo será predominantemente en la dirección paralela al plano. A partir de aquí y de las ecuaciones (5), (6) y (7), es posible deducir que $|\partial_x \tau_{xx}| \ll |\partial_z \tau_{zz}|$. Esto permite simplificar la ecuación (2):

$$0 = -\partial_x p + \partial_z \tau_{xz} + \rho g \sin \alpha \quad (9)$$

Esta ecuación nos posibilita conocer el orden de magnitud de la presión, y de aquí el de $\partial_z p$:

$$|\partial_z p| \sim AE^{(1-\lambda)/\lambda} \frac{U}{L^2} \left(\frac{L}{h}\right)^3 \quad (10)$$

Dado que

$$|\partial_x \tau_{zx}| \sim |\partial_z \tau_{zz}| \sim AE^{(1-\lambda)/\lambda} \frac{U}{L^2} \frac{L}{h} \quad (11)$$

se concluye que $|\partial_z p| \gg |\partial_x \tau_{zx} + \partial_z \tau_{zz}|$ por lo que la ecuación (3) resulta simplificada a:

$$0 = -\partial_z p - \rho g \cos \alpha \quad (12)$$

*Electronic address: jgratton@infip.lfp.uba.ar

Integrando (12) e imponiendo que $p(x, z = h) = 0$ se obtiene

$$p = \rho g \cos \alpha (h - z) \quad (13)$$

que nos dice que la presión es hidrostática. Ahora reemplazando esta última ecuación junto con las definiciones (5), (6) y (7) en la ecuación (9) se llega a:

$$\partial_z(|\partial_z u|^{1/\lambda}) = K \sigma (\partial_x h \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (14)$$

donde $K \equiv A^{-1} \rho g 2^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}$ y $\sigma = \text{sign}(\partial_z u)$.

La ecuación (14) junto con las condiciones de contorno $u(x, z = 0) = 0$ (no slip) y $\partial_z u(x, z = h) = 0$ (esfuerzo tangencial nulo en la superficie libre) puede integrarse obteniéndose (los subíndices x y t indican derivación)

$$u = \sigma [K \sigma (\sin \alpha - h_x \cos \alpha)]^{\lambda} \frac{h^{\lambda+1}}{\lambda+1} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\lambda+1} \right] \quad (15)$$

Nótese que para arribar a esta ecuación debe verificarse

$$\sigma = 1 \Leftrightarrow h_x < \tan \alpha, \text{ ó } \sigma = -1 \Leftrightarrow h_x > \tan \alpha \quad (16)$$

Si definimos \bar{u} como u promediado en la dirección z se obtiene

$$\bar{u} = \sigma k [\sigma (\sin \alpha - h_x \cos \alpha)]^{\lambda} h^{\lambda+1} \quad (17)$$

donde $k \equiv K^{\lambda}/(\lambda+2) > 0$. Si bien σ fue definido como el signo de u_z , de esta última ecuación es claro que además $\sigma = \text{sign}(\bar{u})$. Ahora se puede interpretar el significado de la condición (16): la dirección del flujo en un dado lugar está determinada por la inclinación que en ese lugar tiene la superficie libre. Donde la pendiente de la superficie libre es positiva medida respecto de la horizontal (no respecto del eje x), el flujo es cuesta arriba ($\sigma = -1$), y donde es negativa el flujo es cuesta abajo ($\sigma = 1$).

La ecuación de conservación de la masa puede ahora ser planteada en términos de h y \bar{u} como

$$h_t + (\bar{u}h)_x = 0 \quad (18)$$

Finalmente, de (17) y (18) se obtiene la ecuación que gobierna el derrame de fluidos con reología tipo ley de potencia sobre una superficie inclinada

$$h_t + \sigma k \left\{ [\sigma (\sin \alpha - h_x \cos \alpha)]^{\lambda} h^{\lambda+2} \right\}_x = 0 \quad (19)$$

Nótese que es una ecuación en derivadas parciales altamente no lineal, y que el grado de no linealidad depende de λ . En el caso más simple que el fluido es Newtoniano y que la superficie sobre la que se derrama es horizontal dicha ecuación sigue siendo no lineal.

III. ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES

En este punto analizaremos las limitaciones impuestas al flujo al despreciar el término inercial frente al de

gradiente de esfuerzos. No es difícil deducir que

$$(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \sim \frac{U^2}{L} (1, 0, \frac{h}{L}) \quad \frac{1}{\rho} \nabla \bar{\tau} \sim \frac{AU^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}}{\rho h^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}} (1, 0, \frac{h}{L}) \quad (20)$$

de modo que dicha hipótesis implica

$$\frac{U^{2-\frac{\lambda}{\lambda+1}} h^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}}{\rho A} \left(\frac{h}{L}\right) \ll 1 \quad (21)$$

Notemos que, dado que $h \ll L$, el número adimensional

$$Re = \frac{U^{2-\frac{\lambda}{\lambda+1}} h^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}}{\rho A} \quad (22)$$

que es la generalización del número de Reynolds para el tipo de reología supuesta en este trabajo, puede ser del orden de 1 o incluso mayor.

De la Ec. (18) podemos estimar la escala de tiempo T en la que h sufre cambios: $T \sim \frac{L}{U}$. Por lo tanto podemos estimar el orden de magnitud de $\partial_t \bar{v}$, que también hemos supuesto despreciable:

$$\partial_t \bar{v} \sim \frac{U^2}{L} (1, 0, \frac{h}{L}) \quad (23)$$

Vemos que es comparable al término inercial, por lo que el cumplimiento de la condición (21) asegura que efectivamente es despreciable frente al términos de esfuerzos.

El grado de complejidad de la Ec. (19) dificulta la obtención de soluciones. Sin embargo, resulta sencillo obtener soluciones estacionarias. Una de ellas es

$$h = \begin{cases} (x - x_0) \tan \alpha & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{si } x < x_0 \end{cases} \quad \bar{u} = 0 \quad (24)$$

que sencillamente representa un fluido en reposo ($\bar{u} = 0$) con su superficie libre horizontal. Otra solución estacionaria es

$$h = h_0 = cte \quad (25)$$

$$\bar{u} = k (\sin \alpha)^{\lambda} h_0^{\lambda+1} \quad (26)$$

que representa un fluido con su superficie libre plana y paralela al plano inclinado, y que escurre por éste con una velocidad uniforme \bar{u} .

Las soluciones de (19) pueden presentar frentes cuya posición indicaremos como x_f , tal que h es diferente de cero sólo si $x < x_f$ (este es un frente a derecha, puede tener además uno a izquierda, o a ambos lados). Aceptando que $h \rightarrow 0$ si $x \rightarrow x_f$, inspeccionando la Ec. (17) se puede ver que existen dos posibilidades respecto de la velocidad del frente v_f en este límite. O bien $v_f \rightarrow 0$, o $\partial_x h \rightarrow \pm \infty$ de modo tal que v_f es diferente de cero, por lo que $\bar{u} \propto (\partial_x h)^{\lambda} h^{\lambda+1}$. Luego, la forma del perfil en las proximidades de un frente que avanza

$$h \propto |x - x_f|^{\frac{\lambda}{2\lambda+1}} \quad (27)$$

Esta forma del frente es la misma que se obtiene para el caso de derrame sobre un plano horizontal [4].

Para hallar soluciones del tipo onda viajera, supongamos que h sólo depende de la variable $y \equiv x - ct$ con $c = \text{cte.}$. En este caso, la ecuación (19) puede ser integrada una vez y se obtiene

$$h' = \tan \alpha - \frac{\sigma}{\cos \alpha} \left[\frac{\sigma(c_1 + ch)}{kh^{\lambda+2}} \right]^{1/\lambda} \quad (28)$$

donde la prima indica derivada respecto de y , y c_1 es una constante de integración. En el caso $c_1 = 0$ se puede obtener una solución implícita

$$h - h_2 F_1 \left(\mu, 1; \mu + 1; \sigma \sin \alpha \left(\frac{k}{|c|} \right)^{\frac{1}{\lambda}} h^{\frac{1}{\lambda}} \right) = y \tan \alpha \quad (29)$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica y $\mu = \lambda/(\lambda+1)$. Haciendo un desarrollo en series, vemos que si $h \rightarrow 0$, la ecuación (29) lleva a

$$h = \left(-\frac{\sigma(2\lambda+1)|c|^{1/\lambda}}{\lambda \cos \alpha k^{1/\lambda}} y \right)^{\lambda/(2\lambda+1)} \quad (30)$$

que coincide con la expresión dada en (27). Obsérvese que si $\sigma = 1$ ($c > 0$) debe ser $y \leq 0$, y si $\sigma = -1$ ($c < 0$) entonces debe ser $y \geq 0$. Por otra parte, si $\sigma = 1$ entonces h debe ser menor al h_0 definido en (26) tomando $\bar{u} = |c|$, y $y \rightarrow -\infty$ cuando $h \rightarrow h_0$. Pero, si $\sigma = -1$, en el límite $h \rightarrow \infty$ la función hipergeométrica tiende a 0, entonces resulta $h = y \tan \alpha$. Vemos así que hemos obtenido dos familias de soluciones del tipo onda viajera: una que viaja cuesta abajo con un frente en $y = 0$ dado por la ecuación (30), y que se extiende hasta $y = -\infty$ tendiendo en este límite a la solución dada por (26); la otra viaja cuesta arriba, también con un frente en $y = 0$ dado por (30), pero que se extiende hasta $y = +\infty$ y tendiendo en este límite a la horizontal. En la Fig. 1 se muestran algunas de estas soluciones.

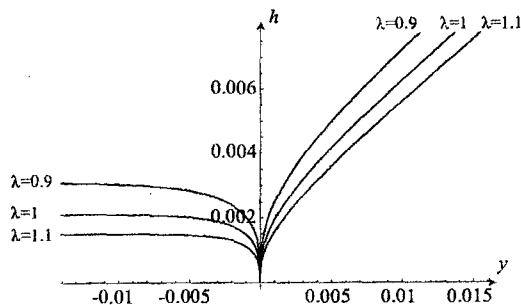


Figura 1: Soluciones del tipo onda viajera. Los valores de α , A y ρ son los mismos que en la Fig. 2, y $|c| = 1 \text{ m/s}$. En $y \leq 0$ se pueden observar las ondas viajeras que se desplazan cuesta abajo, y las que se desplazan cuesta arriba en $y \geq 0$.

IV. APROXIMACIÓN DE PEQUEÑA INCLINACIÓN

Si en la ecuación (19) se supone que $\tan \alpha \ll |h_x|$ obtenemos

$$h_t + k(\cos \alpha)^\lambda \sigma [(-\sigma h_x)^\lambda h^{\lambda+2}]_x = 0 \quad (31)$$

que es equivalente a la ecuación obtenida en [4] reescalando g como $g \cos \alpha$. Notese que esta condición es muy restrictiva, ya que $|h_x| \sim h/L \ll 1$, por lo que la ecuación (19) se reduce a (31) para valores de α que verifiquen $\tan \alpha \ll h/L \ll 1$. La ecuación (31) es una ecuación de difusión no lineal (aún en el caso $\lambda = 1$).

V. APROXIMACIÓN DE GRAN INCLINACIÓN

Si en la ecuación (19) se supone que

$$\tan \alpha \gg |h_x| \quad (32)$$

se obtiene:

$$h_t + k(\sin \alpha)^\lambda (h^{\lambda+2})_x = 0 \quad (33)$$

que es la generalización a fluidos no Newtonianos de la ecuación dada en [5]. Obsérvese que (32) implica, de acuerdo a (16), que $\sigma = 1$. Esto significa que la Ec. (33) sólo puede describir corrientes que fluyen cuesta abajo.

La Ec. (33) admite una expresión simple aunque implícita para sus soluciones. Si $f(x) = h(x, t = 0)$ es el perfil inicial, la solución de (33) resulta

$$h = f(x - k(\sin \alpha)^\lambda (\lambda + 2) h^{\lambda+1} t) \quad (34)$$

Esta expresión tiene la forma de una ecuación de onda, en la que h depende sólo de la variable $x - ct$, donde $c > 0$ es la velocidad de propagación de la onda, pero siendo c una función creciente de h . Es decir que las regiones donde h es más grande se desplazan con mayor velocidad. Más precisamente, si a un dado tiempo en $x = x_1$ es $h = h_1$, entonces un intervalo de tiempo Δt más tarde resultará que $h = h_1$ en $x = x_1 + k(\sin \alpha)^\lambda (\lambda + 2) h^{\lambda+1} \Delta t$. De aquí se deduce que, donde h_x es positiva, disminuirá pero será siempre positiva, y donde es negativa habrá un particular valor de t y un particular valor de x donde la derivada se vuelva infinita; a partir de ese instante la solución será multivaluada. También es fácil ver que los ceros de h no se desplazan. Todas estas observaciones se pueden apreciar en la Fig (2). El perfil inicial fue elegido de modo que verifique la condición (32), pero con el transcurso del tiempo en aquellas zonas donde el perfil inicial tiene derivada negativa tal condición deja de ser verificada, por lo que la ecuación (33) deja de ser una buena aproximación de (19) (lo contrario ocurre donde la derivada es inicialmente positiva). Resulta razonable esperar que al adquirir importancia el término despreciado para llegar a (33), su efecto difusivo contrarreste la tendencia que tiene (33) a desarrollar singularidades.

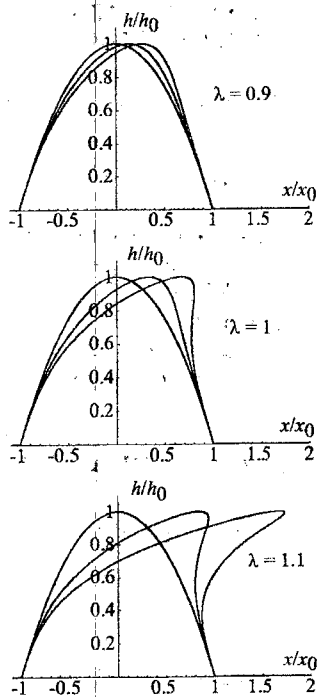


Figura 2: Soluciones de la ecuación (33) para un perfil inicial de la forma $f(x) = h_0[1 - (\frac{x}{x_0})^2]$ para $t = 0 s, 0.5 s$ y $1 s$. Los valores de los parámetros son $h_0 = 0.01 m$, $x_0 = 1 m$, $\alpha = 20^\circ$, $A = 0.01 kg m^{-1} s^{1/\lambda-2}$, $\rho = 1 gr/cm^3$ y $\lambda = 0.9$ en el panel superior, $\lambda = 1$ en el panel central, y $\lambda = 1.1$ en el panel inferior.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos deducido la Ec. (19) (o el sistema equivalente (17) y (18)), que gobierna el derrame sobre una superficie plana inclinada de fluidos con reología tipo ley de potencia. Las hipótesis básicas que aseguran la validez de las ecuaciones obtenidas están dadas por (1) y (21), y son $h \ll L$ y $Re h/L \ll 1$.

Podemos observar el doble papel que la gravedad juega en el problema bajo estudio. Por un lado impulsa al flujo cuesta abajo, y este hecho se refleja en la Ec. (19)

en el término que contiene al $\sin \alpha$. Por otro lado, las variaciones en h tienden a desplazar fluido de modo de suavizar dichas variaciones, y esto se manifiesta en el término $h_x \cos \alpha$. Para poner esto en términos más rigurosos, definimos los flujos J , J_d y J_p a partir de las ecuaciones (19), (31) y (33) respectivamente:

$$\begin{aligned} J &= \sigma k [\sigma(\sin \alpha - h_x \cos \alpha)]^\lambda h^{\lambda+2} \\ J_d &= \sigma_d k (-\sigma_d h_x \cos \alpha)^\lambda h^{\lambda+2} \\ J_p &= k (\sin \alpha)^\lambda h^{\lambda+2} \end{aligned} \quad (35)$$

donde $\sigma_d = -\text{sign}(h_x)$. Vemos que J_d es un flujo difusivo, siempre tiene el signo contrario a h_x , y su efecto es el de suavizar las variaciones de h . El flujo J_p es positivo, y por lo tanto siempre tiende a transportar al fluido cuesta abajo. El flujo total J incluye los efectos combinados de los dos anteriores, pero no es su suma (excepto para $\lambda = 1$).

$$J = \sigma [\sigma J_p^{1/\lambda} + \sigma_d (\sigma_d J_d)^{1/\lambda}]^\lambda \quad (36)$$

Mostramos que las soluciones de la Ec. (19) pueden presentar frentes del tipo ley de potencia, con el exponente determinado sólo por λ . Hemos presentado sus soluciones estacionarias, y hallado dos familias de soluciones del tipo onda viajera. En un caso viajan cuesta abajo y lejos del frente tienden a una de las soluciones estacionarias; en el otro, viajan cuesta arriba y lejos del frente tienden a la horizontal.

Es un hecho conocido que el derrame de fluidos sobre una superficie inclinada desarrolla en la línea de contacto un tipo de inestabilidad conocido como *fingers*. En este fenómeno la tensión superficial (ignorada en nuestro trabajo) cumplen un rol fundamental. Sin embargo, en [7] se demostró que lejos de la línea de contacto, la Ec. (19) en el caso Newtoniano describe correctamente a la corriente. Parece razonable asumir que la situación sea la misma para cualquier valor de λ .

Acknowledgments

Este trabajo fue subsidiado por el CONICET (PIP 4521/96) y la Universidad de Buenos Aires (X151).

- [1] H.E. Huppert, J. Fluid Mech. **121**, 43 (1982).
- [2] B.M. Marino *et al.*, Phys. Rev. E **54**, 2628 (1996).
- [3] J. Gratton & C. L. M. Vigo, European J. Appl. Math. **9**, 327 (1998).
- [4] J. Gratton, F. Minotti & S. Mahajan, Phys. Rev. E **60**,

6960 (1999).

- [5] J. Buckmaster, J. Fluid Mech. **81**, 735 (1977).
- [6] L. Kondic & J. Diez, Phys. Fluid **13**, 3168 (2001).
- [7] R. Goodwin & G. M. Homsy, Phys. Fluids A **3**, 515 (1991).