

# FLUJOS INERCIALES DE GRAVEDAD SOBRE UN MEDIO POROSO DELGADO

Beatriz M. Marino y Luis P. Thomas

Instituto de Física Arroyo Seco, Facultad de Ciencias Exactas  
Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Buenos Aires  
Pinto 399, B7000GHG Tandil, Argentina  
*bmarino@exa.unicen.edu.ar*

Existen muchas situaciones que involucran flujos dominados por la gravedad derramándose sobre substratos que pueden no ser impermeables y deben entonces ser tratados como medios porosos. El flujo volumétrico de fluido a través del fondo poroso puede, a su vez, tener un efecto importante tanto en la estructura como en la evolución espaciotemporal de la corriente desarrollada sobre la superficie. Presentamos aquí los resultados de experimentos de laboratorio en los que se han derramado volúmenes fijos de fluidos más densos que el ambiente en un canal de sección rectangular sobre un lecho permeable de 1.5 cm de espesor y constituido por pequeñas esferas de vidrio, puesto que creemos que tales flujos representan un paradigma apropiado para algunas corrientes de gravedad atmosféricas, oceánicas y producidas por el hombre. Los resultados experimentales son analizados a través de un modelo analítico que describe el fenómeno y provee las correspondientes leyes de escala.

Many situations involve gravity-driven flows over substrates which may not be impervious to the passage of fluid and so should be treated as porous media. The volumetric flux of fluid through the porous bottom may, in turn, have an important effect on the structure as well as the spatiotemporal evolution of the current, affecting the rate and extent of spreading. We present here the results of laboratory experiments in which fixed volumes of a heavy fluid have been released in a rectangular cross section channel with a 1.5 cm thick permeable bottom constituted of small glass spheres, as we believe that such flows represent an appropriate paradigm for many atmospheric, oceanic, and human-made gravity currents. An analytical model describes the phenomena and provides the corresponding experimental scaling laws.

## I. Introducción

Existen muchas situaciones que involucran flujos dominados por la gravedad derramándose sobre substratos permeables. Por ejemplo, flujos producidos a través de accidentes industriales tales como el derrame de un gas natural desde el recinto de almacenamiento o de petróleo desde un tanque. El aspecto práctico más importante es la determinación de la masa absorbida por el lecho poroso, y la máxima distancia que la corriente viaja antes de detenerse. El conocimiento de esta longitud, así como la determinación de la etapa en la cual la dilución del fluido en el medio circundante disminuye por debajo del valor umbral para entrar en ignición, resulta sumamente útil para cálculos de seguridad concernientes a evitar un posible incendio o la contaminación del medio ambiente.

Los trabajos previos de carácter experimental relacionados con este tema estudiaron el derrame de agua salada sobre grillas metálicas inmersas en el interior de un tanque de sección rectangular lleno de agua común<sup>(1-3)</sup>. En particular, Thomas, Marino & Linden<sup>(2)</sup> (TML de aquí en adelante) presentaron un modelo analítico para corrientes planas evolucionando sobre un medio poroso horizontal para explicar los resultados obtenidos. La hipótesis básica consistía en que, cuando el número de Reynolds del flujo a través de la superficie permeable  $Re_{PM}$  sugiere un régimen viscoso (es decir,  $Re_{PM} < 1$ ), el flujo a través de la superficie porosa es descrito por la ley de Darcy<sup>(4-5)</sup>. De esta manera, la velocidad en el interior del medio poroso es

$$v_D(x, t) = \frac{\kappa g'(x, t) h(x, t)}{\eta \epsilon} \quad (1)$$

donde  $g'$  es la gravedad reducida,  $h$  es la altura de la corriente en la posición  $x$ ,  $\eta$  es la viscosidad cinemática del fluido denso, y  $\epsilon$  y  $\kappa$  son el espesor y la permeabilidad del substrato, respectivamente. Con esta ecuación se obtiene la evolución de la pérdida de masa y de la posición del frente, las cuales siguen expresiones exponenciales con un tiempo característico

$$\tau_D = \frac{\eta \epsilon}{\kappa g'_0} \quad (2)$$

siendo  $g'_0 = g'(t = 0)$ .

Más tarde Moodie & Pascal<sup>(6)</sup> presentaron resultados numéricos del estudio de derrames de volúmenes fijos de líquidos en las mismas condiciones que las decriptas más arriba, incluyendo el caso de superficies porosas ligeramente inclinadas. También presentaron algunos resultados concernientes a la formulación del mismo problema en simetría axial<sup>(7)</sup>. Aunque estos autores no encuentran leyes de escala ni muestran comparaciones cuantitativas, los resultados numéricos concuerdan cualitativamente con la conducta descrita por TML. Más recientemente Ungarish & Huppert<sup>(8)</sup> estudiaron analíticamente y numéricamente las modificaciones en la evolución del flujo introducidas por la presencia de un fondo impermeable en el compartimento o dique en el que inicialmente se encuentra el fluido denso. Ésta es la disposición experimental generalmente usada en el laboratorio. Los resultados indican que no se modifica la

descripción global del comportamiento de las corrientes de gravedad para tiempos relativamente grandes.

Por otro lado, Marino y Thomas<sup>(3)</sup> analizaron también el caso en el cual el flujo a través de una superficie porosa de espesor despreciable es inercial, es decir  $Re_{PM} > 1$ . Los autores explicaron resultados experimentales suponiendo que la diferencia de presión entre la parte superior e inferior de la superficie impulsa al fluido en el substrato poroso<sup>(9-10)</sup> por medio de un balance de energía. La componente vertical  $v$  de la velocidad del fluido justo debajo de la superficie queda relacionada con la diferencia de presión en la forma  $\Delta p = \beta \rho v^2$ , siendo  $\beta \geq 1$  una constante. El valor  $\beta \approx 1$  sugerido por las experiencias sugiere un flujo laminar a través del lecho poroso delgado cuando no hay disipación; en general  $\beta$  puede ser mayor que 1 a causa de alguna pérdida de presión debido a efectos viscosos y/o turbulentos.

Estas consideraciones conducen a una ley para la velocidad del fluido a través del fondo permeable diferente de (1),

$$v(x, t) = c \sqrt{g'(x, t) h(x, t)} \quad (3)$$

donde es  $c = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ . Para etapas intermedias de la evolución

en las que no cuentan los detalles de la distribución inicial y donde el área transversal inicial  $a_0 = x_0 h_0$  determina la escala de longitud del problema, la masa de la corriente de gravedad sobre el substrato permeable con respecto a la masa total liberada decrece también en forma exponencial pero con una constante de decaimiento

$$\tau = \frac{\alpha_2 a_0^{1/4}}{\phi \alpha_1 g_0^{1/2}}, \quad (4)$$

siendo  $\phi$  la porosidad del lecho poroso, y los factores adimensionales  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son del orden de la unidad<sup>(3)</sup>. Nótese que la Ec. (4) sugiere que el fluido denso drena a través de una superficie porosa independientemente de los perfiles de densidad y altura, y de la posición del frente. El tipo de filtración, resumidos en las Ecs. (1) o (2), determina el tiempo característico (3) o (4).

Marino y Thomas<sup>(11)</sup> estudiaron los flujos de gravedad evolucionando sobre medios porosos profundos. Sin embargo, los resultados experimentales presentados no parecen resumirse en leyes de escala simples. La causa fue adjudicada a la presencia de diversos fenómenos físicos que establecen un amplio espectro de regímenes, pendientes de estudiar en detalle.

Aquí presentamos resultados experimentales de flujos de gravedad desarrollados sobre un lecho horizontal de pequeñas esferas de vidrio cuyo diámetro promedio (0.286 cm) es mucho menor que el espesor ( $\varepsilon = 1.5$  cm) del substrato. La corriente de gravedad se desarrolla en el interior de un fluido más liviano, y el flujo a través del substrato poroso es inercial ( $Re_{PM} > 1$ ). Los resultados sugieren expresiones similares a las Ecs. (3) y (4), aunque el coeficiente  $\beta$  debe cambiarse significativamente. En la próxima Sección explicamos este cambio por medio de un modelo diferente para flujo en el interior del lecho poroso, el cual conduce a las leyes de escala medidas del fenómeno con valores razonables para los coeficientes.

## II. Resultados experimentales y analíticos

La configuración experimental y el procesamiento de imágenes son similares a los descritos en los trabajos de las Refs. 2 y 12, aunque mejoramos aspectos prácticos y extendimos el rango de medición de los parámetros involucrados. Realizamos los experimentos en un canal de sección rectangular (3.00 m de largo, 0.20 m de ancho y 0.65 m de profundidad) con paredes de acrílico transparente, lleno de agua común hasta una profundidad  $h_0$  sobre el lecho separado 0.20 m del fondo del tanque. Una compuerta a una distancia  $x_0$  de la pared trasera del canal, justo donde comienza el lecho poroso, delimita el compartimento para el fluido denso. Este es preparado disolviendo en agua una cantidad conocida de sal para crear una diferencia de densidad  $\Delta \rho = \rho_s - \rho_a$ . Además le agregamos una cantidad calibrada de colorante para medir la densidad promedio en el ancho del canal. El experimento comienza cuando removemos rápidamente la compuerta, liberando el fluido denso que establece una corriente de gravedad sobre el lecho poroso con un drenaje hacia la parte inferior del tanque.

Restringimos nuestro estudio a corrientes de densidad cuya extensión es mucho mayor que su altura, en un régimen no dominado por las condiciones iniciales<sup>(9)</sup>, donde el número de Reynolds  $Re_{PM}$  sugiere que el flujo a través del fondo poroso deja de ser inercial y cuando los fluidos que componen la corriente y el ambiente pueden considerarse incompresibles. Suponemos además que el exceso de presión proveniente de la corriente decae principalmente en el substrato poroso, despreciando las diferencias de presión horizontales debajo de ella. Esto es válido si la parte inferior opone una leve resistencia al movimiento de fluido o, en otras palabras, si la permeabilidad del lecho es mucho menor que la del medio debajo de él. En ese caso la distribución hidrostática sin la corriente determina la presión debajo del lecho.

El régimen de flujo inercial comienza cuando  $Re_{MP}$  alcanza un cierto valor en el rango  $1 \leq Re_{MP} \leq 10$ <sup>(12)</sup>, y se manifiesta a través de una relación no lineal entre el gradiente de presión y el caudal. Este régimen de flujo laminar no estacionario persiste hasta  $Re_{MP} \approx 200$ . En este caso estaríamos dentro de la aproximación de Forchheimer, quien extendió la ley de Darcy para caudales altos incluyendo los efectos (cuadráticos) inerciales:

$$-\nabla p = -\frac{\Delta p}{\varepsilon} = \frac{\mu}{\kappa} v + \beta \rho v^2$$

donde es  $\beta = \frac{\text{const}}{\sqrt{\kappa}}$ ,  $\text{const} = 0.55$ . El primer término del

miembro de la derecha predomina cuando  $Re_{MP} < 1$ , el segundo lo hace cuando  $Re_{MP} \gg 1$ , y ambos tienen valores comparables cuando  $Re_{MP} \geq 1$ .

Los valores de  $Re_{MP}$  encontrados para los flujos experimentales estudiados aquí señalan que el correspondiente régimen de flujo a través del substrato se encuadra en esta clasificación aunque, en una primera aproximación, podemos prescindir del término de Darcy,

en cuyo caso  $\frac{\Delta p}{\varepsilon} \approx \beta \rho v^2$ . Considerando que  $\Delta p = \rho g h$ ,

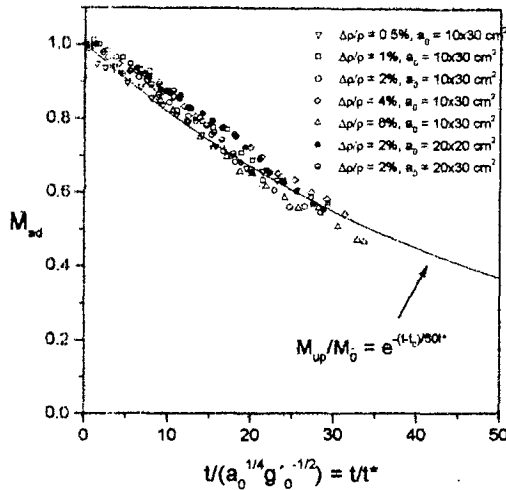


Figura 1. Valores experimentales de  $M(t)$  en función del tiempo medido desde la liberación del fluido denso y escalado como el modelo sugiere.

obtenemos una ley de filtración similar a la Ec. (3) con  $c = 1.35\kappa^{1/4} e^{-1.2}$

A fin de evaluar  $\beta$  debemos estimar la permeabilidad  $\kappa$  del medio poroso utilizado, parámetro que está relacionado a otras propiedades del substrato. Para un flujo viscoso a través de lechos granulares, el modelo más exitoso es el de Kozeny-Carman<sup>(12)</sup>,

$$\kappa = \frac{1}{k_0 s_0^2} \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}$$

donde  $s_0$  es el área superficial por unidad de volumen,  $k_0$  es una constante adimensional experimental (la teoría da  $k_0 = 5$ ),  $s_0 = 6/d$  para un medio poroso constituido de esferas de diámetro  $d$ . De aquí, estimamos que la permeabilidad de nuestro medio es:

$$\kappa = 6.14 \times 10^{-5} \text{ cm}^2.$$

Sin embargo, debemos decir aquí que, basándonos en los valores tabulados de porosidad de lechos porosos constituidos por el derrame al azar de esferas de diámetro  $d$ , el valor de la porosidad medido  $\phi = 0.375$  es el límite inferior del rango de valores posibles de  $\phi$  para esferas dispuestas al azar por el derrame de las mismas; por lo tanto el valor real debería ser algo mayor, lo que conduciría a obtener un valor de  $\kappa$  también algo mayor al obtenido más arriba. Agreguemos además que esta forma de calcular  $\kappa$  es solo aproximada para nuestro caso puesto que el modelo de estructura de medio poroso del que partimos está pensado para un flujo completamente en el régimen de Darcy.

Realizando los mismos pasos matemáticos que la Ref. (3) para el flujo a través de una grilla para estados intermedios de la evolución donde no cuentan los detalles de la distribución inicial y  $a_0$  es la escala de longitud del problema, la masa de la corriente de gravedad sobre el lecho con respecto de la masa total liberada viene dada por

$$M(t) = e^{-t/\tau} \quad (5)$$

Pero ahora la constante de decaimiento presenta la siguiente dependencia:

$$\tau = \frac{\alpha_2}{c^* \phi \alpha_1} \frac{\sqrt{\epsilon} a_0^{1/4}}{\kappa^{1/4} g_0^{-1/2}} \quad (6)$$

con  $c^* \approx 1.35$ . En forma análoga a lo que ocurre para corrientes de gravedad desarrollándose sobre grillas los valores de los factores adimensionales  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son del orden de la unidad y constantes si el perfil de altura es autosimilar. Como  $\tau$  depende del cociente  $\alpha_1/\alpha_2$ , esperamos que las variaciones de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se compensen parcialmente cuando no lo sea. Por lo tanto, es de esperar que el valor de  $\tau$  no esté significativamente influenciado por las variaciones de la distribución de altura y de densidad dentro de la corriente.

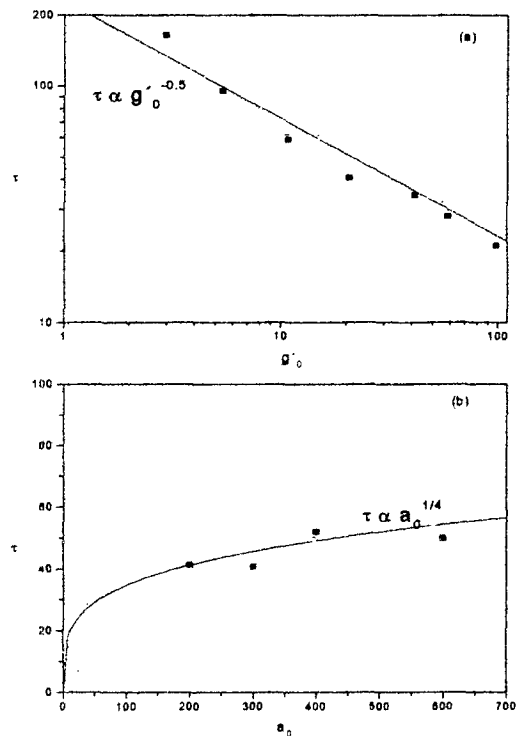


Figura 2. Valores experimentales de  $\tau$  obtenidos ajustando las curvas de la Fig 1 con su correspondiente ley exponencial, en función de (a)  $g_0$  y (b)  $a_0$ . Las líneas muestran las dependencias sugeridas por Ec. (6).

Comparando las Ecs. (6) y (4), el tiempo característico durante el cual la pérdida de masa de la corriente es importante también está aquí relacionado con el área lateral  $a_0$ , la gravedad reducida  $g_0$  y la porosidad de la superficie  $\phi$ . Sin embargo, ahora intervienen además la permeabilidad y el espesor del lecho. Como podemos observar en las Figs. 1 y 2, las expresiones (5) y (6) proveen el comportamiento global de las corrientes estudiadas.

La curva que mejor ajusta a todos los puntos experimentales presentados en la Fig. 1, sugiere que el coeficiente de la Ec. (6) es  $\frac{\alpha_2}{c^* \phi \alpha_1} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\kappa^{1/4}} \approx 50$ , algo mayor

que el valor sugerido por el modelo de flujo en el interior del substrato.

Definimos el número de Reynolds en el interior del medio poroso como:

$$Re_{MP} = \frac{v \cdot \delta}{\eta}$$

donde  $v$  es la velocidad vertical típica de penetración en el substrato poroso, y  $\delta$  es una distancia característica (por ejemplo, el diámetro de las esferas de vidrio). La velocidad  $v$  en función del caudal  $Q$  que se pierde a través de la superficie  $Lx_f$  del medio es

$$v = \frac{Q}{\phi L x_f} = \frac{\bar{a}_0}{\phi x_f} \frac{dA(t)}{dt} = \frac{h_0 x_0}{\phi x_f(t)} \frac{dA(t)}{dt}$$

siendo  $\phi L x_f$  el área efectiva y

$$Q = L \bar{a}_0 \frac{da(t)}{dt}$$

Finalmente, obtenemos:

$$Re_{MP} = \frac{h_0 x_0 \delta}{\phi v} \frac{da(t)}{x_f(t)}$$

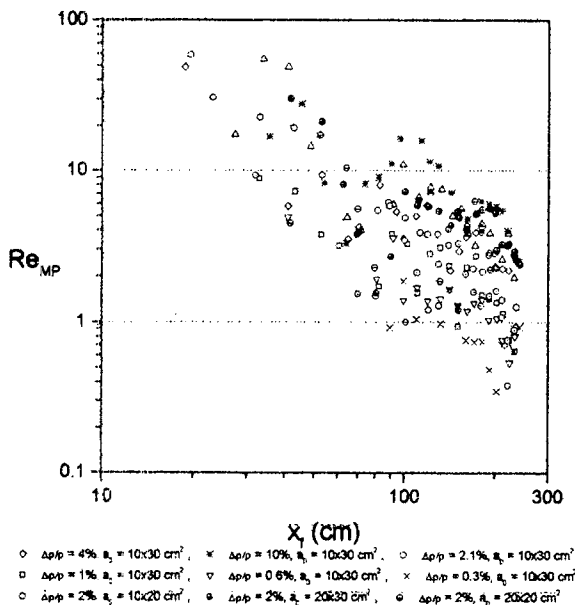


Figura 3: Evolución del número de Reynolds del flujo en el interior del substrato poroso en función de la posición del frente

La Fig. 3 muestra la evolución de  $Re_{MP}$  calculado de esta manera para los mismos experimentos de Fig. 1 en función de  $x_f$ . Es evidente que la mayor parte del desarrollo de las corrientes analizadas ocurre para  $Re_{MP} > 1$ , y que sólo los últimos puntos de algunos experimentos comienzan a caer fuera del dominio de validez de un flujo inercial puro en el medio poroso. Claramente el flujo del líquido denso a través del lecho de esferas está cambiando de régimen a uno en el que las fuerzas viscosas comienzan a ser importantes y, como consecuencia, los puntos experimentales representados en la Fig. 1 manifiestan una desviación del modelo para tiempos grandes.

### III. Resumen y conclusión

Investigamos la influencia del drenaje de masa a través de medios permeables horizontales en las corrientes de gravedad planas inerciales, por medio de experimentos de laboratorio en los que el lecho poroso está constituido por pequeñas esferas de vidrio. Extendemos el modelo anteriormente presentado<sup>(3)</sup> para superficies porosas de espesor despreciable, el que comparamos satisfactoriamente con mediciones de laboratorio. Es importante destacar que la descripción global de la conducta de las corrientes cuando el flujo vertical a través del medio es inercial no requiere ninguna hipótesis sobre los perfiles de altura y densidad, como ocurre en los *box models* usualmente empleados. Los resultados indican que la evolución de la masa  $m(t)$  de la corriente determinada experimentalmente es un parámetro útil y bueno para verificar modelos analíticos. Los resultados provistos por los experimentos y el modelo presentado sugieren que la masa de la corriente decae exponencialmente con un tiempo característico  $\tau$  que depende del fondo permeable a través de su porosidad, permeabilidad y espesor por medio de una relación no reportada hasta ahora. La evolución de la velocidad y la posición del frente (no presentadas aquí por brevedad) también siguen relaciones exponenciales.

En conclusión, hemos investigado una situación sencilla de modo de analizar el proceso físico dominante y determinar las leyes de escala resultantes de los parámetros relevantes en un rango complementario de los trabajos previos. Las bases presentadas servirán para entender y explicar situaciones más complejas presentes en los flujos sobre medios porosos reales.

### Referencias bibliográficas

- 1 - Lionet, J. y Quoy, O. Gravity currents over porous media. Internal rep., DAMTP, University of Cambridge (1995).
- 2 - Thomas, L. P.; Marino, B. M. y Linden, P. F. J. Fluid Mech. **366**, 239-258 (1998).
- 3 - Marino, B.M. y Thomas, L.P. Proceeding del XIX Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Córdoba, Octubre 22 al 27 de 2000. Tomo II, pp. 535-543.
- 4 - Bear, J. "Dynamics of Fluids in Porous Media", Elsevier, New York (1972).
- 5 - Duillen, F. A. L. "Porous Media. Fluid transport and pore structure", Academic, New York (1979).
- 6 - Moodie, T. B. y Pascal, J. P. J. Porous Media **2**(2), 127-141 (1999).
- 7 - Moodie, T. B. y Pascal, J. P. Canadian Applied Mathematics Quarterly **7**(2), 185-201 (1999).
- 8 - Ungarish, M. y Huppert, H. E. J. Fluid Mech. **418**, 1-23 (2000).
- 9 - Batchelor, G. K. "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press (1967).
- 10 - Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. "Course of Theoretical Physics", Volumen 6: Fluid Mechanics, 2<sup>nd</sup> edition, Pergamon Press (1987).
- 11 - Marino, B.M. y Thomas, L.P. Anales AFA **10**, 142-151.
- 12 - Fand, R.M., Kim, B.Y.K., Lam, A.C.C. y Phan, R.T. J. Fluids Engineering **109**, 268-274 (1987).