

# Desmitificación del Debate sobre la Caja de Fotones entre Bohr y Einstein

A.C de la Torre , A. Daleo y I. García Mata

Departamento de Física - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de Mar del Plata  
Funes 3350, 7600 Mar del Plata, Argentina  
e-mail: dltorre@mdp.edu.ar

La legendaria discusión entre Einstein y Bohr sobre el experimento de la caja de fotones es analizada críticamente. Se demuestra que el argumento de Einstein es erróneo y que la respuesta de Bohr es incorrecta.

The legendary discussion between Einstein and Bohr concerning the photon box experiment is critically analyzed. It is shown that Einstein's argument is flawed and Bohr's reply is wrong.

## I. Introducción

El desacuerdo entre Bohr y Einstein sobre la mecánica cuántica es ya legendario en el ámbito de la física. Una de las discusiones, quizás la que más atención ha recibido, es la del famoso experimento de fotones en una caja, un *Gedankenexperiment* ideado por Einstein con el fin de demostrar una aparente falla en la mecánica cuántica: una violación de la relación de indeterminación entre la energía y el tiempo. La respuesta de Bohr, construida durante una noche de insomnio luego de la presentación de Einstein, usaba un resultado de la teoría de la relatividad general, la fórmula del corrimiento al rojo. Esta discusión ha sido reconocida como un momento crucial del debate entre Bohr y Einstein. El mismo Bohr dijo que "la discusión dio un giro dramático"[1]. A pesar de que algunos autores han cuestionado la validez de la respuesta de Bohr existe la creencia de que el experimento de la caja de fotones fue el escenario para una gran lucha de colosos (este punto de vista era compartido por nosotros). Sin embargo en este trabajo veremos que esta reputación es altamente inmerecida. En efecto, un estudio cuidadoso e irreverente del problema, demuestra que el argumento de Einstein es erróneo y que la respuesta de Bohr es incorrecta. Existen algunos indicios que sugieren que ni Einstein ni Bohr estaban del todo satisfechos con su parte en la discusión. Es muy probable que Einstein se haya dado cuenta de que la respuesta de Bohr no era concluyente; sin embargo no insistió con su argumento porque probablemente ya no creía en él. Por otro lado, se sabe[3] que, el mismo día de su muerte, Bohr tenía dibujada la caja de fotones en el pizarrón. Esto puede ser visto como un trofeo de cazador, pero también puede indicar que Bohr no estaba completamente satisfecho con su respuesta y que seguía buscando una mejor. Muchos autores han tratado la caja de fotones, ya sea criticando o justificando y mejorando las argumentaciones de Bohr. Hasta donde sabemos, ninguno realiza una discusión crítica sobre el argumento de Einstein. La razón de esto probablemente sea que el argumento es extremadamente simple y aparentemente no necesita ningún comentario. Veremos, sin embargo, que presenta serios errores.

A pesar de que el núcleo de la discusión tuvo lugar en el congreso Solvay de 1930 en Bruselas, usaremos como fuente autorizada para el argumento y su respuesta el reporte de Bohr sobre los mismos, publicado

en 1949 en un libro que se ha convertido en referencia estándar[1]. Einstein leyó este artículo y tuvo la oportunidad (no aprovechada) de comentar sobre este asunto en el mismo volumen[4].

Cabe aclarar que en este trabajo usaremos las palabras "indeterminación" e "incerteza" con diferentes significados. "Indeterminación" denota la imposibilidad de asignar valores precisos a observables de acuerdo con lo que indica la mecánica cuántica, mientras que "incerteza" se referirá a la falta de precisión en el conocimiento del valor asignado a un observable debido a limitaciones experimentales o del aparato. En este trabajo "incerteza" tiene un origen clásico y es de naturaleza gnoseológica mientras que "indeterminación" es un concepto esencialmente mecánico-cuántico, más allá de que su naturaleza sea gnoseológica u ontológica, un asunto que aún no está decidido entre los expertos en fundamentos de la mecánica cuántica.

## II. Argumento de Einstein

Einstein propuso considerar una caja de paredes perfectamente reflectoras llena de radiación electromagnética. Dentro de la caja, un mecanismo accionado mediante un reloj podría abrir y cerrar una ventana en un momento determinado y durante un intervalo de tiempo suficientemente corto como para dejar escapar solamente un fotón. De esta manera, según Einstein, el tiempo de emisión del fotón podría ser conocido con exactitud. Antes y después de la emisión se podría pesar la caja, con toda comodidad e infinita precisión, y de la diferencia entre los pesos se podría determinar la energía del fotón. Así, concluyó Einstein, la radiación electromagnética emergente violaría la relación

$$\Delta E \Delta T \geq \hbar . \quad (1)$$

El significado de la relación entre la energía y el tiempo a sido sujeto a profundos análisis. Su principal dificultad es que el "tiempo" no es un observable mecánico cuántico. Sin embargo, para los fines de este trabajo no nos preocuparemos por esto porque siempre podemos reemplazar el observable  $T$  por un observable de posición  $X/c$ , donde  $X$  es la posición del fotón emitido (o mejor dicho, del centro del pulso electromagnético), y utilizando la relación entre la energía y el impulso del fotón, obtenemos la relación

de indeterminación de forma no cuestionada. Con esto en mente podemos aceptar la relación de indeterminación para el pulso electromagnético considerado.

Si el argumento de Einstein fuese correcto, no solo sería fatal para el principio de indeterminación en mecánica cuántica pero *también* representaría una contradicción irresoluble entre el concepto de fotón, propio de Einstein, y la electrodinámica clásica! En realidad, si el intervalo de tiempo durante el cual la ventana permanece abierta (suficientemente corto como para que escape sólo un fotón, como pensaba Einstein), tiende a cero, entonces el pulso electromagnético deberá ser muy agudo, idealmente una delta de Dirac. Según la electrodinámica clásica, las componentes de Fourier de un pulso de estas características involucran un amplio espectro de frecuencias. Como el pulso electromagnético no tiene una frecuencia bien definida, el "fotón" asociado tampoco tendrá una energía definida, si tenemos en cuenta la relación de Einstein  $E = h\nu$ . Un pulso tan agudo solamente puede ser generado por un gran número de fotones. Del experimento propuesto se deduce que Einstein tenía en mente al fotón como un objeto puntualmente *localizado* con una energía (frecuencia) definida precisamente. Tal objeto no existe! El experimento de Einstein no puede ser realizado, ni siquiera en *gedanke*, porque utiliza un objeto que no existe. Por supuesto que uno puede pesar la caja, antes y después del pequeño intervalo durante el que la ventana permanece abierta, pero los resultados de las mediciones no pueden ser atribuidos a un sistema físico que no existe. Aún si el "fotón localizado" existiera, las mediciones realizadas sobre la caja perturbarían su estado, como es aceptado generalmente, debido al postulado de proyección sin importar cuán lejos esté el fotón. La no localidad es sin dudas el aspecto más sorprendente del experimento de la caja de fotones.

El experimento de Einstein sería aplicable si el sistema físico emitido por la caja fuera un objeto puntual con energía definida precisamente como, por ejemplo, una partícula clásica. Pero entonces, el argumento sería inútil porque a nadie sorprendería que un aparato clásico con un sistema físico clásico violara las reglas de la mecánica cuántica. Einstein *necesitaba* del fotón debido a su naturaleza esencialmente cuántica. Su error fue el de asignar, a un objeto esencialmente mecánico cuántico, las características clásicas de localización y energía definida. Esto resulta imposible como fue demostrado mediante la definición de la energía del fotón y de la electrodinámica clásica.

### III. Respuesta de Bohr

Hemos visto que la debilidad principal del argumento de Einstein yace en el lado del fotón porque necesita de un objeto que no existe. Sin embargo, Bohr buscó el error por otro lado: por el lado de la caja. El conjunto de fórmulas que usó Bohr, en su respuesta a Einstein, para llegar a la desigualdad (1) es:

$$\Delta E = \Delta m c^2 \quad (2)$$

$$\Delta p \Delta q \approx \hbar \quad (3)$$

$$\Delta p < T g \Delta m \quad (4)$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{c^2} g \Delta q \quad (5)$$

Este es un conjunto híbrido que incluye mecánica clásica (4), relatividad especial (2), mecánica cuántica (3) y (4) y relatividad general (5). Veremos que precisamente esta mezcla híbrida es la raíz de la debilidad del argumento. Por supuesto, mediante una manipulación trivial de estas fórmulas uno puede llegar fácilmente a la desigualdad (1). Sin embargo, para obtener la prueba de la desigualdad, las relaciones (2) a (5) deben ser válidas y los símbolos usados deben significar lo mismo que en la desigualdad (1). Veremos que estos dos requisitos no son satisfechos por la respuesta de Bohr.

En la respuesta de Bohr a Einstein,  $T$  representa el "intervalo del procedimiento de pesaje",  $\Delta m$  es la "precisión ... de pesaje",  $\Delta q$  es la "precisión ... de la posición" y  $\Delta p$  es la "mínima amplitud en el control del impulso de la caja". En estas definiciones, hay una mezcla de incertezas clásicas e indeterminaciones cuánticas. Concordamos con otros autores en que, en los argumentos de Bohr, el símbolo  $\Delta$  denota alguna medida de ancho no especificada, cuya naturaleza (clásica o cuántica) no está determinada claramente. Esta ambigüedad es típica del confuso estilo de argumentación de Bohr[6] que era tolerado por su (merecida) autoridad. De cualquier manera su argumento aún "despierta interrogantes que nunca han sido respondidos de forma satisfactoria"[7].

La primera dificultad que encontramos en el argumento de Bohr es que el símbolo  $T$  no significa lo mismo en las relaciones (2) a la (5) que en la (1). En el argumento de Einstein,  $\Delta T$  es la indeterminación en el instante de escape del fotón (más precisamente, el ancho temporal del pulso electromagnético) y para Bohr representa la indeterminación en el tiempo de balanceo durante el proceso de pesaje. Estas indeterminaciones no son necesariamente las mismas. Verdaderamente, el pesaje de la caja puede hacerse un largo tiempo después de que el fotón haya escapado. Aquí tenemos suficientes razones para tomar la respuesta de Bohr como no concluyente.

La siguiente dificultad es que Bohr sostiene que la desigualdad (4) es "obvia". Esta no era obvia para nosotros, por lo que hicimos una búsqueda bibliográfica. Muchos autores simplemente citan textualmente a Bohr sin ninguna aclaración adicional. Otros autores intentan algún tipo de explicación. En varios casos se deriva una *igualdad* en lugar de la desigualdad (4), incluyendo incertezas clásicas que luego son remplazadas por indeterminaciones cuánticas. Ninguno de los autores consultados establece claramente la diferencia entre cantidades clásicas relacionadas causalmente e indeterminaciones esencialmente cuánticas. Llegamos a la conclusión de que la relación (4) *no es obvia* y, de ser válida, debe ser probada con más cuidado.

Como a la relación (4) se le atribuye ser consecuencia del procedimiento de pesaje, debemos analizarlo en detalle. El procedimiento consiste en poner o quitar pesas cada vez más pequeñas hasta que la caja permanezca en reposo con el puntero en el cero de la escala. Cuando llegamos a este punto, la fuerza del resorte se cancela con

el peso total de la caja y los podemos despreciar. Hay un punto sutil relacionado con el procedimiento de pesaje que es digno de ser mencionado. En vista de la relación entre masa y energía, el pesaje debe realizarse de tal forma que no haya disipación de energía al entorno porque esto implicaría una pérdida de masa. En particular, no podemos admitir un proceso de *amortiguamiento* para frenar la caja. El procedimiento de pesaje debe incluir solamente transferencia de energía elástica, gravitacional y cinética para lograr frenar la caja sin disipación. Asumimos la existencia de las habilidades experimentales para hacer esto posible. A medida que las pesas agregadas se hacen más pequeñas, el movimiento del puntero se hace cada vez más lento y se requieren tiempos de balanceo cada vez más largos. El procedimiento termina, con una precisión experimental  $\delta m$ , cuando la adición o sustracción de esa masa deje de producir un desplazamiento notable en el puntero durante un período de tiempo  $T$  previamente fijado. Obtendremos mayor precisión cuanto más tiempo estemos dispuestos a esperar. Es claro que la caja no puede estar en reposo absoluto, estará en movimiento con un impulso  $\delta p$  que deberá ser despreciablemente pequeño, tan pequeño que durante el intervalo de balanceo  $T$  el desplazamiento de la caja alrededor del cero,  $\delta q$ , será menor que cualquier distancia apreciable. La fuerza gravitatoria  $g\delta m$ , asociada a la masa  $\delta m$ , que actúa durante el intervalo de tiempo  $T$  causará un cambio  $\delta p$  en el impulso de la caja. Esto es,

$$\delta p = g\delta m T \quad (6)$$

Debemos enfatizar que todas las cantidades mencionadas son incertezas clásicas, típicas de cualquier procedimiento de medición. La incerteza de la masa (energía)  $\delta m$  y la del impulso  $\delta p$  están relacionadas causalmente y pueden ser estimadas para un experimento dado. Estas no deben ser confundidas con las indeterminaciones cuánticas que no están relacionadas de forma causal. Por otro lado, si consideramos la caja como un sistema cuántico, todos sus observables tendrán asociadas indeterminaciones cuánticas. En particular las indeterminaciones de posición,  $\Delta q$ , e impulso,  $\Delta p$ , están relacionadas por la relación de Heisenberg (3) (reemplazando  $\approx$  por  $\geq$ ). No obstante, la caja es un sistema macroscópico, por lo que no se observan las indeterminaciones cuánticas. Por lo tanto la indeterminación cuántica  $\Delta A$  de cualquier observable  $A$  será siempre menor que la incerteza experimental  $\delta A$  correspondiente. En efecto, en situaciones reales, son más pequeñas por varios órdenes de magnitud. El pesaje de la caja no tendría sentido si las indeterminaciones de impulso, posición y masa (energía) del estado cuántico de la caja fueran mayores que la precisión experimental en el impulso, la posición o la masa. En consecuencia debemos tener

$$\Delta p < \delta p ; \Delta m < \delta m \quad (7)$$

Claramente la relación (4) de Bohr no surge de las relaciones (6) y (7). Más aún, hay algunos estados cuánticos que violan la relación (4). De hecho, si tomamos un estado cuántico extremo para la caja en el que la indeterminación cuántica es comparable con la incerteza experimental,  $\Delta p \approx \delta p$ , dejando la indeterminación en la masa más

pequeña que la incerteza correspondiente, llegamos a la desigualdad contraria de la relación (4) de Bohr. Veremos que éste es un estado cuántico accesible para la caja.

Un modelo clásico apropiado para la caja, como balanza de resorte, podría ser un oscilador armónico amortiguado porque la energía (masa) disipada es despreciable comparada con la masa pesada. De todas formas, para nuestro caso la incerteza en la masa medida deberá ser muy pequeña por lo que no podremos tolerar pérdidas de energía; por lo tanto, para el estado cuántico de la caja, elegiremos las autofunciones de energía del oscilador armónico simple,  $\{\phi_n\}$ . Podemos asumir que la preparación del sistema, relacionada con el pesaje, deja a la caja en el estado fundamental de la energía  $\phi_0$ . Esta hipótesis es la más simple pero podríamos elegir también para el estado de la caja alguna superposición de autoestados de energía con una indeterminación  $\Delta E$  mucho menor que la incerteza experimental  $\delta mc^2$ . Entre estas últimas podemos considerar los estados coherentes [8]

$$\Psi_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \phi_n \quad (8)$$

Estos estados son particularmente interesantes porque son los que más se asemejan a estados clásicos, dado que son los que tienen el menor producto de indeterminación. Notar que el estado fundamental corresponde al caso especial en que  $\alpha = 0$ . Las indeterminaciones para la energía y el impulso son,

$$\Delta^2 p = \hbar m \omega / 2, \Delta^2 E = \hbar^2 \omega^2 |\alpha|^2 \quad (9)$$

Donde  $m$  es la masa del oscilador (la caja) y  $\omega$  la frecuencia de oscilación. La indeterminación en el impulso es constante para todos los estados y, tomando  $\alpha$  suficientemente pequeño, podemos obtener un estado cuya indeterminación en energía (masa) es lo suficientemente pequeña como para violar la "obvia" desigualdad (4) de Bohr.

Aquí debemos enfatizar que las indeterminaciones cuánticas no pueden ser tratadas como variables clásicas porque no están relacionadas causalmente. Una indeterminación en el impulso  $\Delta p$  no es un cambio en el impulso causado por la acción de alguna fuerza. Las indeterminaciones son solamente eso, *indeterminaciones* sin una causa clásica. Por esta razón sería incorrecto reemplazar  $\Delta m$  y  $\Delta p$  por  $\delta m$  y  $\delta p$  en la ecuación (6). De la definición formal de las indeterminaciones en mecánica cuántica se deduce que si dos observables  $A$  y  $B$  están relacionados por una función,  $B = F(A)$ , sus indeterminaciones *no están relacionadas por la misma función* (ni siquiera para una función lineal de operadores!). Por ejemplo, la energía y el impulso de la partícula libre cumplen la relación  $E = p^2/2m$  pero sus indeterminaciones no están relacionadas de la misma manera. Como otro ejemplo, los observables de posición de una partícula libre en un estado cuántico dado para diferentes instantes ( $t$  y  $0$ ), están relacionados por  $x(t) = x(0) + vt$ , donde  $v = p/m$  es el observable de velocidad. Sin embargo, las indeterminaciones de la posición para los instantes dados están relacionadas

por

$$\Delta x(t) = \sqrt{\Delta^2 x(0) + (\langle xv + vx \rangle - 2\langle x \rangle \langle v \rangle)t + \langle v^2 \rangle t^2}, \quad (10)$$

donde los valores medios son tomados para el estado a tiempo  $t = 0$ . En consecuencia es incorrecto utilizar las relaciones de indeterminación de Heisenberg para derivar otras relaciones mediante una manipulación matemática descuidada de las indeterminaciones. Este uso ilegal de las relaciones de Heisenberg motivó a D. Griffith a decir: "when you hear a physicist invoke the uncertainty principle, keep a hand on your wallet"<sup>1</sup> [5].

#### IV. Conclusión

Cuando realizamos una diferenciación entre el significado y el tratamiento matemático de las incertezas clásicas y las indeterminaciones cuánticas, queda claro que es imposible probar una relación mecánico cuántica, como la (1), mediante un argumento basado en la mecánica clásica. Por otra parte, hemos visto que la mezcla híbrida de conceptos clásicos y cuánticos usualmente no tiene sentido y puede llevar a resultados erróneos. Por lo tanto, la única forma de probar la validez de una relación cuántica es a través de una consistencia lógica *dentro* de la teoría cuántica (además de, por supuesto, concordancia con los experimentos). Cada relación de indeterminación es consecuencia del formalismo de la mecánica cuántica donde los estados son representados por elementos de un espacio de Hilbert y los observables por operadores hermiticos. Por lo tanto, cualquier tratamiento mecánico cuántico correcto del experimento de la caja de fotones será consistente con las relaciones de indeterminación.

Tales tratamientos exceden los propósitos de este trabajo pero queremos mencionar que deberán presentar una descripción cuántica de la radiación electromagnética dentro y fuera de la caja con estados acoplados por la conservación de la energía. La descripción de la radiación emergente puede realizarse convenientemente mediante autoestados del número de fotones [8, 9]. Un pulso electromagnético localizado contendrá un número grande de estados de fotón, lo que implica un amplio espectro de energía. Por otra parte, si el espectro de la energía es angosto, el pulso electromagnético no estará localizado. Como las radiaciones dentro y fuera de la caja están acopladas por la conservación de la energía, la reducción del estado relacionada con la medición de la energía dentro de la caja afectará el estado de la radiación fuera de la caja, sin importar cuán lejos se encuentre. Nuevamente, la no localidad aparece como una de las características más sorprendentes de la mecánica cuántica.

En este trabajo hemos visto que la reputación de la discusión entre Bohr y Einstein sobre la caja de fotones es injustificada. Sus argumentos han sido propagados sin crítica por muchos autores. Resulta desafortunado que a estos argumentos tan deficientes de Bohr y Einstein, se les haya dado tan alta prioridad en su debate. En realidad, argumentos ideados para destruir la mecánica cuántica y las respuestas para salvarla deberían tener un nivel de rigor

que no es alcanzado por el debate de la caja de fotones. Por supuesto las debilidades en los argumentos de Bohr y Einstein son detectadas fácilmente hoy en vista del actual conocimiento de la mecánica cuántica y sería un error anacrónico culpar a ellos por eso. Estas debilidades no deben manchar de ninguna manera sus contribuciones esenciales a la teoría cuántica. Por el lado de Bohr, la idea de complementariedad mostrando que la realidad física tiene un nivel de sofisticación velado a nuestras ingenuas observaciones; y por el lado de Einstein, el argumento EPR mostrando correlaciones inesperadas cuyo estudio ha dominado la investigación de los fundamentos de la mecánica cuántica. Comparados con sus gigantescas contribuciones, sus errores son insignificantes. El error que sí queremos evitar es la propagación sin crítica y autoritaria de una combinación coherente de errores que llevan a la acertada conclusión de que la mecánica cuántica es correcta.

Este trabajo ha recibido un apoyo parcial del CONICET (PIP, subsidio n. 4342/96). Uno de nosotros (A.D.) agradece a la CIC por su apoyo económico.

#### Referencias

- [1] N. Bohr. "Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics" en *Albert Einstein: Philosopher - Scientist* editado por P. A. Schilpp. The Library of Living Philosophers. Vol. VII. Open Court. La Salle (1949).
- [2] Un recuento de estas críticas y las respuestas a ellas puede encontrarse en: M. Jammer. *The Philosophy of Quantum Mechanics*. Wiley, New York (1974).
- [3] *Niels Bohr, Collected Works*. J. Kalckar Ed. Vol.7. Elsevier, Amsterdam (1996). Citado en la ref.7 de abajo.
- [4] A. Einstein. "Remarks on the Essays Appearing in this Collective Volume" En *Albert Einstein: Philosopher - Scientist* editado por P. A. Schilpp. The Library of Living Philosophers. Vol. VII. Open Court. La Salle (1949).
- [5] David Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. Harper and Row (1987), (p.52).
- [6] A. Whitaker. *Einstein, Bohr and the Quantum Dilemma*. Chpt.5. Cambridge Univ. Press. Cambridge (1996).
- [7] J. Hilgevoord. "The uncertainty principle for energy and time. II" *Am. J. Phys.* **66**, 396-402 (1998).
- [8] R. J. Glauber. "Coherent and Incoherent States of the Radiation Field" *Phys. Rev. A* **131**, 2766-1788 (1963).

<sup>1</sup> cuando oiga a un físico invocar el principio de indeterminación, cuide su billetera"