

AUMENTO DE LA RESOLUCIÓN EN FRECUENCIA OBTENIDA POR TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

V. Slezak

Centro de Investigaciones en Láseres y Aplicaciones, CEILAP (CITEFA-CONICET)
Zufriategui 4380, 1603 V. Martelli, Pcia. Bs.As. (Argentina)
e-mail: vslezak@citefa.gov.ar

Cuando la variación temporal de una magnitud característica de un proceso físico se registra en forma digital, el análisis armónico de la misma se puede realizar mediante la transformada rápida de Fourier (FFT). El espectro resultante presenta una resolución en frecuencias que está determinada por la frecuencia de muestreo (f_s) y el número total de muestras (N). En diversas aplicaciones es usual que la información que interesa esté contenida en la amplitud del pico como así también en el ancho del mismo. Cuando la señal es un transitorio, normalmente es digitalizada mediante un equipo cuya capacidad de muestreo es limitada, dada por la memoria del mismo.

En este trabajo se presenta un método simple de procesamiento que, utilizando la FFT, permite obtener mucho mayor resolución en frecuencia que la normalmente obtenida por aplicación directa de la FFT a la señal temporal (f_s/N). Se analiza la bondad del método al aplicarlo sobre una función periódica conocida y se estudian las limitaciones del mismo. Se muestra una aplicación concreta a la espectroscopía optoacústica pulsada de alta precisión, realizando el análisis de la forma (amplitud y ancho) de un pico de resonancia de una cavidad acústica al excitar con radiación pulsada de un láser una muestra gaseosa encerrada en ella.

When a magnitude characteristic of a physical process is recorded at evenly spaced intervals of time, the Fast Fourier Transform (FFT) has proven to be a powerful tool for spectral analysis. The resulting spectrum presents a frequency resolution that is determined by the ratio between the sampling rate (f_s) and the total number of samples (N). In several applications the exact determination of the amplitude and the width of the peaks in the frequency spectrum is very important. When the signal is a transient (finite interval) data are usually recorded digitally by equipment whose sampling rate is limited by its memory storage size.

This work describes a simple numerical procedure which, based on FFT, allows obtaining a better frequency resolution than the direct application of FFT to the signal (f_s/N). The performance of this method and its limitations are analyzed in case of applications to theoretical functions. A practical case is presented which consists on the analysis of the shape (amplitude and width) of a resonance peak in an experiment on high precision pulsed optoacoustic spectroscopy, when laser radiation excites a gas sample enclosed in an acoustical cavity.

INTRODUCCIÓN

Una de las aplicaciones más usuales de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) es la determinación del espectro de potencia de una señal adquirida digitalmente en un intervalo de tiempo finito. El resultado de aplicar esta herramienta computacional consiste en una serie finita de valores $H(f_n)$ para valores discretos de frecuencias f_n .¹ La dificultad del método reside en la falta de información de la amplitud en frecuencias intermedias, por lo que en algunos casos se realiza interpolación, perdiéndose la información de la posible presencia de frecuencias intermedias. Una de las preguntas que se plantea es cuánto se aparta el valor de la amplitud obtenida a una frecuencia cualquiera f de la del espectro continuo resultante de aplicar la integral de Fourier (IntF).

Se ha estudiado con profundidad cómo este apartamiento puede ser minimizado optimizando la ventana por la que se adquiere la señal (rectangular, de Barlett, Hanning y otras),² pero aún en el óptimo de los casos la resolución de la DFT, aplicada a valores h_k de la señal temporal muestreada en intervalos Δ , va a estar limitada por el cociente entre la frecuencia de muestreo (f_s) y el número de muestras (N):

$$H(f_n) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N} \quad (1)$$

donde $f_n = n f_s / N$, $n = -N/2, \dots, N/2$ y $\Delta = 1/f_s$. La resolución está determinada por el intervalo entre frecuencias (f_s/N).

f_s y N no se pueden elegir arbitrariamente. Por un lado la frecuencia de muestreo f_s tiene un límite teórico inferior dado por la frecuencia de Nyquist, la cual impone que para determinar el espectro de potencia a una frecuencia f deberá utilizarse una frecuencia de muestreo mínima $2f$ (teorema del muestreo). Si se muestrea a una frecuencia insuficiente se obtiene el solapamiento de espectros o repliegue de frecuencias (aliasing), por el cual componentes superiores de la señal se solapan, con la consiguiente distorsión en el espectro resultante.

Por otro lado, el número de muestras N en los casos prácticos está limitado por la plaqueta de adquisición de datos o porque se trata de un transitorio o porque se impone una restricción para asegurar que la característica espectral de la señal no cambie durante el registro. Por lo tanto, la resolución en frecuencias de la DFT de una señal digitalizada está limitada por los valores posibles del cociente f_s/N . Ni el remuestreo (resampling) ni el complemento con ceros (zero padding) resuelven esta limitación del método.

En la sección siguiente se desarrollará un método que permite obtener una resolución en frecuencias mucho mayor que la obtenida por la aplicación de (1) a N muestras de una señal digitalizada a la frecuencia f_s , sin recurrir a interpolaciones ni propuesta de modelos a priori.³

DESARROLLO

Si la señal adquirida es una función $\sin(\omega_0 t)$ en una ventana cuadrada de ancho T , la amplitud de la integral de Fourier (Int F) es $T/2$ y el ancho en la base del pico $4\pi/T$ ya que su transformada vale:⁴

$$F(\omega - \omega_0) = \frac{\sin\left[(\omega - \omega_0)\frac{T}{2}\right]}{\omega - \omega_0} \quad (2)$$

Se pretende que la FFT aplicada a una función sinusoidal digitalizada (f_s) en una ventana $T=N/f_s$, reproduzca lo más cercanamente posible los resultados esperados por la IntF, en especial cuando es importante determinar con exactitud la amplitud y la frecuencia central. Para ello se desarrolló un método simple iterativo, que se describe a continuación mediante algunos ejemplos.

Es normal la utilización de plaquetas de bajo costo que permiten adquisición de 1000 a 5000 muestras con frecuencia de muestreo de varios kHz.

Supongamos que se adquiere una señal sinusoidal centrada en $f_0=1\text{kHz}$, utilizando $N=5000$ y $f_s=150\text{ kHz}$. La transformada rápida de Fourier (FFT) calculada según (1) se muestra en la fig.1 en trazo lleno, donde los triángulos corresponden a las frecuencias que derivan del cálculo. Si se calcula la FFT dando a N distintos valores N_i , para cada valor de N_i se construirá otra escala de frecuencias dada por f_s/N_i con sus correspondientes amplitudes $h_{i,k}$, con lo cual se obtienen valores intermedios entre los correspondientes a nf_s/N , consiguiendo una mejor resolución en frecuencias. Este procesamiento numérico será llamado FFT de alta resolución (FFT AR).

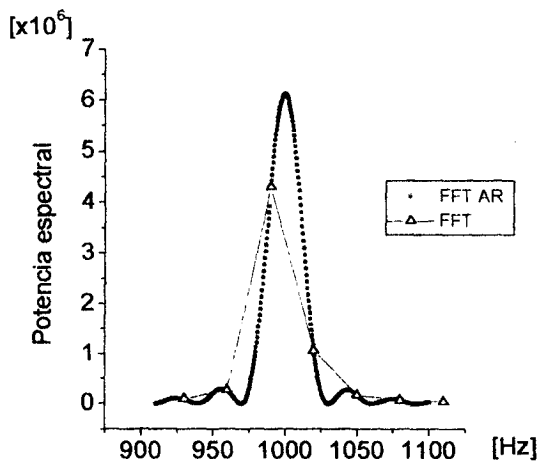


Figura 1

En la misma figura (puntos) se pueden observar los valores que se obtienen al calcular la FFT tomando N_i entre 4850 y 5000 en pasos de 2. El apartamiento que presenta la determinación de amplitud de la potencia espectral para 4850 muestras, respecto de la FFT sobre 5000 muestras, es $2\Delta T/T$ ($<6\%$). Aparece el resultado funcional esperado según la Int F (ec.2) así como una mejor determinación del máximo, que difiere en un 2% del calculado por IntF, y de la frecuencia central.

Si a la misma señal, centrada en $f_0=1\text{kHz}$, se aplica una frecuencia de muestreo $f_s=3\text{kHz}$, cercana a la frecuencia de Nyquist, tomando 5000 muestras se

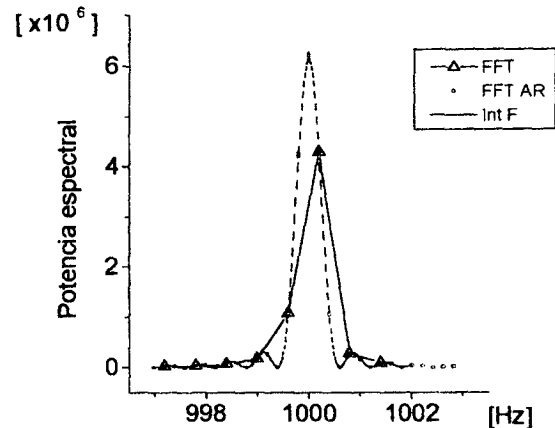


Figura 2.

obtienen los resultados de la fig.2, donde en trazo lleno se observan los resultados de la FFT realizada sobre $N=5000$, con los puntos del procesamiento FFT AR, variando N_i desde 4950 a 5000 en pasos de 2, y en trazos la IntF en la ventana dada por las 5000 muestras. Se puede observar la mejor definición obtenida con la FFT AR para la frecuencia central y la aparición de los lóbulos laterales, ocasionados por la ventana, así como la mejora en la determinación del máximo.

En muchas experiencias de física la magnitud que se mide obedece a un comportamiento ondulatorio amortiguado (emisión de radiación de un átomo⁵, ondas acústicas en un medio disipativo⁶, etc.). En general, interesa la determinación precisa del perfil resultante en el dominio de las frecuencias, que es lorentziano y cuyo ancho está definido por el tiempo de decaimiento. El ejemplo que se muestra en la fig.3 es la FFT de una función del tipo:

$$f(t) = \exp(-at) \sin(2\pi f_0 t) \quad (3)$$

donde $a = 1/0,02\text{ seg}$, $f_0=1\text{kHz}$, $f_s=85\text{kHz}$ y $N=5000$. Se eligieron estas condiciones como para asegurar que, en la ventana de adquisición y en las variaciones de la misma que se realiza con el método de FFT AR, el decaimiento valga $3/a$ para minimizar la discrepancia entre la potencia espectral obtenida por la IntF y por la DFT debido al ancho de la ventana, que vale $[1 - \exp(-aT)]^2$, donde

$T = N / f_s$. En trazo lleno se puede observar el perfil lorentziano correspondiente a la la IntF aplicada a la función (3). Se puede observar la buena coincidencia entre los puntos calculados por la FFT AR (línea de puntos) para N_i variando de 4900 a 5000 en pasos de 2 y la IntF y la mejora obtenida respecto de la simple aplicación de (1) (triángulos).

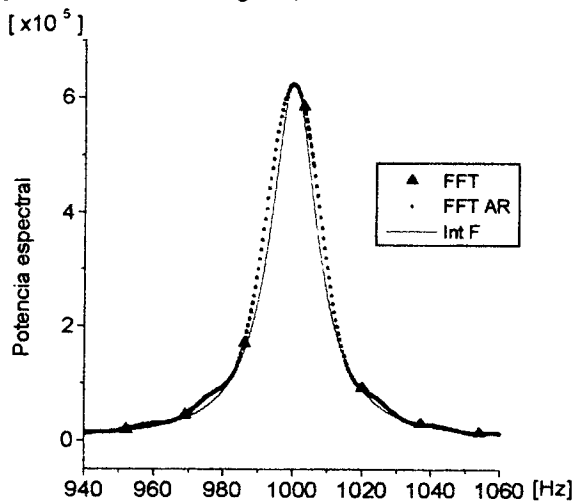


Figura 3

La ventaja de este método de procesamiento se hace especialmente evidente en el caso de querer resolver dos frecuencias muy cercanas, como puede suceder en un espectrómetro de FFT. En la fig. 4 se muestra la FFT (triángulos) y la FFT AR (puntos) de la suma de dos funciones sinusoidales con frecuencias 0,98 y 1 kHz respectivamente, con $f_s=30kHz$ y $N=2500$. Debe observarse cómo este método (variando N_i entre 2400 y 2500 en pasos de 2) permite la resolución de los dos picos.

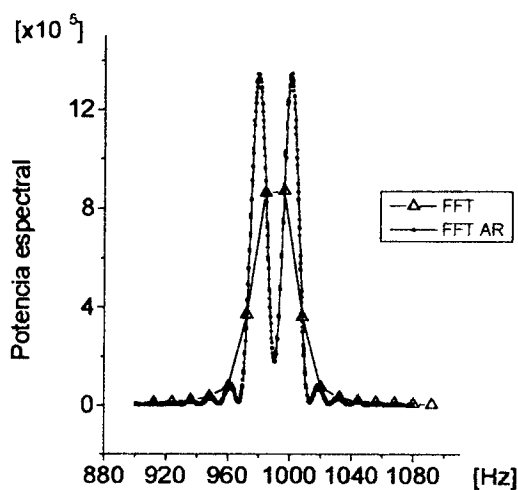


Figura 4.

Un ejemplo de aplicación en un caso experimental es el análisis de Fourier de una onda acústica estacionaria

que se produce en una mezcla de gases en una celda resonante, cuando uno de ellos es excitado por radiación láser pulsada. La onda estacionaria que se genera es amortiguada por procesos disipativos y, por lo tanto, se espera un perfil lorentziano en el espectro de potencia para cada uno de los modos de oscilación de la celda. La señal es adquirida con un osciloscopio digital con $f_s=100kHz$ y $N=5000$. En la fig.5 en trazo lleno y triángulos se observa lo que se obtiene aplicando la FFT según (1) a la señal y en punto y línea la FFT AR procesando sobre 4900 a 5000 muestras en pasos de 10. Es evidente la mejora substancial en la definición del pico obtenida con este método de procesamiento, que permite estimar con precisión la frecuencia central, la amplitud máxima y el ancho, el cual está relacionado con los procesos de pérdida de energía.

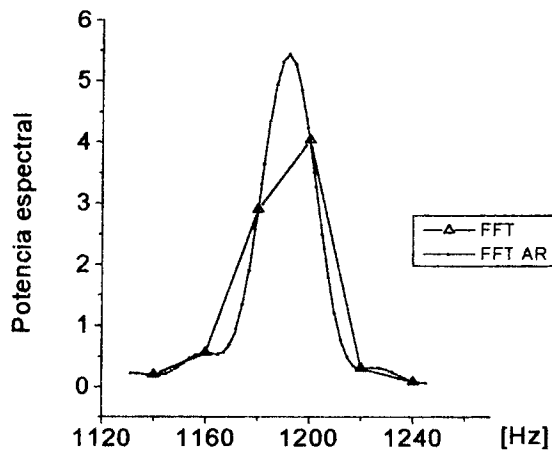


Figura 5.

Conclusiones

El método de procesamiento de señales basado en la FFT propuesto en este trabajo es muy poderoso ya que permite resolver frecuencias muy cercanas y definir con precisión amplitudes y anchos de picos en el espectro de frecuencia. Su aplicación está limitada a adquisiciones sobre un número de muestras tal que, utilizando variaciones del mismo en menos que el 10%, permita una resolución en el eje de frecuencias suficiente para los objetivos de la medición a realizar. La limitación es debida a los cambios de H al variar el ancho de la ventana.

La bondad del método reside en el hecho de que no está basado en interpolaciones sino, por el contrario, en un procesamiento sobre los datos adquiridos.

El tiempo de cálculo requerido es mayor que el esperado para la FFT, debido no sólo a la iteración sino también a la necesaria realización del cálculo de la FFT sobre un número no binario de muestras. En el caso del procesamiento de la señal acústica por la FFT AR con el programa comercial utilizado el tiempo de cómputo sin optimizar es de 5 segundos. Este valor es 50 veces mayor que el requerido por la FFT sobre 5000 muestras y éste a su vez el doble que para 4096 muestras.

Referencias

- 1 - W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling y B.P. Flannery: *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2ª Ed., Cambridge University Press, 1992.
- 2 - R Armentano, J. Fochesatto y M. Risk: *Análisis de Señales y Sistemas*, Vol. II, Ed. Rocamora, Buenos Aires, 1998.
- 3 - A.Samant y S.Shearman, IEEE Spectrum, Sep.1999, 82-86.
- 4 - A.Papoulis: *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.
- 5 - E.Hecht: *Optics*, 2ª Ed., Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- 6 - C.Brand, A.Winkler, P.Hess, A.Miklós, Z.Bozóki y J.Sneider, Appl. Opt. 34, 3257-3266 (1995).

CEILAP
CITEFA CONICET
ZUFRIATEGUI Y VARELA
1603 VILLA MARTELLI
REPUBLICA ARGENTINA