

Régimen autosimilar inercial en flujos de gravedad sobre fondos impermeables

B.M. Marino*, L.P. Thomas y R. Gratton

Instituto de Física Arroyo Seco, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro
PUNTO 399, 7000 TANDIL, ARGENTINA
e-mail: bmarino@exa.unicen.edu.ar

En este trabajo analizamos las corrientes de gravedad inerciales generadas en un tanque de sección rectangular por medio de una comparación detallada de las soluciones autosimilares planas. Esta comparación sugiere nuevas formas prácticas de determinar el régimen de la corriente y el cálculo de los parámetros empleados usualmente.

We compare in detail the well-known plane self-similar asymptotic solution for inertial gravity currents with experimental results obtained in a rectangular cross section channel. As a result, we get physical insight of the currents, and new practical forms to determine the flow regime and to estimate the parameters usually employed.

I. INTRODUCCIÓN

Las corrientes de gravedad inerciales tienen importancia para varias disciplinas científicas, ya que ocurren en diversas situaciones naturales.⁽¹⁾ Pueden ser caracterizadas por varios parámetros adimensionales simples, lo cual permite estudiarlas en el laboratorio por medio de experimentos relativamente sencillos.

Una notoria característica de este tipo de corriente es la presencia de una parte delantera o "cabeza", más profunda y turbulenta que el flujo que la sigue, donde se produce la mayor parte del mezclado con el fluido circundante. Esta región de fuerte mezclado es difícil de tratar teóricamente, por lo que generalmente se consideran condiciones de contorno equivalentes con parámetros semi-empíricos que reflejan propiedades promedio.

La evolución de las corrientes de gravedad ha sido estudiada teórica y experimentalmente desde hace varias décadas. Los estudios de Fay⁽²⁾, Fannelop & Waldman⁽³⁾, Hoult⁽⁴⁾ y Huppert & Simpson⁽⁵⁾ establecieron las bases teóricas del flujo originado por derrames instantáneos. Después de una primera etapa inicial, el flujo tiende a desarrollar una segunda etapa en la que la altura y velocidad del frente decrecen en forma sostenida por efecto de la expansión. Si el número de Reynolds cae lo suficiente, tiene lugar una tercera etapa en la que los efectos viscosos dominan el flujo, reduciendo aun más la velocidad del frente y suprimiendo la turbulencia en la cabeza.

La conducta de la etapa intermedia inercial puede deducirse de la solución autosimilar de las ecuaciones de aguas poco profundas despreciando el mezclado y tratando la región del frente como una condición de

contorno abrupta. Esta condición de contorno refleja la importancia que tiene la cabeza sobre la dinámica de la corriente⁽⁶⁾, y es expresada por el número de Froude justo detrás de la cabeza,

$$F = \frac{c}{\sqrt{g' h_*}} \quad (1)$$

donde c es la velocidad de la corriente, $g'_0 = g(\rho_1 - \rho_2/\rho_2)$ es la aceleración reducida (g' es la aceleración de la gravedad, ρ_1 es la densidad del fluido en la corriente y ρ_2 la densidad del fluido ambiente), y h_* es la profundidad de la corriente justo detrás de la cabeza si no hay mezclado.

En particular, la solución autosimilar⁽⁷⁾ en simetría plana para el derrame de un volumen finito A_0 en el interior de un fluido ambiente de profundidad infinita indica que la posición del frente x_f en función del tiempo está dada por

$$x_f = \xi (g'_0 A_0)^{1/3} t^{2/3} \quad (2)$$

donde ξ depende del número de Froude de acuerdo a la relación

$$\xi^3 = \frac{27F^2}{12 - 2F^2} \quad (3)$$

El perfil de altura, por otra parte, viene dada por

$$\frac{h(x/x_f)}{h_f} = \frac{x_f}{x} \left[\frac{F^2}{4} + \left(1 - \frac{F^2}{4} \right) \left(\frac{x}{x_f} \right)^2 \right] \quad (4)$$

* Autor a quién debe dirigirse la correspondencia.

donde

$$h_f = \left(\frac{12}{12 - 2F^2} \right) \left(\frac{A_0}{x_f} \right) \quad (5)$$

Resultados experimentales obtenidos en tanques de algunos metros de longitud sugieren que la evolución del frente tiende al régimen autosimilar con un número de Froude similar al predicho teóricamente. En general este régimen se obtiene cuando los efectos viscosos son despreciables ($Re \gg 1$), se verifica una cierta simetría (plana, axial), la intrusión de fluido se realiza de determinada manera (volumen constante, ingreso de líquido proporcional a t^α), y la influencia de las condiciones iniciales pueden considerarse despreciables (tiempos mucho mayores que el tiempo característico inicial).⁽⁸⁻¹³⁾

Si bien el comportamiento cualitativo coincide, quedan algunas cuestiones teóricas y prácticas por resolver. En particular, no es claro porqué el mezclado y sus consecuencias no afectan sustancialmente la dinámica de la corriente. Tampoco es claro cómo calcular adecuadamente el número de Froude de las experiencias, ya que la cabeza tiene una densidad que varía con el tiempo, y su altura es mayor que la predicha. Además, hasta el momento no se ha reportado una comparación de los perfiles de las corrientes que permitirían una idea más acabada del acuerdo entre la teoría autosimilar y las corrientes reales.

Este trabajo muestra los resultados de una comparación entre las soluciones teóricas autosimilares y resultados experimentales, basada en la medición de las distribuciones de densidad de corrientes de gravedad inerciales generadas en un tanque de sección rectangular. Esencialmente se comparan los perfiles de altura y el número de Froude en la cabeza teóricos y experimentales, y se determinan criterios para la aplicación de las soluciones autosimilares.

II. DESARROLLO EXPERIMENTAL

Las corrientes de gravedad son generadas en un tanque de 300 cm de largo, 20 cm de ancho y 60 cm de alto, con paredes laterales de acrílico transparente que permiten la observación lateral. El reservorio o dique que contiene el fluido denso es definido por una compuerta vertical colocada a una distancia x_0 de la pared trasera del tanque. El dique se carga con agua salada y el resto del tanque se llena con agua común hasta la profundidad H . La cantidad conocida de sal disuelta en el agua del dique crea una diferencia de densidad $\Delta\rho$ controlada entre las dos secciones del tanque. El experimento comienza cuando la compuerta es removida rápidamente, dejando fluir la corriente de agua salada sobre el fondo. Los experimentos descriptos aquí se llevaron a cabo para una longitud inicial $x_0 = 10$ cm, variando la diferencia relativa de densidad $\Delta\rho/\rho$ (0.1, 0.6, 1 y 3 %), y la altura inicial del fluido denso $h_0 = H$

= 10, 20, 30 y 40 cm. También realizamos experiencias con profundidad fraccional inicial $h_0/H \neq 1$.

La distribución de densidad para diferentes tiempos es determinada procesando digitalmente las imágenes tomadas por una cámara lejana. La técnica utilizada se basa en la atenuación de la iluminación proveniente de un panel situado detrás del tanque por la presencia de colorante en el agua salada. De esta forma medimos la concentración promedio de colorante transversalmente a la corriente y con ella la densidad promedio en la misma dirección. Integrando la distribución de densidad calculamos la masa (constante) de agua salada presente para distintos tiempos, lo cual permite verificar el procesamiento empleado.

III. RESULTADOS

La Fig. 1 muestra la evolución del frente en unidades de x_0 para varios experimentos típicos. La línea de trazos representa la etapa inicial, la línea continua corresponde al régimen autosimilar, y la línea de puntos describe la etapa viscosa. Observar que el comienzo y posterior apartamiento de la etapa autosimilar se realiza en forma paulatina, y que esta etapa es muy corta (si se desarrolla realmente) para pequeños volúmenes derramados (círculos en la Fig. 1). Este tipo de gráfico es comúnmente empleado para determinar el régimen de la corriente, conduciendo a importantes imprecisiones. La confusión se debe también a los altos valores del número de Reynolds medidos en toda la evolución, que hacen presuponer que los efectos de la viscosidad sobre el flujo son completamente despreciables.

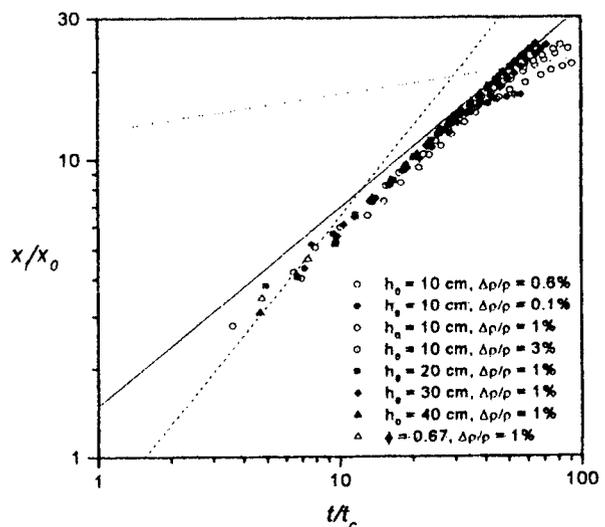


Fig. 1: Posición del frente en función del tiempo adimensionalizados con los valores característicos de la etapa inicial.

La velocidad del frente $v_f = dx/dt$ se puede emplear para una mejor determinación del tipo de flujo desarrollado. La Fig. 2 muestra v_f obtenida a partir de los valores de x_f para los mismos experimentos de la

Fig. 1, convenientemente adimensionalizada. Después de un lapso inicial con velocidad aproximadamente constante, existe un cambio de tendencia sugerida por la recta de trazo continuo correspondiente a la etapa inercial autosimilar. Con posterioridad la velocidad puede decrecer bruscamente indicando un cambio en el flujo donde los efectos viscosos no pueden despreciarse. Claramente, esta forma de representación resulta más adecuada para detectar la salida del régimen autosimilar.

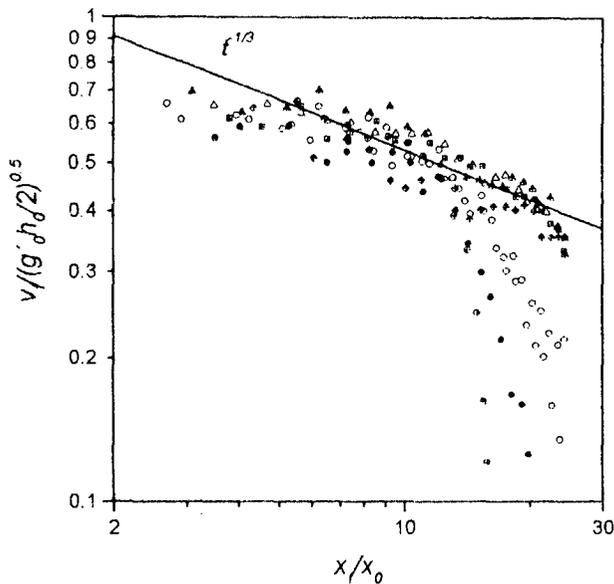


Figura 2: Velocidad del frente adimensionalizada con $(g_0 h_0/2)^{0.5}$ (básicamente el valor de la velocidad inicial). La recta representa al régimen inercial autosimilar: $v_f \propto (x/x_0)^{0.3}$.

La dificultad principal para comparar los perfiles obtenidos de los experimentos con los provistos por el análisis teórico es el mezclado, siempre presente en los experimentos e ignorado completamente en la aproximación teórica. Dado que la dinámica de la corriente está determinada por la presión hidrostática en la aproximación de aguas poco profundas, determinamos un perfil "equivalente" a partir de los datos experimentales. Este perfil surge de integrar la distribución de densidad instantánea en la coordenada vertical y para cada posición x ; es decir

$$h_e(x,t) = \frac{1}{\rho_0} \int_0^\infty \rho(x,y,t) dy. \quad (6)$$

De este modo, la altura equivalente de la corriente es la resultante de comprimir el fluido en sentido vertical hasta que su densidad iguale su valor inicial ρ_0 para el que no existía mezclado, equiparando las presiones hidrostáticas sobre el fondo del tanque.

La obtención del valor de altura del frente, necesario para adimensionalizar los perfiles de altura, representa una dificultad adicional. La altura de la

cabeza de la corriente no se corresponde con h_f , y por lo tanto no puede ser empleada directamente. La altura detrás de la cabeza, sugerida por algunos autores, no es un parámetro sencillo de medir en todos los casos. Aquí emplearemos el valor h_f de la altura del frente teórica correspondiente a la posición del frente en ese instante y al volumen de fluido denso del experimento en cuestión, de acuerdo a la Ec. (5).

La Fig. 3 muestra algunos perfiles representativos de altura equivalente para distintos instantes de la evolución de una corriente típica. Incluimos en esta figura los perfiles autosimilares inerciales teóricos para dos valores del número de Froude, y el perfil autosimilar para un régimen viscoso. La comparación de los resultados experimentales y teóricos sugiere que los perfiles seleccionados corresponden a la etapa autosimilar inercial con $1.2 < F < 1.4$. Es notorio también que la cabeza de la corriente, no contemplada por la teoría, está constituida por una cantidad importante de fluido denso aún para tiempos avanzados del experimento. A medida que la corriente evoluciona, los perfiles dibujados muestran una disminución apreciable del tamaño de la cabeza y la distribución de altura parece que tiende a la del régimen en el que dominan los efectos viscosos.

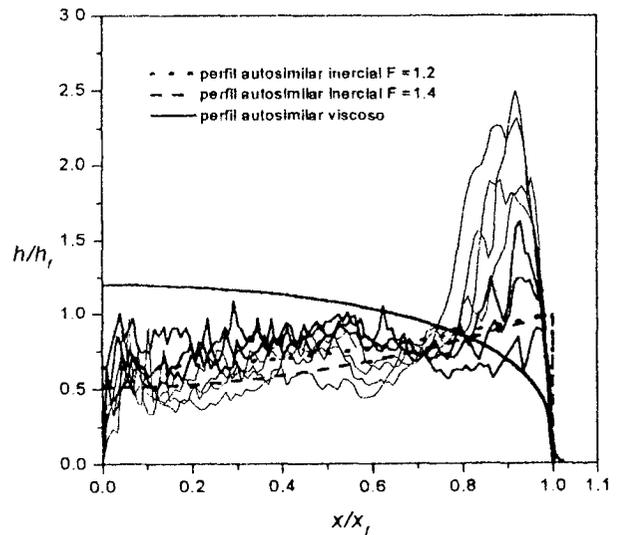


Figura 3: Perfiles equivalentes para un flujo gravitatorio típico para el que $x_0 = 10$ cm, $\Delta\rho/\rho = 3\%$, $\phi = 0.67$. Los perfiles de trazo grueso corresponden a los últimos tres de la secuencia obtenida, cuando se considera que el flujo gravitatorio ha desarrollado completamente el régimen inercial autosimilar.

Para obtener F experimentalmente recurrimos a los valores que podemos medir con relativa sencillez: la velocidad v_f y la máxima profundidad de la cabeza de la corriente, h_h . El valor de la gravedad reducida en la zona delantera del flujo varía debido al mezclado durante la evolución. En consecuencia, consideramos la variación de concentración de fluido denso reemplazando g_0 en la

Ec. (2) por medio del valor promedio $g'(t) = g'_0 \rho_p(t) / \rho_0$ en este sector de la corriente, siendo $\rho_p(t)$ la concentración media de fluido denso en la zona donde h_h es medida.

La Fig. 4 muestra la evolución del número de Froude calculado en la forma descrita anteriormente para los mismos experimentos de la Figura 1. Su valor se mantiene prácticamente constante durante casi toda una experiencia después algunas variaciones suaves observadas en la etapa inicial. Por el contrario, el valor calculado por la Ec. (1) directamente no se mantiene constante. La diferenciación de los dos regímenes señalados en la figura proviene del análisis de la Fig. 2. En la Fig. 4 no se han incluido los puntos correspondientes a la transición al régimen viscoso, para el que F ya no es constante.

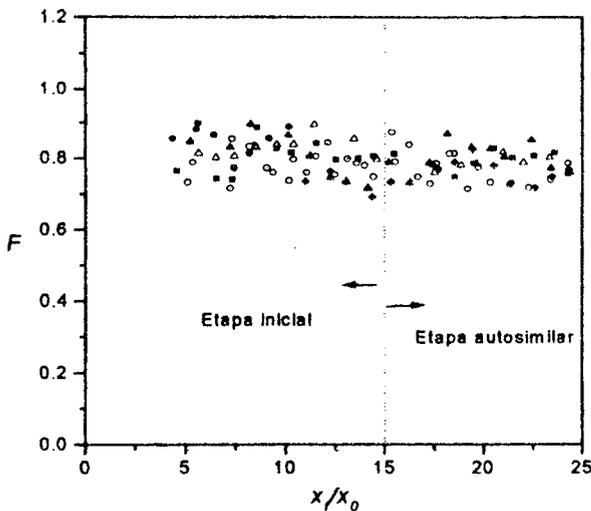


Fig. 4: Evolución del número de Froude para los mismos experimentos de Fig. 1 y 2.

La Fig. 4 sugiere un valor $F \approx 0.8$, valor muy diferente del $F \approx 1.2$ sugerido por la Fig. 3. Se deduce, entonces, que el valor de la altura h_* efectiva en la Ec. (1) es aproximadamente 0.6 del valor medido de h_h , lo cual es consistente con los perfiles obtenidos en la Fig. 3.

Una verificación adicional la brinda la relación entre ξ y F dada por la Ec. (3), donde los dos parámetros se miden en forma independiente. Como podemos observar de la Fig. 5, los resultados experimentales empleando $h_* = 0.5 h_h$ concuerdan razonablemente con la predicción teórica autosimilar.

IV. CONCLUSIONES

La evolución de la posición del frente suele conducir a resultados confusos y a sobrestimar la permanencia en el régimen inercial autosimilar. Las distribuciones de densidad indican que el mezclado entre el fluido denso y el ambiente es importante durante toda la evolución del flujo. Aunque sus efectos son más notables en la cabeza, afecta a toda la corriente y debe

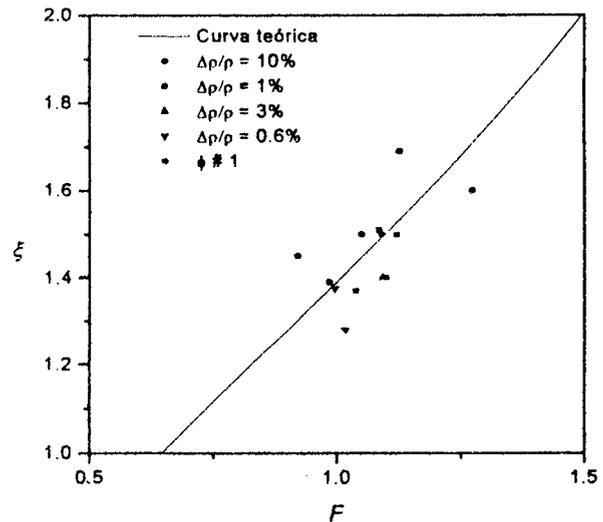


Fig. 5. Valores experimentales del coeficiente de proporcionalidad en la evolución del frente (ver Ec. 2) en función del número de Froude. La línea curva representa la Ec. (3).

ser considerado en el procesamiento de la información obtenida en el laboratorio.

La razón por la cual los resultados no son sensibles al mezclado entre la corriente y el fluido ambiente radica en el tipo de relación entre la densidad y el volumen de la corriente. El mezclado reduce la gravedad reducida g' pero aumenta el volumen en una proporción semejante, de modo que la presión hidrostática media en la corriente se mantiene aproximadamente constante. Hemos empleado con éxito este concepto para definir una altura equivalente (Ec. 6) y para calcular la gravedad reducida promedio en el entorno del frente. Esta metodología lleva a resultados consistentes y criterios prácticos para la comparación de resultados experimentales con predicciones teóricas y numéricas en las cuales se desprecia el mezclado.

Este trabajo además pone en evidencia otros resultados adicionales:

- + La velocidad y la altura de la cabeza son parámetros mucho más sensibles para determinar el régimen de la corriente que la posición del frente $x_f(t)$. Es notable la disminución de h_h cuando los efectos viscosos comienzan a ser importantes (Fig. 3).

- + Las consecuencias de las condiciones iniciales pueden percibirse incluso hasta $x_f/x_0 = 25$.

- + La altura de la cabeza equivalente para los perfiles autosimilares es aproximadamente 0.6 de la altura h_h medida en los experimentos.

- + La masa de fluido denso que compone la cabeza de una CG es una fracción importante de la masa total de la corriente, aproximadamente

Referencias

- 1 - Simpson, J.E. Gravity currents: In the environment and the laboratory. 2nd Ed. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1997).
- 2 - Fay, J.A. The spread of oil slicks on a calm sea, in "Oil on the Sea", Hoult, D.P., Ed. pp. 43-63, Plenum (1969).
- 3 - Fannelop, T.K and G.D. Waldman. Dynamics of oil slicks. AIAA J. **10**, 506-510 (1972).
- 4 - Hoult, D.P. Oil spreading on the sea. Ann. Rev. Fluid Mech. **4**, 341- 368 (1972).
- 5 - Huppert, H.E., and J.E. Simpson. The slumping of gravity currents. J. Fluid Mech. **99**, 785-799 (1980).
- 6 - Benjamin, T.B. Gravity currents and related phenomena. J. Fluid Mech. **31**, 209-248 (1968).
- 7 - Gratton J. and C. Vigo. Self-similar gravity currents with variable inflow revisited: plane currents. J. Fluid Mech. **258**, 77-104 (1994).
- 8 - Simpson J.E. and R.E. Britter. The dynamics of the head of a gravity current advancing over a horizontal surface. J. Fluid Mech. **94**, 477-495 (1979).
- 9 - Rottman, J.W. and J.E. Simpson. Gravity currents produced by instantaneous releases of a heavy fluid in a rectangular channel. J. Fluid Mech. **135**, 95-110 (1983).
- 10- Simpson, J.E. Effects of the lower boundary on the head of a gravity current. J. Fluid Mech. **53**, 759-768 (1972).
- 11- Grundy, R. E. and J.W. Rottman. The approach to the self-similarity of the solutions of the shallow-water equations representing gravity current releases. J. Fluid Mech. **156**, 39-53 (1985).
- 12- Hacker, J., P.F. Linden and S.B. Dalziel. Mixing in a lock-release gravity currents. Dyn. Atmos. Oceans **24**, 183-195 (1996).
- 13- Parsons J.D. and M.H. Garcia. Similarity of gravity current fronts. Phys. Fluids **10**, 3209-3213 (1998).