

# PROBLEMAS CONCEPTUALES Y OPERATIVOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS LEYES INTEGRALES DEL ELECTROMAGNETISMO

## TEACHING INTEGRAL LAWS OF ELECTROMAGNETISM: CONCEPTUAL AND OPERATIONAL PROBLEMS

Francisco Albani, Santiago González Zerbo, Lucas Perfumo, Juan Pablo Robbiano, Daniela Yovine, Liliana Pérez, Guillermo Santiago

Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, UBA, Paseo Colón 850, Argentina

En los cursos elementales de Electricidad y Magnetismo las ecuaciones de Maxwell son introducidas primero en forma integral para luego exponerlas en forma diferencial. Esta última no es utilizada operativamente dado que los alumnos no han adquirido los conocimientos matemáticos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Entonces, la forma integral es la preferida para exponer los principios básicos y, como beneficio extra, calcular los campos para ciertas configuraciones simples. Lamentablemente, varios de los ejemplos se refieren a sistemas de dimensiones no acotadas (hilo o plano infinito uniformemente cargados) o que requieren de una simetría perfecta (anillo de Rowland), que no siempre son asequibles. Si bien los resultados son obtenidos con poca dificultad algebraica, los alumnos encuentran difícil comprender las limitaciones del modelo cuando es llevado a situaciones reales. Para subsanar esta dificultad decidimos realizar, entre docentes y alumnos ya formados, una experiencia educativa dirigida a identificar las dificultades más habituales y proponer caminos para remover estos puntos oscuros.

Elementary courses on Electricity and Magnetism introduce Maxwell's equations firstly in their integral form and the differential form is explained later on. The differential form is not employed to solve problems because the students do not have the mathematical background required to solve partial differential equations. Therefore, the integral form is the preferred one for explaining the basic principles and, as an extra bonus, to compute the fields generated by simple charge distributions. Unfortunately, many examples rely on unbounded systems (infinitely long wire or charged plane) or highly symmetrical objects (Rowland's ring). Even though the fields can be obtained with little mathematical effort, many students find difficulties in obtaining the limits of the model when it is applied to real cases. To overcome this issue, we decided to carry out a new teaching experience, joining the efforts of seasoned teachers and advanced students, directed to identify and remove the most common preconceptions and mistakes.

KEYWORDS: Enseñanza, Electricidad y Magnetismo

### I. Planteo del problema y una aproximación a su solución

La enseñanza de los conceptos básicos de campos en Electricidad y Magnetismo suele darse primero a través de leyes de Coulomb y de Biot-Savart. A partir de éstas se deducen las propiedades de los campos, las que son expresadas a través de los teoremas de Gauss y Stokes (en forma integral), para luego pasar a exponerlas en forma diferencial a través de los operadores divergencia y rotor.

Los alumnos que asisten a estos cursos de Electricidad y Magnetismo conocen los conceptos de flujo y circulación de un campo vectorial, así como los teoremas correspondientes. Sin embargo, no han tenido ocasión de adquirir fluidez en el manejo de dichas herramientas por lo que requieren aún de soporte por parte del docente para operar correctamente con dichos conceptos.

Más aún, la enseñanza de temas de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, por ejemplo la de Poisson, pertenece a cursos de matemática que no todos los alumnos están obligados a cursar.

La formulación integral es totalmente adecuada para describir, en este nivel introductorio, las propiedades de los campos <sup>(1-3)</sup>.

Por tradición histórica, quizás para mostrar la "utilidad" de las leyes de Gauss y de Ampère, se muestra cómo éstas son herramientas que permiten calcular los campos en algunas situaciones simples. Estos casos son muy pocos y lamentablemente hay una tendencia por parte de algunos estudiantes a memorizar el resultado.

correspondiente sin ahondar en los conceptos que fundamentan el resultado. Aquí aparece un primer problema serio: numerosos alumnos consideran que las leyes de Gauss o Ampère tienen validez sólo en los casos "privilegiados" en los que se puede calcular el campo. Otros, en mejor posición, al verse confrontados con el cálculo de la cantidad de carga encerrada en un volumen o la corriente abrazada por un camino, consideran que el único camino posible es través de la evaluación del flujo del campo eléctrico o la circulación del campo magnético sin siquiera considerar la posibilidad, ciertamente más simple, de computar la cantidad de carga o la corriente. La corrección de este defecto requiere de bastante esfuerzo porque las leyes de Gauss o Ampère tienden a leerse de izquierda a derecha (íntegro el campo para obtener así la carga o la

corriente...) y porque al centrar la atención en los ejemplos simples, se pierde la idea general.

Para mayor complejidad, algunos de los ejemplos elementales involucran sistemas no acotados, particularmente un alambre rectilíneo o un plano, ambos de extensión infinita.

Hemos notado que estos ejemplos simples muchas veces no sirven a su objetivo original; por el contrario, tienden a conformar un conjunto de estereotipos muy difíciles de remover.

Un problema estriba en distinguir el “infinito matemático” del “infinito físico”. Por haber tenido mucho más contacto con los cursos de matemática que con los de física, los alumnos demandan del segundo las mismas propiedades que del primero. Esto se traduce en una dificultad en comprender que las dimensiones, como cualquier otra variable física, son grandes o pequeñas en relación a otras. Es entonces que muchos alumnos no pueden decidir, ante una situación concreta, si los campos obtenidos para sistemas infinitos son razonablemente representativos, y con qué tasa de error, para el problema planteado. Entonces demandan del docente una palabra de autoridad que les fije el camino a tomar, sin indagar las razones. Esta es una costumbre cuyos orígenes son complejos y serían motivo de otro trabajo, pero a los fines prácticos se traduce en una total incapacidad de proceder independientemente.

Después de enfrentarnos muchos años a estos problemas, decidimos llevar a cabo una experiencia piloto dirigida a alumnos dispuestos a aceptar desafíos, junto con colaboradores (alumnos que ya habían aprobado) para remover estos preconceptos y expandir la capacidad crítica de los alumnos.

Las herramientas utilizadas son por demás simples y se reducen a la aplicación sistemática de la ley de Coulomb o de Biot-Savart pero utilizando, por primera vez en estos cursos, la presentación de expresiones en las que aparezcan los cocientes de dimensiones para tender naturalmente al análisis de lo pequeño o lo grande. Con esta presentación enfatizamos cómo los resultados obtenidos por un camino u otro van convergiendo suavemente sin quiebres abruptos. Este punto es particularmente sensible porque muchos estudiantes esperan definiciones tajantes del estilo: “Si el largo del objeto es superior a la distancia en más de tantas veces, entonces...”. Expresiones como la anterior son aún habituales en el ámbito universitario y encajan perfectamente con la formación normativa que reciben la mayoría de los adolescentes en la escuela secundaria. Las leyes de Coulomb y Biot-Savart son impopulares porque requieren parametrizar distribuciones de cargas o corrientes para luego integrar (proceso penoso para muchos). Por eso el “uso práctico” de las leyes de Gauss y Ampère goza de favor pero tiende a transformarse en una actividad automatizada.

El análisis que expondremos a continuación es básico y está limitado al cálculo de campos eléctricos pero, en lo mejor de nuestro conocimiento, no está presentado en ninguno de los textos básicos.

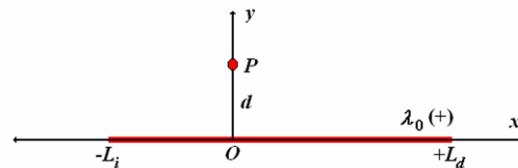


Figura 1. Distribución lineal de carga uniforme

Comenzamos por el caso más simple ilustrado en la figura 1

Una distribución lineal y uniforme de carga, de densidad lineal  $\lambda_0$  se encuentra sobre el eje  $x$  de un sistema de coordenadas. La distribución tiene por límites  $-L_i$  y  $+L_d$ . Sobre el eje  $y$  se encuentra el punto de observación  $P$ , a una distancia  $d$  de la distribución de carga. Se desea conocer el campo eléctrico en el punto de observación.

La aplicación directa de la ley de Coulomb indica que el campo vale:

$$E_x(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L_i}^{+L_d} \frac{(-x')\lambda_0 dx'}{(x'^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x'^2 + d^2)}} \Bigg|_{-L_i}^{+L_d} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(L_d^2 + d^2)}} - \frac{1}{\sqrt{(L_i^2 + d^2)}} \right] \quad (1)$$

$$E_y(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L_i}^{+L_d} \frac{(d)\lambda_0 dx'}{(x'^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{d\sqrt{(x'^2 + d^2)}} \Bigg|_{-L_i}^{+L_d} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 d} \left[ \frac{L_d}{\sqrt{(L_d^2 + d^2)}} + \frac{L_i}{\sqrt{(L_i^2 + d^2)}} \right]$$

$$E_z(P) = 0$$

Ahora damos un paso simple pero que en la formación de nuestros alumnos aparece por primera vez. Transformamos la (1) para expresarla en términos de  $L_i/d$  y  $L_d/d$  y así guiarlos al concepto de variables normalizadas que les permita hacer comparaciones con facilidad. Asimismo, reelaboramos la expresión para mostrar el término que obtendríamos para el caso de una distribución de largo infinito ( $E_x=0$ ,  $E_y=1/(2\pi\epsilon_0 d)$ ,  $E_z=0$ ).

$$E_x(P) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 d} \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{(L_d/d)^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{(L_i/d)^2 + 1}} \right]$$

$$E_y(P) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 d} \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{L_d/d}{\sqrt{(L_d/d)^2 + 1}} + \frac{L_i/d}{\sqrt{(L_i/d)^2 + 1}} \right] \quad (2)$$

$$E_z(P) = 0$$

Para el docente entrenado la transformación es mínima, pero para el alumnado es totalmente novedosa porque por primera vez expresa un resultado en función de razones de dimensiones. Ser puede apreciar que el primer factor de las ecuaciones (2) ( $\lambda_0/2\pi\epsilon_0 d$ ) es el módulo del campo eléctrico generado por una distribución de largo infinito. Los restantes términos pueden entenderse entonces como sendos factores  $F_x$  y

$F_y$  que modifican al resultado anterior. El primer análisis que hacemos simplemente estudia qué sucede cuando el largo de la distribución tiende a infinito y el punto de observación se encuentra centrado ( $L_i=L_d=L$ ). De esta condición obtenemos  $E_x(P)=0$ , lo que es fácilmente explicable por argumentos de simetría y la dependencia de  $E_y(P)$  con la razón  $L/d$  es mostrada en la figura 2. Primero mostramos cómo a pesar de tener algunos elementos de simetría, no es posible calcular el campo eléctrico por medio de la ley de Gauss dada la imposibilidad de encontrar una superficie cerrada sobre la cual el módulo del campo permanezca constante.

Posteriormente mostramos a los alumnos cómo el factor  $F$  tiende rápidamente a 1, es decir que el largo de la distribución no debe ser estrictamente infinito para que apliquen los resultados simples. De hecho, muchos se sorprenden al ver que basta con que el largo sea unas cinco veces superior a la distancia para que el factor de corrección sea muy próximo a la unidad.

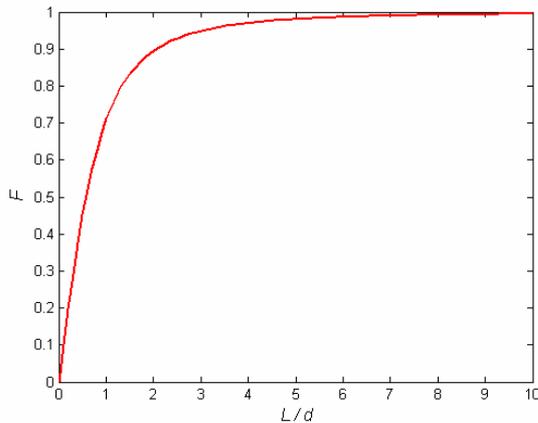


Figura 2. Factor de corrección  $F$  en función de  $L/d$

Por haber elegido  $L_i=L_d=L$  el problema es más sencillo porque queda garantizada la nulidad de la componente  $x$  del campo y el único factor de corrección  $F_y$  depende de una única variable. A partir de este caso pasamos a analizar el caso general en el que los factores  $F_x$  y  $F_y$  dependen de dos variables y tenemos dos superficies, las que mostramos en las figuras 3 y 4

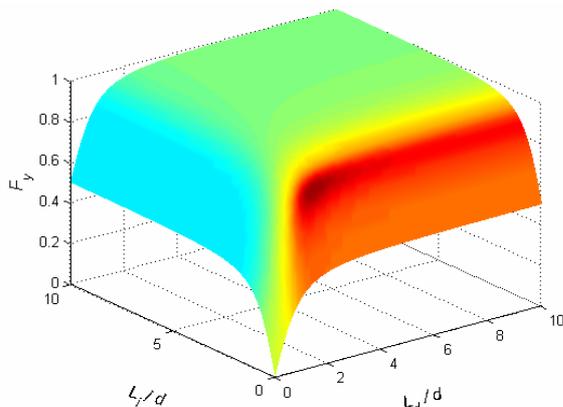


Figura 3. Factor de corrección  $F_y$  en función de  $L_i/d$  y  $L_d/d$

Estas figuras son las que aportan mayor riqueza a la discusión.

La primera gráfica muestra que si el punto de observación se encuentra sobre uno de los extremos de la distribución y la razón  $L/d$  tiende a valores grandes (sistema semi-infinito), entonces la componente  $E_y$  del campo es 0,5 de la correspondiente al caso de una distribución infinita. Esto es totalmente comprensible desde el punto de vista de la ley de Coulomb si se analiza el integrando

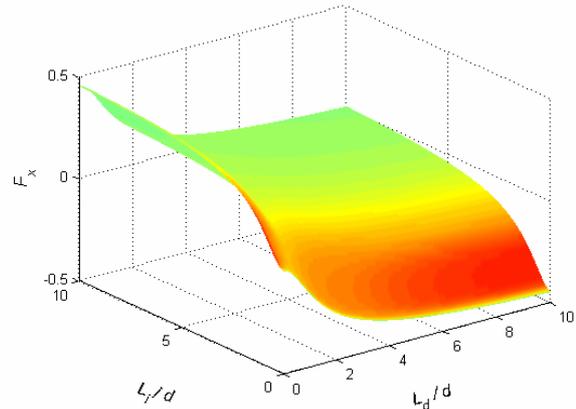


Figura 4. Factor de corrección  $F_x$  en función de  $L_i/d$  y  $L_d/d$

Lamentablemente muchos alumnos llegan a este valor desde un razonamiento erróneo; dicen que el largo de la distribución es infinito, pero que al mismo tiempo “le falta la mitad” (nótese la curiosa contradicción), por lo que entonces es razonable que el resultado sea la mitad del que tendría el sistema si estuviera “entero”. Aquí es donde debemos hacer hincapié en que las condiciones requeridas para utilizar el teorema de Gauss como herramienta para determinar el módulo del campo no se satisfacen porque la distribución de carga carece de las condiciones de simetría necesarias. La figura 4, en la que presentamos el factor  $F_x$  ayuda al alumno a comprender que hay más diferencias en el resultado que las que muestra el factor  $F_y$ .

Puede abrirse aquí una discusión sobre cuál de los dos factores es la “mejor” herramienta para analizar el problema. En este punto los alumnos argumentan a favor de uno u otro, algunos prefieren  $F_y$  porque cuantifica la cercanía al valor del sistema infinito. Otros prefieren  $F_x$  porque revela cuánto nos alejamos del valor nulo. En general las discusiones son ricas y permiten a los alumnos notar sutilezas que no habían apreciado en un primer momento. En general tiende a haber una preferencia por considerar el factor  $F_y$  e inevitablemente preguntan por la regla que establezca cuál es valor mínimo que puede tomar  $F_y$  para que la aproximación sea “válida”. Como ya mencionamos anteriormente, los alumnos están condicionados por una formación normativa que les ha dado reglas y en este caso también la buscan. Cuesta mucho convencerlos de que sin datos extras es imposible decidir por una cota porque no están acostumbrados a prefiar cotas de error en función de información suplementaria.

El segundo ejemplo conflictivo corresponde al de un plano infinito. La aproximación más simple, vista en algunos textos, implica computar el campo generado por un disco de radio  $R$ , que yace sobre el plano  $xy$ , y que se encuentra uniformemente cargado con una densidad superficial uniforme  $\sigma_0$ . El campo es computado sobre puntos que pertenecen al eje  $z$  que pasa por el centro del disco para evitar el cómputo de integrales elípticas. En estas condiciones el campo sólo tiene componente a lo largo del eje  $z$  que vale:

$$E_z(P) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z)}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' d\phi' =$$

$$\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left. \frac{-z}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \right|_0^R = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[ \text{sign}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] =$$

$$\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{(R/z)^2 + 1}} \right]$$

Conforme  $R/z \rightarrow \infty$  obtenemos el conocido resultado correspondiente a la distribución plana infinita  $E_z(P) = \sigma_0/2\epsilon_0$ ; el factor restante nuevamente mide el apartamiento entre el sistema finito y el infinito.

Visualizar el infinito es siempre difícil y, por alguna razón, algunos lectores esperan que resultados distintos si consideramos un rectángulo cuyos lados crecen.

Es fácil plantear las integrales a resolver en el caso de contar con una distribución plana rectangular, pero la resolución es tediosa por lo que preferimos presentar los resultados para evitar correr la atención del problema físico al matemático. Si consideramos como fuente a un cuadrado de lado  $2L$  que yace sobre el plano  $xy$  y como punto de observación a uno ubicado sobre la normal al plano a una distancia  $z$  sobre la intersección de las diagonales del cuadrado, nuevamente la única componente de campo es  $E_z(P)$  y vale:

$$E_z(P) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \frac{2}{\pi} \arctan \left[ \frac{(L/z)^2}{\sqrt{2(L/z)^2 + 1}} \right]$$

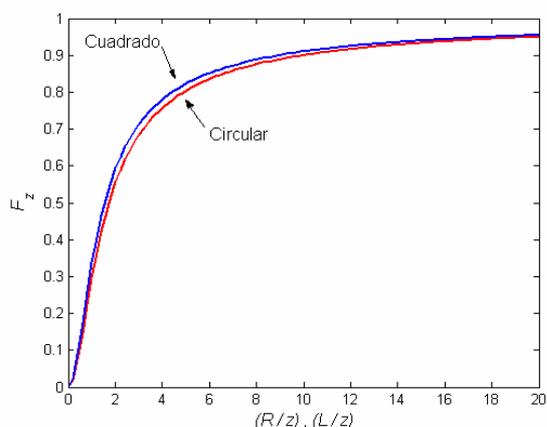


Figura 5. Factor de corrección  $F_z$  en función de  $R/z$  y  $L/z$

La figura 5 compara los resultados de las ecuaciones e ilustra a los alumnos que no hay mucha diferencia en el comportamiento de ambas distribuciones conforme crecen las dimensiones.

Lamentablemente, estudiar una distribución circular fuera de su eje, o una cuadrada descentrada lleva a integrales mucho más complejas que ya no agregan conceptos útiles por lo que decidimos no desarrollarlos en clase.

Igualmente con los ejemplos anteriores el objetivo original queda satisfecho. Los alumnos consiguen conectar la transición entre un sistema finito a uno infinito con menos problemas. El progreso más importante es que estos elementos son capaces de discernir en qué medida un sistema "grande" puede ser considerado infinito.

Idéntico camino utilizamos en la enseñanza de la ley de Ampère a partir de la ley de Biot-Savart, que no repetimos aquí por ser conceptualmente muy similares.

### Conclusiones.

Este trabajo es simplemente una aplicación directa de las leyes básicas. Sin embargo, no lo hemos visto desarrollado en ningún libro típico de un curso introductorio de Electricidad y Magnetismo, lo que genera así un vacío innecesario en la formación. Además, con esta aproximación, tratamos de evitar el excesivo énfasis en considerar las leyes de Gauss y de Ampere como herramientas específicas, aptas para determinados casos privilegiados. Las curvas mostradas son utilizadas en clase, con buen resultado, para disparar un proceso crítico por parte del estudiantado. Evitamos también la demanda de una "voz de autoridad" que prescriba cómo considerar una situación particular.

### Referencias

1. J.P. McKelvey y H. Grotch: "Física para Ciencias e Ingeniería", Tomo II (Electromagnetismo), Ed. Harla, México, 1981.
2. F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young y R. A. Freedman: "Física Universitaria", Vol. II, Pearson, 1999
3. R. Serway y J. Jewet, "Física para Ciencias e Ingeniería" Vol 2, Thomson, 2006