

La fuerza de marea y el límite de Roche

Julio Gratton^{1,2,*} y Carlos Alberto Perazzo^{1,3,**}

¹Investigador del CONICET.

²INFIP-CONICET, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
UBA, Ciudad Universitaria, Pab. I, 1428 Buenos Aires.

³Universidad Favaloro, Solís 453, 1078 Buenos Aires.

Se explica en términos accesibles a estudiantes de los primeros años el origen y las características del campo de marea y algunos de sus efectos, incluyendo el límite de Roche, que determina la distancia mínima a la cual un satélite puede orbitar sin romperse por efecto de la fuerza de marea y también la distancia mínima a la cual se puede formar un satélite por acreción de masa.

We explain in simple terms at the level of degree students the origin and characteristics of the tidal field and some of its effects, including the limit of Roche, that determines the minimum distance where a satellite can orbit and not to break up due to the tidal forces, as well as the minimum distance where a satellite can be formed by accretion.

I. FUERZA DE MAREA

El origen de la fuerza de marea fue explicado por Newton en sus *Principia* y se debe a los efectos sobre la Tierra de la no uniformidad del campo gravitatorio de la Luna y del Sol. Pese a que se puede explicar de manera sencilla con elementos de Mecánica y da a lugar a fenómenos cotidianos tales como la pleamar y la bajamar, no se trata en los cursos ni en los textos introductorios de Física. Es por esta razón que damos aquí una breve introducción al tema y a otros relacionados (para más detalles ver [1]).

La fuerza de marea tiende a deformar un cuerpo sometido a un campo gravitatorio no uniforme. Para entender su origen calculemos el efecto del campo gravitatorio de la Luna sobre la Tierra (figura 1). Un objeto situado en un punto O de la Tierra está sometido al campo gravitatorio terrestre $\mathbf{g} = -\hat{\mathbf{r}}GMr^{-2}$ y al campo gravitatorio de la Luna $\mathbf{g}_L = -\hat{\mathbf{d}}Gmd^{-2}$ (G es la constante universal de la gravitación). Además la Tierra cae hacia la Luna con la aceleración $\mathbf{a} = -\hat{\mathbf{D}}GmD^{-2}$. Para nuestro observador esta aceleración equivale a un campo gravitatorio ficticio $-\mathbf{a}$. El campo total en O es $\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \mathbf{g}_L - \mathbf{a}$. Por otra parte $D \approx 60r$ luego $r^2 \ll D^2$ y al orden más bajo en

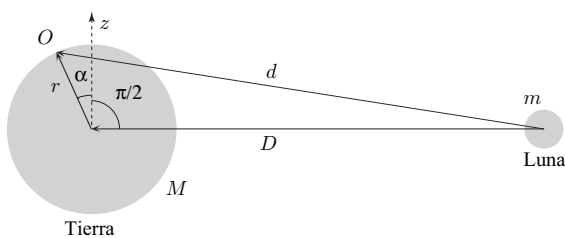


Figura 1: Geometría para el cálculo de la fuerza de marea.

$\lambda \equiv r/D$ resulta $d \cong D(1 + \lambda \sin \alpha)$ y $\hat{\mathbf{d}} \cong \hat{\mathbf{x}} + \lambda \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto la atracción gravitatoria de la Luna deja un efecto neto dado por el campo $\mathbf{g}_m \equiv \mathbf{g}_L - \mathbf{a}$ que llamamos campo de marea y que vale

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_m &= g \frac{m}{M} \lambda^3 (2 \sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) \\ &= 5 \times 10^{-8} g (2 \sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}), \end{aligned}$$

pues $\lambda^3 m/M \approx 5 \times 10^{-8}$. Luego \mathbf{g}_m es muy pequeño. El campo de marea (figura 2 a) es simétrico respecto del plano $\alpha = 0$ y por rotaciones alrededor de \mathbf{D} . En los puntos A y A' situados sobre el eje Luna-Tierra \mathbf{g}_m se aleja del centro de la Tierra. En el plano $x = 0$, \mathbf{g}_m se dirige hacia el centro de la Tierra.

II. MAREAS

Si la Tierra estuviera cubierta por un océano y no rotara, por efecto del campo \mathbf{g}_m adquiriría una forma alargada y simétrica respecto del plano $x = 0$ (figura 2 b). Como el efecto de marea es muy pequeño podemos suponer que la superficie del océano está dada por $r' = r + \delta r$, ($\delta r \ll r$). Entonces el potencial gravitatorio de la Tierra y el potencial del campo de marea en la superficie serían $\phi_T = -GM/r'$ y $\phi_m = (Gm/2D)\lambda^2(1 - 3\sin^2\alpha)$. Luego

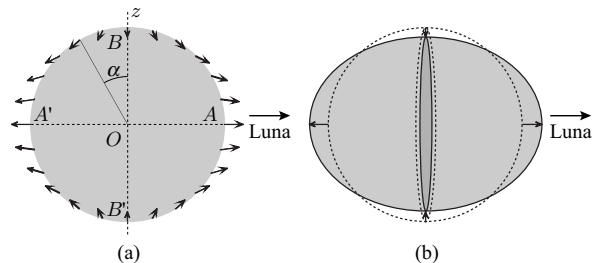


Figura 2: (a) El campo de marea. (b) La deformación que el campo de marea tiende a producir.

*Correo electrónico: jgratton@tinfiplfp.uba.ar

**Correo electrónico: perazzo@favaloro.edu.ar

el potencial del campo \mathbf{g}' sería

$$\phi' = -\frac{GM}{r'} + \frac{Gm}{2D}\lambda^2(1 - 3\text{sen}^2\alpha).$$

En el equilibrio $\phi' = \text{cte.}$ sobre la superficie del océano. Podemos elegir la constante como $-GM/r$, valor que tendría sin fuerza de marea. Esta condición nos da la ecuación de la superficie:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} - \frac{m\lambda^2}{2MD}(1 - 3\text{sen}^2\alpha).$$

Luego al orden más bajo en δr

$$\delta r = \frac{\delta r_0}{2}(3\text{sen}^2\alpha - 1), \quad \delta r_0 = r\lambda^3 \frac{m}{M} \approx 0.36 \text{ m.}$$

De aquí resulta $\delta r(\pm\pi/2) = 0.54 \text{ m}$ y $\delta r(\pm\pi/2) = 0.18 \text{ m}$. La excentricidad de la órbita lunar es $\varepsilon = 0.054$, luego $D_{\min} = D(1 - \varepsilon) = 0.956 D$, $D_{\max} = D(1 + \varepsilon) = 1.054 D$ y δr_0 varía en $\pm 15\%$ según la posición de la Luna en su órbita. Si el océano respondiera instantáneamente al campo \mathbf{g}_m se produciría un abultamiento fijo respecto del eje Tierra-Luna. Como la Tierra gira sobre su eje el abultamiento giraría siguiendo el movimiento aparente de la Luna. La Luna pasa por el meridiano cada $\approx 24 \text{ h } 50 \text{ m}$, luego el intervalo entre máximos de la marea lunar sería $12 \text{ h } 25 \text{ m}$ aproximadamente.

Para el efecto de la atracción solar podemos usar la fórmula anterior con $\delta r_0 \approx 0,17 \text{ m}$ y análogamente al caso de la Luna produciría un abultamiento que giraría siguiendo el movimiento aparente del Sol, cuyos máximos estarían separados por 12 h .

Los campos de marea de la Luna y del Sol se combinan de acuerdo con las posiciones de ambos astros, para lo cual hay que recordar que las órbitas terrestre y lunar están inclinadas 23° y 18° respecto del ecuador. Los efectos se restan cuando la Luna está en cuarto creciente o menguante y se suman cuando se tiene Luna llena o Luna nueva.

No hay que confundir estas deformaciones con las pleamares y bajamares, que son un efecto combinado del campo de marea lunisolar y la rotación terrestre. El problema es complicado porque el agua de mares y océanos no responde instantáneamente al campo de marea tomando la configuración de equilibrio. La forma correcta de analizar el problema es considerar que el campo de marea produce una fuerza que varía periódicamente y con distinta fase en diferentes lugares. Notar que el movimiento de las aguas se debe principalmente a la componente horizontal del campo de marea. La respuesta de las masas de agua a este campo variable plantea un problema de oscilaciones forzadas, que en este caso son ondas. Análogamente a las oscilaciones forzadas de un resorte, aparecen aquí dos efectos. El primero es la resonancia, cuando la frecuencia excitadora es próxima a la de las oscilaciones libres del sistema. En estos casos la amplitud de las mareas puede ser muy grande. Esto ocurre en algunos lugares del globo debido a la particular configuración de las costas.

Por ejemplo en la Bahía de Fundy y en Río Gallegos la amplitud de la marea supera los 10 m . El segundo es la disipación de energía, relacionada con el desfase entre el desplazamiento y la fuerza excitadora. Se debe básicamente a la turbulencia del movimiento del agua y produce interesantes efectos dinámicos que discutiremos ahora.

III. MAREAS Y ÓRBITAS

La reacción de las fuerzas que disipan la energía de las mareas genera un momento que frena la rotación de la Tierra, alarga la duración T del día y disminuye el momento angular de rotación \mathbf{L}_T . Esto finalmente llevará a que la rotación diurna se sincronizará con el movimiento orbital del satélite (como ya ocurrió con la Luna y con los demás satélites del Sistema Solar, que presentan todos la misma cara a sus respectivos primarios). Pero el sistema Tierra-Luna debe conservar su momento angular total \mathbf{L} porque los momentos que estamos considerando son internos (para simplificar no tomamos en cuenta el efecto de las mareas solares). Luego la disminución de \mathbf{L}_T se debe compensar por un aumento del momento angular en otra parte del sistema, para que $\mathbf{L} = \mathbf{L}_T + \mathbf{L}_O + \mathbf{L}_L = \text{cte.}$ (\mathbf{L}_L es el momento angular de rotación de la Luna y \mathbf{L}_O su momento angular orbital). Si D es el radio de la órbita lunar (que para simplificar suponemos circular) y P el período de revolución, $L_O = 2\pi mD^2/P$. El momento angular de un cuerpo esférico de masa μ y radio a que gira sobre su eje con velocidad angular ω es $I\omega$ ($I \approx \mu a^2$ es el momento de inercia). Suponiendo para simplificar que \mathbf{L}_T , \mathbf{L}_O y \mathbf{L}_L están alineados, y recordando que la Luna muestra siempre la misma cara a la Tierra, resulta $I_T/T + (mD^2 + I_L)/P = \text{cte.}$ Dado que $I_L \approx mr_L^2$ y que $r_L \ll D$ podemos despreciar el último término. Usando la III Ley de Kepler y diferenciando la ecuación resultante se obtiene

$$I_T \frac{\delta T}{T^2} = \frac{1}{2} m \frac{\sqrt{GM}}{2\pi} D^{-1/2} \delta D.$$

Luego si el día se alarga la Luna se aleja de la Tierra y entonces P aumenta. Usando nuevamente la III Ley de Kepler obtenemos

$$\frac{\delta D}{D} = 2 \frac{I_T}{mD^2} \frac{P}{T} \frac{\delta T}{T}.$$

Ahora $P/T \cong 28$, $I_T = 0.3308Mr^2$ y $mD^2 = 44.28Mr^2$, luego $I_T/mD^2 \approx 0,75 \times 10^{-2}$ y resulta $\delta D/D \cong 0.42\delta T/T$. Luego si el día se alarga en 1 s la Luna se aleja 1.6 km de la Tierra. El segundo agregado al año 2008 [2] se debe al alargamiento acumulado desde fines de 2005 y es el vigésimocuarto agregado desde 1972. Observaciones del crecimiento de corales fósiles han mostrado que hace alrededor de 380 millones de años el año tenía unos 400 días [3], lo que implica que desde entonces el día se alargó un 10% y la distancia de la Luna aumentó un 4% , o sea unos 15000 km .

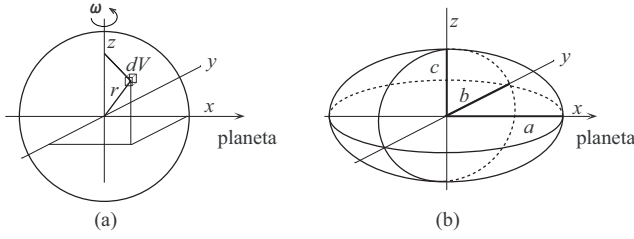


Figura 3: (a) Cálculo del efecto combinado de la fuerza de marea y la fuerza centrífuga sobre un satélite; (b) deformación de un satélite fluido debida a la rotación y al campo de marea.

Nuestro razonamiento vale si la órbita es directa, es decir los tres momentos angulares están aproximadamente alineados. La situación cambia si la órbita del satélite es retrógrada. En ese caso la disminución del momento angular de rotación del planeta \mathbf{L}_P debe ser compensada por una disminución de \mathbf{L}_O y al revés que en el caso de la Luna el satélite se acerca al planeta pudiendo caer en él si $L_P > L_O$. Así ocurre con Tritón, el mayor satélite de Neptuno, que orbita en sentido retrógrado con $L_O \ll L_N$, luego la disipación de las mareas que produce sobre Neptuno terminará por agotar su momento angular orbital.

IV. EL LÍMITE DE ROCHE

La fuerza de marea escala como D^{-3} , por lo tanto si un satélite orbitara muy cerca de su primario sería tan intensa que lo rompería en pedazos. Para ver cuando esto ocurre calculemos las fuerzas a las que está sometido un elemento de volumen de un satélite de densidad media ρ , situado a una distancia r del centro (figura 3 a). Sobre este elemento actúa la gravedad del satélite, cuyo campo es $\mathbf{g} = -(4\pi/3)G\rho r\hat{\mathbf{r}}$ pues se debe a la masa contenida en $r' < r$. Además actúa la fuerza centrífuga $\mathbf{f}_c = \omega^2(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}})$ debida a la rotación y puesto que el satélite presenta siempre la misma cara al planeta $\omega = 2\pi/P$ donde $P = 2\pi(D^3/GM)^{1/2}$ es el período de revolución y M es la masa del planeta. Por último actúa la fuerza de marea debida al planeta, cuyo campo es $\mathbf{g}_m = (GM/D^3)(2x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}} - z\hat{\mathbf{z}})$. Luego el campo total es $\mathbf{q} = \mathbf{g} + \mathbf{f}_c + \mathbf{g}_m$. Es fácil ver que sobre el eje y la fuerza centrífuga cancela la fuerza de marea. Por otra parte sobre el eje z la fuerza centrífuga es nula y la fuerza de marea se suma a la gravedad. Finalmente sobre el eje satélite-planeta (x) la fuerza centrífuga y la de marea tienden a contrarrestar la gravedad y el campo total es

$$q_x = -\frac{4}{3}\pi G\rho x + 3\frac{GM}{D^3}x.$$

Si el satélite fuera fluido su forma de equilibrio sería un elipsoide con tres ejes distintos: el mayor en la dirección x , el menor en la z y el intermedio en la y (figura 3 b).

Sin embargo si D disminuye mucho el equilibrio ya no es posible porque g_m y f_c crecen y a un cierto momento se tendría $q_x > 0$; entonces el satélite, si fuera fluido, se rompería (este es el destino de Tritón que como vimos se acerca a Neptuno). La condición límite es $q_x \approx 0$. Si ρ_0 es la densidad del planeta y R su radio, esto requiere

$$D \leq R^* = \left(\frac{3\rho_0}{\rho}\right)^{1/3} R.$$

El valor crítico R^* es el *límite de Roche* [4]. En realidad nuestro resultado es incorrecto, pues $R^* \approx R$ y nuestra expresión de g_m vale para $D \gg R$. Un cálculo mejor da

$$R^* = \left(\frac{A\rho_0}{\rho}\right)^{1/3} R, \quad A = 8 - 14.$$

Lo dicho vale para un satélite fluido que no opone resistencia a esfuerzos de tracción. Para un cuerpo sólido rocoso es necesario un acercamiento mayor para que la fuerza de marea pueda vencer la resistencia del material. Si Y es el esfuerzo límite que puede resistir el material (valores típicos para satélites rocosos van de 10^6 a 10^8 dy/cm²), la ruptura se produce cuando $\rho g'_x a \cong Y$ donde a es el radio del satélite. Se obtiene así un nuevo valor crítico R_Y^* dado por

$$Y = \rho a^2 \left(\frac{3GM}{R_Y^{*3}} - \frac{4}{3}\pi G\rho\right),$$

de donde obtenemos

$$R_Y^* = \frac{R^*}{(1+F)^{1/3}}, \quad F = \frac{Y}{\frac{4}{3}\pi G\rho^2 a^2}.$$

Notar que F disminuye con a y R_Y^* crece y se acerca a R^* . Luego si $F \ll 1 \Rightarrow R_Y^* \approx R^*$. Esto ocurre para cuerpos grandes que cumplen

$$a \gg a^* \cong \sqrt{\frac{Y}{\frac{4}{3}\pi G\rho^2}}.$$

Con $\rho = 2.5$ g/cm³, $Y \approx 10^7$ dy/cm² resulta $a^* \approx 25$ km. Luego un objeto de esta clase con $a > 25$ km se rompe cuando $D \approx R_Y^*$. Uno más pequeño se precipita entero sobre el planeta si $R_Y^* < R$.

El parámetro R^* tiene también otro significado; a saber que a distancias menores es imposible que se forme un satélite por acreción.

Agradecimientos

Agradecemos los subsidios PIP 5377 del CONICET, X031 de la Universidad de Buenos Aires, PICTR 2002-00094 y PICTO 21360 de la ANPCYT.

-
- [1] J Gratton, *Mecánica*, http://www.lfp.uba.ar/Julio_Gratton/mecanica/mecanica.html
- [2] R Courtland, *New Scientist* 9 december 2008.
- [3] JW Wells, *Nature* **197**, 948–950, 1963.
- [4] E Roche, *Acad. des sciences de Montpellier* **1**, 243, 1848.