

Reconstrucción de dinámicas caóticas con datos escasos

P. F. Verdes, P. M. Granitto, H. D. Navone, H. A. Ceccatto
IFIR (Instituto de Física Rosario, CONICET-UNR)
Bv. 27 de Febrero 210 bis - (2000) Rosario - Argentina
e-mail: pverdes@ifir.ifir.edu.ar

Se discute la performance de métodos globales (redes neuronales) y locales (Aproximación de Hiperplano Local) en la predicción de series temporales caóticas. Se investiga la bondad de estos métodos en función de la longitud del registro histórico. Usando el mapa logístico y la ecuación de Mackey-Glass como ejemplos, se concluye que con datos escasos la red neuronal produce mejores resultados. Sin embargo, para tiempos computacionales moderados y/o registros de tamaño mediano el método local propuesto puede ser muy competitivo o aún mejor que la estrategia global.

We discuss the capabilities of global (neural network) and local (Local Hyperplane Approximation) methods for the forecasting of chaotic time series. We investigate the performance of these methods as a function of the database length. Using the logistic map and the Mackey-Glass equation as examples, we conclude that with scarce data the neural network technique produces better results. However, for moderate computational time and/or medium-sized data sets the proposed local method can be highly competitive or even better than the global approach.

I. INTRODUCCION

Diferentes algoritmos han sido diseñados para reconstruir la dinámica subyacente en una serie temporal y permitir predecir sus próximos valores en el futuro^{1,2}.

Dadas las observaciones sobre un sistema $\{x_i\}_0^N$, el problema consiste en la reconstrucción de la dinámica $x_t = F(\mathbf{X}_t)$, donde $\mathbf{X}_t = (x_{t-\tau}, x_{t-2\tau}, \dots, x_{t-d\tau})$ es un vector en el espacio de reconstrucción. Los algoritmos propuestos para resolver este problema admiten una clasificación en locales y globales, dependiendo de la estrategia utilizada para aproximar F . Algoritmos globales utilizan toda la información del registro histórico, mientras que los locales sólo emplean aquella información contenida en el entorno próximo al estado actual del sistema.

II. METODOS GLOBALES

Las Redes Neuronales (RN) constituyen el método más importante de este tipo. En el proceso de aprendizaje, representado por el

ajuste de sus parámetros internos al minimizar una función error estipulada, las RN realizan una exploración global de todos los datos disponibles^{3,4,5}.

La fidelidad en la representación de la dinámica de una serie temporal depende en general de la arquitectura de la red y de la longitud del registro de datos.

III. METODOS LOCALES

Se utilizó una variante del método llamado Aproximación de Hiperplano Local⁶ (AHL). Se tomaron los n vectores \mathbf{X}_i ($i = 1, n$) más próximos al estado actual \mathbf{X}_t según la distancia Euclídea $d(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i)$, y se produjo la predicción wimplex⁷ $\bar{x}_i^W \equiv \sum_{i=1}^n x_i P(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i)$, donde $x_i = F(\mathbf{X}_i)$ y $P(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i) \propto 1/d(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i)$. Luego se consideraron las ecuaciones aproximadas $x_i = F(\mathbf{X}_i) \simeq x_t + \mathbf{A}_t \cdot (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_t)$ ($i = 1, n$), donde $\mathbf{A}_t = \nabla F(\mathbf{X}_t)$, y se realizó la predicción corregida linealmente promediándolas con $P(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i)$: $x_t^{AHL} \equiv \bar{x}_i^W + \mathbf{A}_t \cdot (\mathbf{X}_t - \bar{\mathbf{X}}_i^W)$. Se consideraron to-

dos los vecinos X_i ($i = 1, n(R)$) de X_t en una bola de radio R y se eligió R optimizando el error en ajuste. Las componentes de A_t se obtuvieron usando una descomposición en valores singulares⁸ para resolver el sistema sobredeterminado $x_i - \bar{x}_i^W \simeq A_t \cdot (X_i - \bar{X}_i^W)$ ($i = 1, n(R)$) minimizando la función $\epsilon^2 = \sum_{i=1}^{n(R)} P(X_t - X_i) (x_i - x_i^{AHL})$.

IV. SERIES CAOTICAS ESTUDIADAS

A. Mapa Logístico

En el caso del mapa logístico se produjeron 20.000 iteraciones a partir de la ley $x_{t+1} = 3.8x_t(1-x_t)$ y se descartaron los primeros 10.000 valores. Con los siguientes 4.500 se generaron registros de tamaños $N=20,50,100,150,\dots,300$ (15 conjuntos diferentes de cada tamaño) que se utilizaron para predecir los últimos 1.000 valores del registro.

B. Ecuación de Mackey-Glass discretizada

Se generó la serie dada por $x(t + \Delta t) = \frac{2-b\Delta t}{2+b\Delta t}x(t) + \frac{a\Delta t}{2+b\Delta t} \left(\frac{x(t+\Delta t-T)}{1+x^c(t+\Delta t-T)} + \frac{x(t-T)}{1+x^c(t-T)} \right)$, con los parámetros $a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 10$, $T = 17$, $\Delta t = 1$, y condiciones iniciales $x(0) = x(1) = \dots = x(16) = 0.5$. Se produjeron 25.000 iteraciones y se descartaron las primeras 10.000. De las siguientes 9.000 se eligieron conjuntos de tamaños $N=250,500,\dots,1.500$, muestreando los puntos cada 6 unidades de tiempo ($\tau = 6$). De los últimos 6.000 valores se generó un intervalo de predicción de 1.000 puntos. Se consideró un solo registro histórico de cada tamaño.

Para evaluar la performance de estos métodos se eligió la Raíz del Error Cuadrático Medio Normalizado $NRMSE = \left(\frac{\sum_{t \in S} (x_t - x_t^P)^2}{\sum_{t \in S} (x_t - \bar{x}_t)^2} \right)^{1/2}$, donde \bar{x}_t es el promedio de los registros, x_t^P es la predicción para x_t y S puede ser el conjunto de ajuste o el de predicción.

V. RESULTADOS

En la Figura 1 se muestran los resultados para el mapa logístico. La AHL arroja valores de dispersión apreciable. Sin embargo, la tendencia exponencial del NRMSE promedio es claramente visible. Los resultados de la red, en cambio, son menos dependientes del conjunto particular utilizado y de su tamaño, aunque pueden observarse fluctuaciones introducidas por el proceso aleatorio de entrenamiento. Para registros históricos pequeños una red neuronal 2:4:1 tiene una mejor performance que la AHL. Sin embargo, para $N \sim 30$ la capacidad de predicción es comparable, siendo la AHL menos costosa computacionalmente. Para registros de longitud mayor el método local resulta claramente superior.

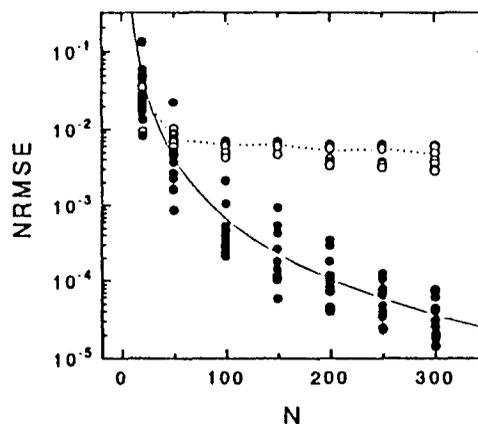


FIG. 1. El error de predicción para el mapa logístico en función de la longitud del registro histórico para una red 2:4:1 (círculos abiertos) y la AHL (círculos sólidos). La línea punteada indica el NRMSE promedio para la red; la línea llena muestra el comportamiento exponencial del NRMSE promedio para la AHL.

En la Figura 2 se presentan los resultados para la ecuación de Mackey-Glass. Puede verse la performance de la AHL y de redes 6:5:1 y 6:12:1. Las curvas siguen el mismo patrón encontrado previamente, siendo el punto de cruce fuertemente dependiente de la arquitectura utilizada.

VI. CONCLUSIONES

Hemos comparado la capacidad de dos buenos representantes de las metodologías locales y globales para la predicción de series temporales caóticas. Hemos encontrado que con un registro histórico escaso los métodos globales tienen una mejor performance que los locales. Sin embargo, para tamaños intermedios el rendimiento es comparable, siendo los métodos locales de cómputo menos intensivo dado que no deben explorar la totalidad del atractor. En el caso de registros abundantes estos últimos resultan superiores. Idénticas conclusiones pueden extraerse para las predicciones a n -pasos. Sin embargo, para series temporales ruidosas estos resultados deben ser reexaminados, dado que los métodos globales pueden ser más eficientes que los locales en el filtrado de ruido.

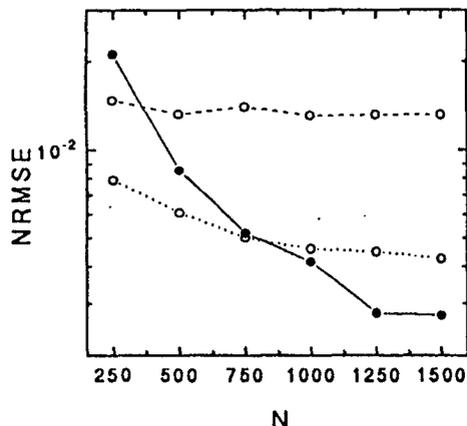


FIG. 2. El error de predicción para la ecuación de Mackey-Glass en función de la longitud del registro histórico para redes 6:5:1 (círculos abiertos, curva superior), 6:12:1 (círculos abiertos, curva inferior) y la AHL (círculos sólidos).

Resulta también de interés estudiar cómo compiten estos métodos para predicciones varios pasos en el futuro. En la Figura 3 se muestra la performance de la AHL y de una red 6:12:1 para la ecuación de Mackey-Glass. Se usaron registros históricos de tamaño 500 y 1.500 y un intervalo de predicción de 1.000 puntos inmediatamente posterior al de ajuste. Para $N=500$ ambos métodos arrojan esencialmente los mismos resultados. Con un registro extenso, en cambio, la AHL resulta más confiable que la red.

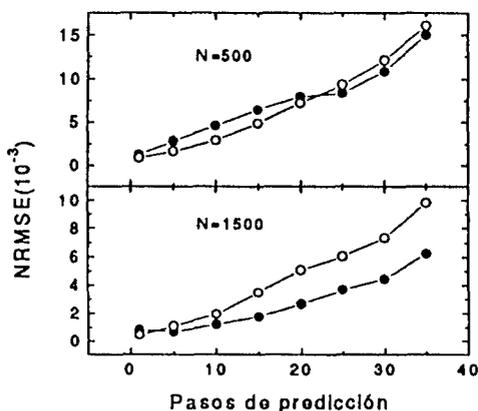


FIG. 3. El error de predicción a n -pasos para una red 6:12:1 y la AHL. Los resultados corresponden a la ecuación de Mackey-Glass.

- ¹ Farner, J.D. & Sidorowich, J.J. *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 845-848 (1987).
- ² Casdagli, M. & Eubank, S. eds. *Nonlinear Modeling and Forecasting*, Santa Fe Institute of Studies in the Sciences of Complexity Proc. vol XII (Redwood City: Addison-Wesley) (1992).
- ³ Weigend, A.S., Huberman, B.A., & Rumelhart, D.E. *International Journal of Neural Systems*, **1**, 193-209 (1990).
- ⁴ Navone, H.D. & Ceccatto, H.A. *Chaos, Solitons & Fractals*, **6**, 383-387 (1995).
- ⁵ Rumelhart, D.E., Hinton, G.E. & Williams, R.J. *Nature*, **323**, 533-536 (1986).
- ⁶ Navone, H.D. & Ceccatto, H.A. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **28**, 3381-3388 (1995).
- ⁷ Fowler, A.D. & Roach, D.E. *Comput. Geosci.*, **19**, 41-52 (1993).
- ⁸ Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. & Vetterling, W.T. *Numerical Recipes* (Cambridge University Press) (1989).