

Análisis multifractal mediante onditas

J.R. Busch^(1,2), S.C. Gabbanelli^(1,3) y S.I. Isaacson^(1,4)

Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires
Paseo Colón 850 (1063) Buenos Aires

⁽¹⁾Departamento de Matemática. ⁽²⁾Grupo de Sistemas Líquidos. ⁽³⁾Grupo de Medios Porosos. ⁽⁴⁾Grupo de Señales y Control.
e-mail: jbusch@tron.fi.uba.ar

En este trabajo analizamos algunas técnicas recientemente introducidas para el análisis de escala de datos experimentales o simulados. El estudio del comportamiento de escala de los coeficientes ondita ha sido propuesto como una extensión del análisis multifractal. En el caso de las onditas de Haar se ha comprobado además que esta alternativa permite detectar regularidades geométricas que indican una desviación respecto al comportamiento multifractal; la relación entre los coeficientes ondita y los contenidos de cajas de los métodos usuales del cálculo multifractal es en este caso inmediata. En este trabajo estudiamos estos dos aspectos del comportamiento de escala de los coeficientes ondita usando la base de Daubechies (D_4), aplicando el análisis con fines comparativos a algunos casos unidimensionales previamente estudiados, y en dos dimensiones a configuraciones obtenidas por simulación de Monte Carlo.

In this work we analyze some recently introduced techniques for the scaling analysis of experimental or simulated data. The study of the scaling behavior of the wavelet coefficients have been proposed as an extension of multifractal analysis. For Haar wavelets it is shown that in this way we can detect geometric regularities that point out a deviation with respect to a multifractal behavior. The relation between wavelet coefficients and the box contents of the usual multifractal computations is in this case immediate.

In this work we study these two aspects of the scaling behavior of the wavelet coefficients using Daubechies wavelets (D_4), and we apply this analysis, with comparative purposes, to some previously studied one dimensional examples, and in two dimensions to configurations obtained by Monte Carlo simulation.

Introducción

Estudiamos sistemas desordenados, cuyos estados se describen por la ubicación de *partículas* en los *sitios* de un reticulado rectangular. Dada una región D notamos $p(D)$ a la masa relativa de D . Así, p define una probabilidad cuyas singularidades analizamos mediante técnicas multifractales y de onditas.

Introducimos la *función de partición multifractal*

$$Z_q(\varepsilon) \doteq \sum p^q(I)$$

donde la suma recorre los intervalos I de una partición de diámetro ε del reticulado. Definimos la *energía libre multifractal* τ como función de q ,

$$Z_q(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\tau(q)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

El estudio de la curva $(q, \tau(q))$ y de su curva conjugada, según Legendre, $(\alpha, f(\alpha))$ constituye el análisis multifractal.

Por otra parte, dado un análisis de multiresolución con función de escala ϕ y ondita ψ y fijada una escala de resolución límite 2^{-M} , $p(t)$ tiene la expansión ($2 \leq J \leq M$)

$$p(t) \sim \sum_{k=0}^{2^J-1} c_{-j,k} \phi_{-j,k}(t) + \sum_{j=-(J+1)}^M \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{-j,k} \psi_{-j,k}(t)$$

donde $\phi_{-j,k}$, $\psi_{-j,k}$ indican las funciones escala y ondita, respectivamente; y $c_{-j,k}$ y $d_{-j,k}$ los respectivos coeficientes de p en escala $\varepsilon = 2^{-j}$ ⁽³⁾.

Para $\varepsilon = 2^{-j}$ definimos la *función de partición ondita*

$$W_q(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \varepsilon^{q/2} d_{-j,k}^q$$

y la *energía libre ondita* $\beta(q)$

$$W_q(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\beta(q)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

El trabajo ⁽⁴⁾ trata la relación entre τ y β usando onditas de Haar en ejemplos unidimensionales. Tomamos de este trabajo algunos ejemplos significativos y rehacemos la comparación entre $Z_q(\varepsilon)$ y $W_q(\varepsilon)$. Además, reemplazamos la ondita de Haar por la de Daubechies (D_4) ⁽³⁾ y comparamos los resultados.

El análisis mediante onditas tiene objetivos complementarios al multifractal, ya que la comparación entre β y τ permite detectar desviaciones respecto a la multifractalidad ⁽⁴⁾.

Presentamos también algunas configuraciones numéricas bidimensionales obtenidas por Monte Carlo que son analizadas comparando $Z_q(\varepsilon)$ y $W_q(\varepsilon)$, sus dimensiones fractales, y sus espectros multifractales.

Ejemplos unidimensionales

Los ejemplos unidimensionales que tratamos son una medida multifractal, una medida uniforme y una medida mixta ⁽⁴⁾.

La medida multifractal es construida por subdivisión diádica del $[0, 1]$ distribuyendo en cada partición la masa en el intervalo izquierdo y el derecho en la relación $1 : R$, con $R = 0.577$. En este caso, la expresión para la energía libre multifractal τ puede obtenerse explícitamente:

$$\tau(q) = \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{(1+R)^q}{1+R^q} \right)$$

Como referencia trazaremos en los gráficos en escala doble logarítmica rectas de pendiente $\tau(q)$, que llamaremos curvas teóricas, con la ordenada al origen ajustada adecuadamente para la comparación con las curvas $(\varepsilon, Z_q(\varepsilon))$ obtenidas numéricamente. En la Figuras 1(a) y (b) mostramos el buen ajuste de los resultados numéricos de Z_q y W_q . Las funciones de partición ondita obtenidas con Haar

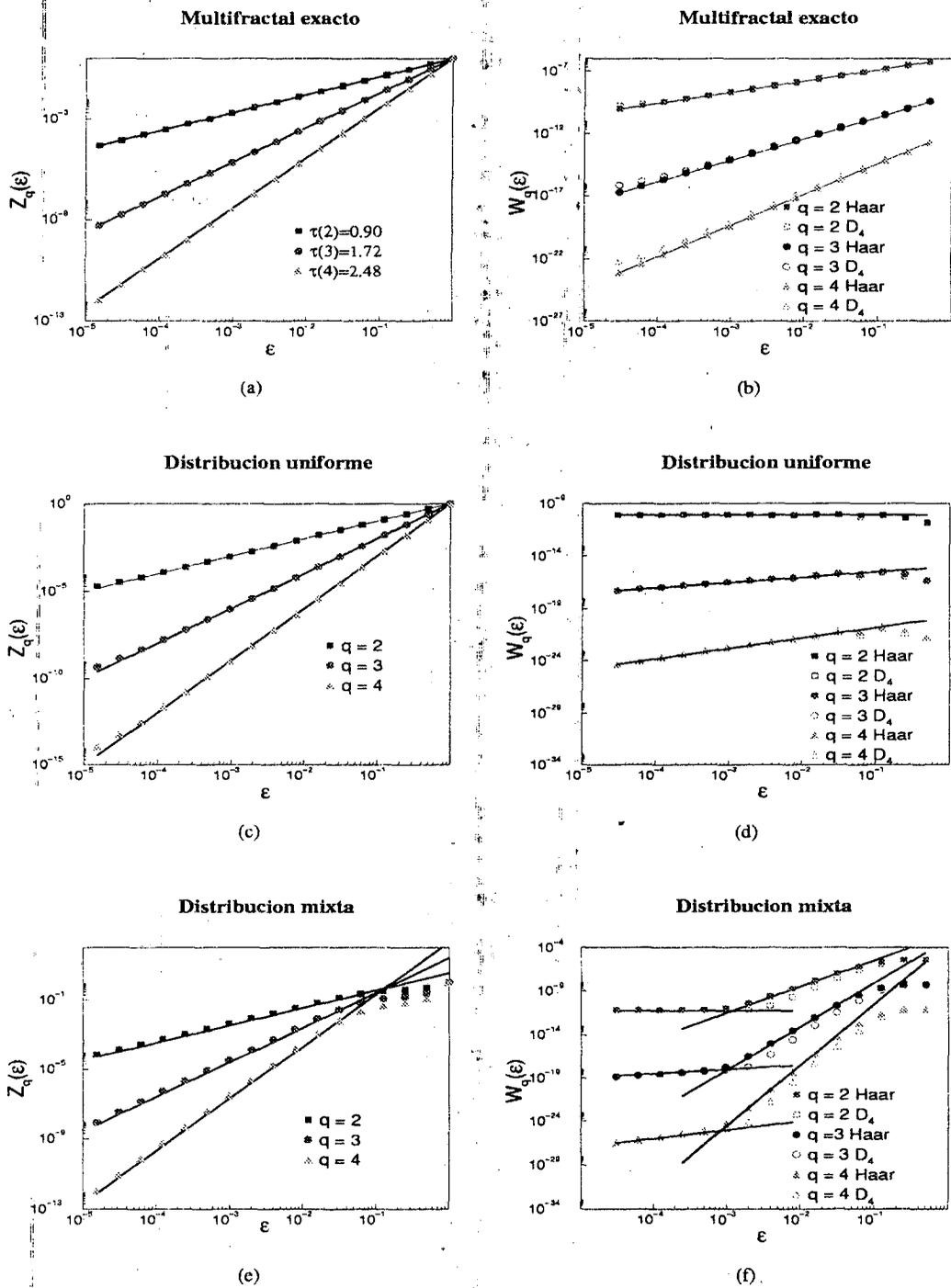


Figura 1: Z_q y W_q para los ejemplos unidimensionales. (a)(b) Multifractal exacto: Puede apreciarse el paralelismo entre Z_q y W_q para cada q y el buen ajuste respecto a las curvas teóricas (líneas llenas). (c)(d) Uniforme: En este caso no hay paralelismo de Z_q y W_q , y hay buen ajuste respecto a las curvas teóricas (líneas llenas). (e)(f) Mixta: En este caso no hay paralelismo de Z_q y W_q , y hay buen ajuste respecto a las curvas teóricas (líneas llenas). Destacamos la mayor precisión con la que la ondita de Daubechies detecta (en el marcado quiebre de la curva) el cambio de régimen en este ejemplo.

y Daubechies no son significativamente diferentes. En este ejemplo, el de la medida multifractal, la energía libre ondita coincide con la energía libre multifractal.

El segundo ejemplo que presentamos es una medida uniforme definida en el intervalo $[0, 1]$. Esta medida no es multifractal, y en este caso $\tau(q) = q - 1$. En el análisis ondita, estas pendientes resultan $\beta(q) = q/2 - 1$. El no paralelismo entre Z_q y W_q es indicativo de la no multifractalidad de la medida. Mostramos en las Figuras 1(c) y (d) el no paralelismo entre Z_q y W_q y la buena concordancia entre los resultados numéricos y teóricos. Tampoco en este ejemplo hay diferencias significativas entre las funciones de partición ondita de Haar y Daubechies.

Por último, presentamos una medida mixta obtenida en el intervalo $[0, 1]$ perturbando una densidad exponencial $p(t) = Ae^{-t/\lambda}$ con un ruido aleatorio de amplitud $\rho = 0.0025$, con $\lambda = 2000$.

Para esta medida, el análisis nos permite concluir que no es multifractal, Z_q se comporta igual que en la medida uniforme con $\tau(q) = q - 1$, salvo para valores grandes de ϵ . En este no hay paralelismo entre Z_q y W_q y es bueno el ajuste respecto a las curvas teóricas, $\beta(q) = q/2 - 1$ para valores pequeños de ϵ y $\beta(q) = 2q - 1$ para valores intermedios, como puede verse en las Figuras 1(e) y (f). El cambio de régimen es notorio mediante el análisis ondita con el marcado quiebre de la curva, siendo de mayor precisión el obtenido con la ondita de Daubechies.

Ejemplos bidimensionales

Las configuraciones bidimensionales que analizamos fueron obtenidas por la variante de Metropolis del método de Montecarlo, con un potencial atractivo cuadrado de corto alcance, variando la densidad ρ , el alcance D , y $P = \epsilon/(k_B T)$, donde ϵ es la intensidad del potencial atractivo de a pares, k_B es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura.

Se eligieron las densidades en la vecindad del límite

de percolación, y los restantes parámetros a fin de simular aproximadamente un líquido con micelas.

En la Figura 2 mostramos un esquema del algoritmo usado para generar la configuración bidimensional. En la Figura 2-1 representamos una partícula, en el centro del cuadrado grande. El cuadrado grande, de lado $2D$ describe la zona de interacción para la partícula centrada y el cuadrado pequeño la zona de exclusión para la partícula. La partícula centrada interactúa con las otras partículas en su rango con intensidad ϵ . En la Figura 2-2 mostramos un movimiento de Monte Carlo, en (a) seleccionamos uno de los cuatro posibles movimientos cada uno con probabilidad $1/4$, pasando así a (b). En (b), una vez que el movimiento ha sido seleccionado, se calcula el salto δU en el potencial asociado con el movimiento. Este se realiza, pasando de (b) a (c), incondicionalmente si $\delta U \leq 0$, y con probabilidad $e^{-\delta U/(k_B T)}$ si $\delta U > 0$.

Calculamos las dimensiones factales, D_f , de las configuraciones por dos métodos: el método usual box-counting o de tamaño fijo y el método de masa fija⁽¹⁾. Las diferencias en los valores de D_f obtenidos por ambos métodos no son significativas teniendo en cuenta el margen de error. También calculamos los espectros multifractales de las configuraciones usando el algoritmo de masa fija⁽¹⁾.

Comenzamos haciendo un análisis de las dimensiones fractales variando el alcance D y manteniendo la temperatura inversa - vía P - y la densidad ρ fijas, observamos que D_f crece con D y que las curvas $(\alpha, f(\alpha))$ se desplazan hacia la derecha a medida que el alcance crece (ver Figuras 3(a) y (b)). La geometría de la configuración refleja el crecimiento de D en clusters mayores y más compactos. Si se considera la dimensión de la configuración como un promedio ponderado entre la dimensión de los clusters y 2 (correspondiendo a la distribución homogénea de los clusters), la mayor compacidad de los clusters explica el incremento en la dimensión.

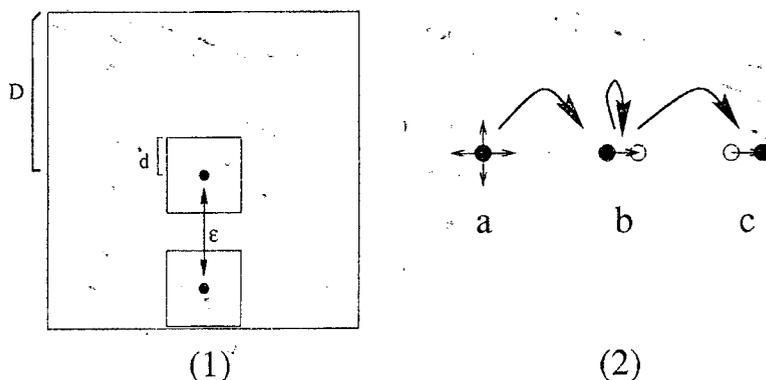


Figura 2: Esquema del algoritmo usado para generar las configuraciones bidimensionales.

Manteniendo el alcance y la densidad fijos y calculando la dimensión fractal como función de P observamos un comportamiento no monótono, también en los espectros multifractales observamos ese comportamiento, hay un cruce entre las curvas (ver Figuras 3(c) y (d)). Este fenómeno puede explicarse por dos efectos no concurrentes del aumento de la temperatura: 1) por un lado promueve la liberación de las partículas en los bordes de los clusters, favoreciendo una mayor dispersión de la masa; 2) por otro lado, promueve el acomodamiento de las partículas dentro de un cluster, favoreciendo una mayor compacidad de estos clusters. El primer efecto tiende a disminuir la dimensión, mientras que el segundo tiende a aumentarla. Este doble efecto fue ya discutido, en su relación con el umbral de percolación⁽²⁾.

Por último, manteniendo el alcance y la temperatura inversa fijos y estudiando la dimensión fractal como función de la densidad, observamos que D_f crece con p . En los espectros multifractales también se observa este comportamiento monótono con el desplazamiento de las curvas hacia la derecha, lo que nuevamente puede explicarse pensando la dimensión global de la configuración como un promedio de la dimensión de los clusters y 2, dado que el aumento de la concentración se manifiesta en el crecimiento de los clusters. (ver Figuras 3(e) y (f)).

Analizamos dos configuraciones usando multirresolución, las configuraciones se obtuvieron para un mismo valor del alcance ($D = 18$) y temperatura inversa ($P = 0.4$) una con una densidad relativamente baja ($p = 0.12$) y la otra con una densidad relativamente alta ($p = 0.20$), cerca-

na y por encima de la del límite de percolación. Mostramos las estructuras en las Figuras 4(a) y (b). En la misma figura, mostramos las multirresoluciones respectivas, Figuras 4(c) y (d). En ellas podemos observar:

1. En las escalas más pequeñas, la multirresolución refleja la configuración;
2. Las dos multirresoluciones (Haar y Daubechies) son muy semejantes, aunque en la de Daubechies tienen mayor peso las escalas menores;
3. Hay una escala intermedia que se destaca por mayores coeficientes: esta escala corresponde a un ancho promedio de los clusters.

Para estas mismas configuraciones, en las Figuras 4(e), (f), (g) y (h) mostramos las curvas Z_q y W_q (con onditas de Haar) en escala doble logarítmica, para algunos valores de q . Vemos que las funciones de partición onditas detectan mucho mejor que las funciones de partición multifractal las escalas significativas, siendo éstas las mismas que observábamos en las multirresoluciones.

Conclusiones

Tratamos en este trabajo de mostrar cómo el análisis multifractal y su complemento mediante onditas aportan, como herramienta descriptiva, al análisis estadístico de configuraciones desordenadas. Creemos que, en perspectiva, el análisis mediante onditas puede proveer una poderosa herramienta para el estudio de fenómenos de escala, complementando el tratamiento mediante fractales.

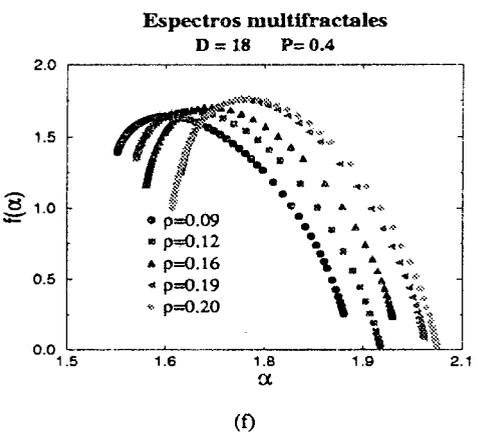
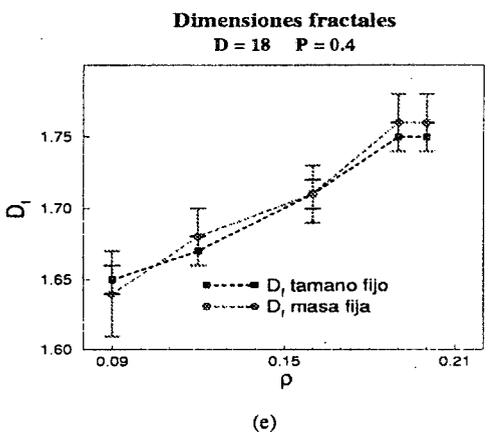
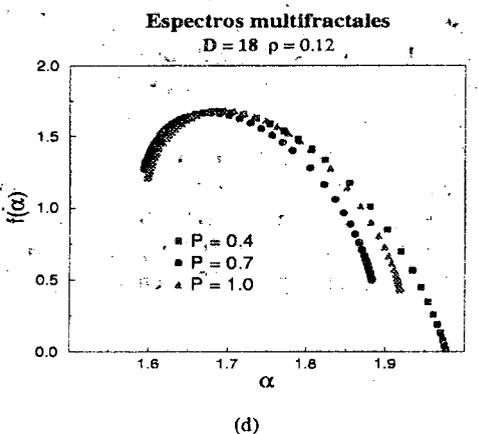
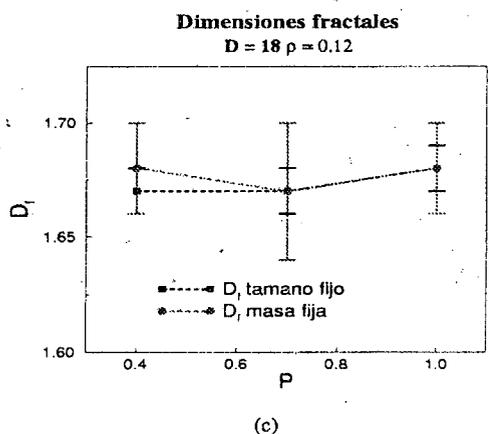
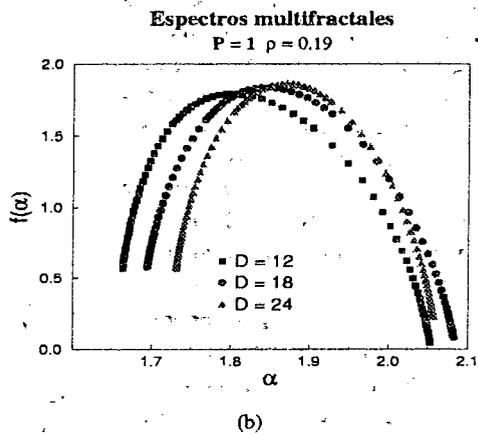
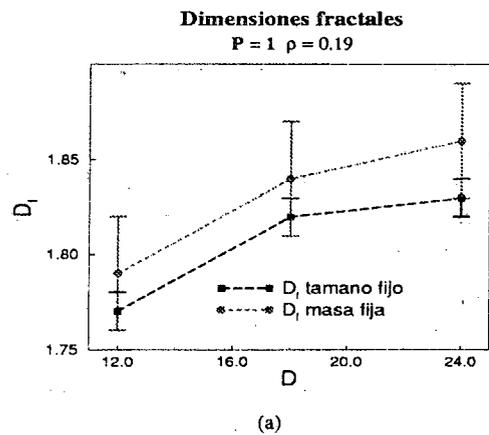
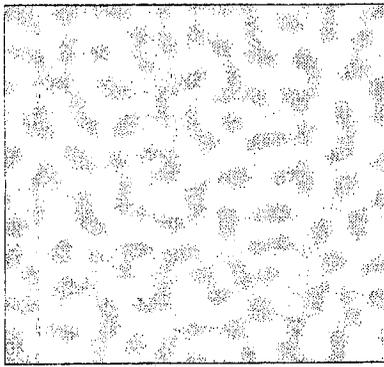
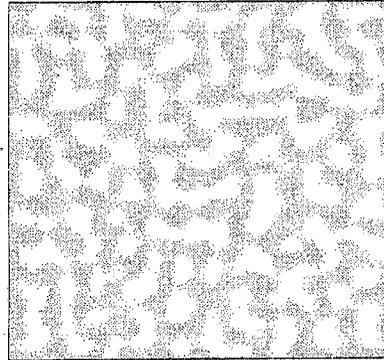


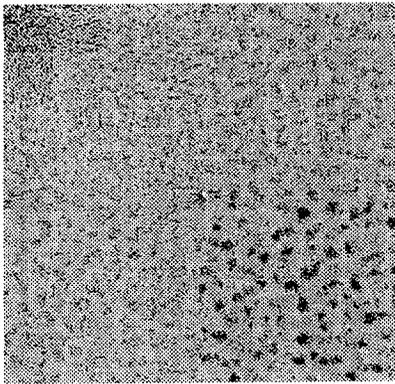
Figura 3: Dimensión fractal y espectros multifractales según la variación de los distintos parámetros del sistema bidimensional. Destacamos el comportamiento no monótono al variar P . Las dimensiones fractales fueron calculadas con dos métodos distintos, el habitual de box-counting (tamaño fijo), y el método de masa fija. Los espectros multifractales fueron obtenidos con el algoritmo de masa fija⁽¹⁾.



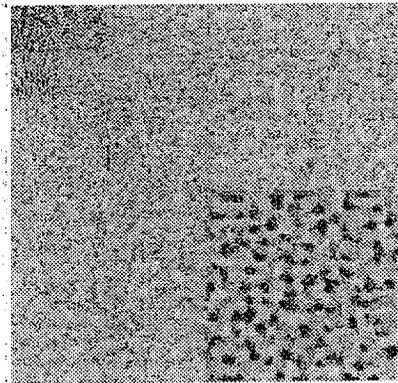
(a)



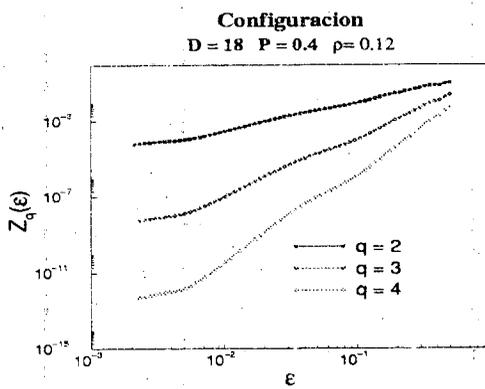
(b)



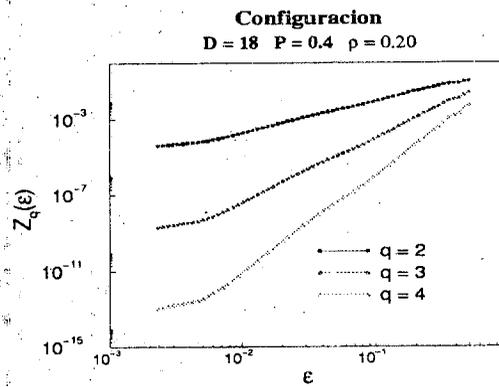
(c)



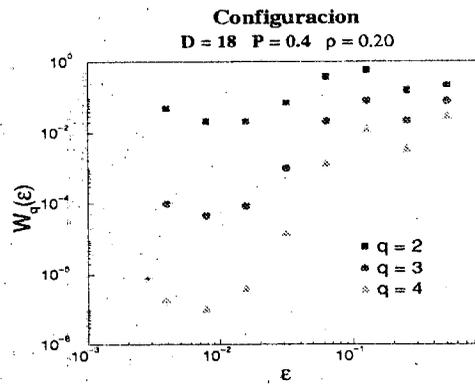
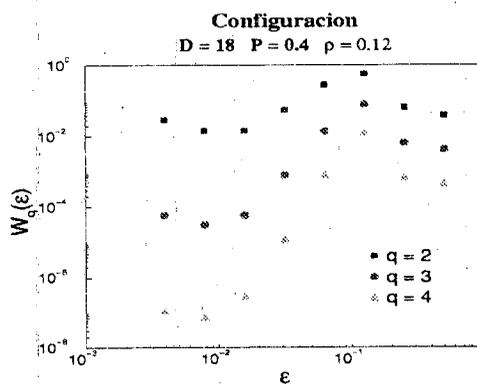
(d)



(e)



(f)



Referencias

- 1- J. R. Busch and S. C. Gabbanelli. Cálculo de índices fractales y multifractales: límites y alcances. *Anales de la Asociación Física Argentina*, 10:197-200, 1998.
- 2- A.L.R. Bug, S.A. Safran, G.S. Grest, and I. Webman. Do interactions raise or lower a percolation threshold? *Physical Review Letters*, 55(18):1896-1899, 1985.

- 3- I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, USA, 1992.

- 4- J. W. Kantelhardt, H. E. Roman, and M. Greiner. Discrete wavelet approach to multifractality. *Physica A*, 220:219-238, 1995.